4. Superficies desarrollables

Un caso particular de superficies regladas son las superficies desarrollables. Geométricamente se caracterizan por tener curvatura gaussiana nula, lo cual quiere decir que son intrínsicamente planas. Son planos o regiones planas que se sumergen en el espacio sin deformarse. A lo sumo se doblan para formar conos, cilindros ... Por ello se pueden extender sobre el plano, tras realizarles algunos cortes. De ahí el nombre de **superficies desarrollables**.

Consideremos una superficie desarrollable parametrizada por $c(u, v)$. Si $n(u, v)$ es un vector normal a la superficie en el punto $c(u, v)$, la condición de curvatura nula se expresa como

$$c_{uv}(u, v) \cdot (c_u(u, v) \times c_v(u, v)) = 0. \tag{7}$$

Este resultado expresa que la superficie es desarrollable si $c_{uv}(u, v)$, $c_u(u, v)$, $c_v(u, v)$ están en un mismo plano para cada par de valores de los parámetros.

La condición (7) se puede desgranar aún más. Una superficie reglada es desarrollable si y sólo si para todo par de puntos homólogos, los generadores de las curvas y de la recta que los une están en un mismo plano.

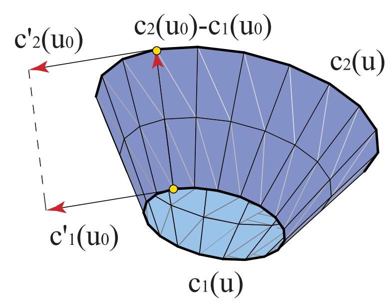

Figura 5: Superficie desarrollable

Esta condición, pese a su sencillez, es molesta para implementar en el diseño, ya que exige estar pendiente de ángulos y planos.

Otra manera de verlo: una superficie desarrollable es una superficie reglada con plano tangente común a lo largo de cada recta generatriz.

Ejemplos sencillos de superficies desarrollables, aparte del propio plano, son las superficies cilíndricas y cónicas.

Las **superficies cilíndricas** son las superficies regladas, o partes de ellas, en las que las curvas $c_1(u)$, $c_2(u)$ se obtienen una a partir de otra por medio

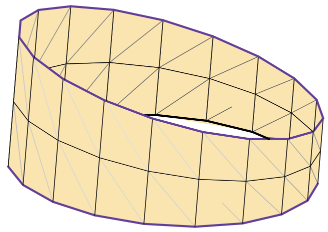

Figura 6: Superficie cilíndrica

de una traslación,

$$c_2(u) = c_1(u) + \mathbf{v}, \qquad c(u,v) = c_1(u) + v\mathbf{v}, \tag{8}$$

con lo cual $c_{1u}(u) \equiv c_{2u}(u)$ y la condición de coplanariedad (**??**) se satisface trivialmente.

A la vista de (8), las superficies cilíndricas se pueden interpretar como superficies traslacionales en las que la segunda curva es una recta, $d_1(v) = a + v\mathbf{v}$.

O, con mayor generalidad, las superficies cilíndricas son superficies regladas en las cuales todas las rectas generatrices son paralelas.

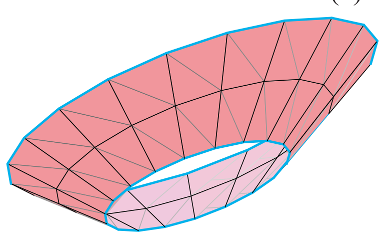

Figura 7: Superficie cónica

Las **superficies cónicas** se generan mediante el haz de rectas que une cada punto de una curva $c_1(u)$ con un punto fijo a, el vértice del cono,

$$c(u,v) = (1-v)c_1(u) + va. \tag{9}$$

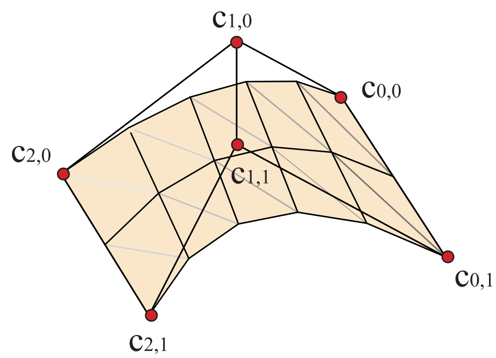

Figura 8: Superficie reglada no desarrollable

No es tan sencillo, pues, caracterizar las superficies desarrollables de bigrado $(1, n)$ en términos de su malla de control.