5. Superficies de Coons

Vídeo de Superficies regladas y de Coons

Supongamos que tenemos cuatro curvas parametrizadas, $c_1(u)$, $c_2(u)$, $d_1(v)$, $d_2(v)$, $u, v \in [0,1]$, que forman un cuadrilátero curvo, es decir,

$$\begin{aligned} c_1(0) &= a = d_1(0), & c_1(1) &= b = d_2(0), \\ c_2(0) &= c = d_1(1), & c_2(1) &= d = d_2(1), \end{aligned} \tag{10}$$

y queremos hallar una superficie, $c(u,v)$, que pase por las cuatro curvas,

$$\begin{aligned} c(u,0) &= c_1(u), & c(u,1) &= c_2(u), \\ c(0,v) &= d_1(v), & c(1,v) &= d_2(v). \end{aligned} \tag{11}$$

Al igual que en los problemas anteriores, existen infinitas superficies que satisfacen estas condiciones. Nos limitaremos a proporcionar una de las más sencillas.

Denotaremos por $c_c(u,v)$ la superficie reglada que se apoya en $c_1(u)$ y $c_2(u)$ y por $c_d(u,v)$, la que se apoya en $d_1(v)$ y $d_2(v)$,

$$c_c(u,v) = (1-v)c_1(u) + vc_2(u), \quad c_d(u,v) = (1-u)d_1(v) + ud_2(v). \tag{12}$$

Obviamente, cada una de estas superficies satisface la mitad de las condiciones (11), con los otros dos bordes rectos en lugar de curvos. Por tanto, si a la suma de las parametrizaciones regladas $c_c(u,v)$ y $c_d(u,v)$ le restamos otra reglada, un paraboloide hiperbólico, que interpole entre los bordes espúreos,

$$\begin{aligned} c_{cd}(u,v) &= (1-u)((1-v)a + vc) + u((1-v)b + vd) \\ &= (1-v)((1-u)a + ub) + v((1-u)c + ud), \end{aligned} \tag{13}$$

obtenemos una parametrización que es una solución de nuestro problema,

$$c(u,v) := c_c(u,v) + c_d(u,v) - c_{cd}(u,v), \qquad u, v \in [0,1]. \tag{14}$$

Estas superficies se denominan **superficies de Coons** y generalizan e incluyen las superficies regladas. Ejemplo.

Después de haber estudiado las superficies regladas, no es difícil describir las superficies polinómicas de Coons. Supongamos que $c_1(u)$, $c_2(u)$ son curvas

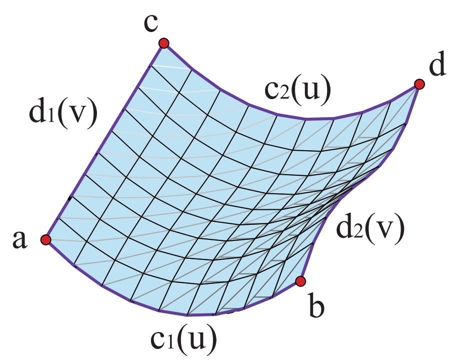

Figura 9: Superficie de Coons

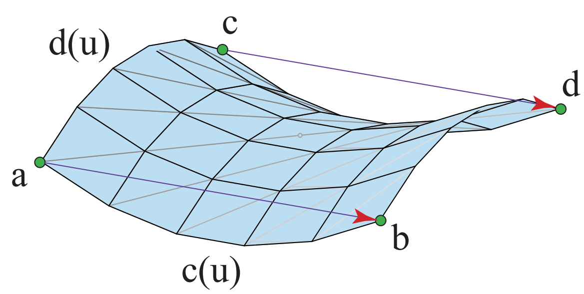

Figura 10: Las superficies traslacionales son superficies de Coons

de grado m y polígonos de control $\{c_{10},\dots,c_{1m}\}$, $\{c_{20},\dots,c_{2m}\}$, respectivamente. A su vez, $d_1(v)$, $d_2(v)$ son curvas de grado n y polígonos $\{d_{10},\dots,d_{1n}\}$, $\{d_{20},\dots,d_{2n}\}$.

Las superficies regladas $c_c(u,v)$, $c_d(u,v)$, $c_{cd}(u,v)$ son, respectivamente, de bigrado $(m,1)$, $(1,n)$, $(1,1)$ y conocemos sus mallas de control. Por tanto, para obtener la malla de la superficie de Coons, tendremos que elevar el bigrado de todas ellas hasta (m,n). Ejemplo. Así pues, los vértices de la malla de control de la superficie de Coons, $\{c_{0,0},\dots,c_{m,n}\}$, se podrán expresar como

$$c_{i,j} = c_{ci,j} + c_{di,j} - c_{cdi,j}, \tag{15}$$

en función de los vértices respectivos de las tres superficies. Ejemplo.

$$
\begin{aligned}
c_{ci,j} &= \frac{n-j}{n} c_{1i} + \frac{j}{n} c_{2i}, \\
c_{di,j} &= \frac{m-i}{m} d_{1j} + \frac{i}{m} d_{2j}, \\
c_{cdi,j} &= \frac{n-j}{n} \left(\frac{m-i}{m} a + \frac{i}{m} b \right) + \frac{j}{n} \left(\frac{m-i}{m} c + \frac{i}{m} d \right). \qquad (16)
\end{aligned}
$$

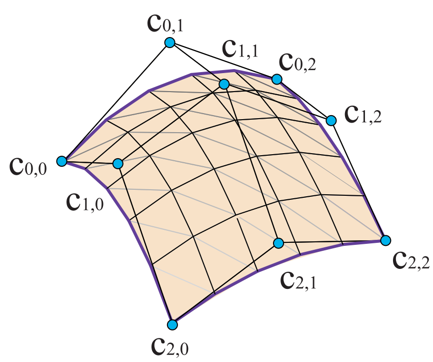

Figura 11: Superficie de Bézier de Coons

De igual modo podemos construir superficies de Coons B-spline, usando el algoritmo de inserción para que las tres superficies auxiliares tengan los mismos nudos. Primero elevaríamos el grado de las tres parametrizaciones hasta que todas alcancen el bigrado (m, n) y luego insertaríamos los nudos no comunes para que todas tengan las mismas sucesiones de nudos.

Las superficies de Coons racionales tampoco presentan especial problema, ya que hemos estudiado ya como construir superficies regladas a partir de curvas racionales. Sin embargo, no es trivial construir mallas de control y pesos para ellas.

Las superficies de Coons se pueden emplear para interpolar una malla de curvas en el espacio, de modo que cada cuadrilátero curvo defina una superficie de Coons. La superficie global así construida será continua, pero presenta problemas a la hora de garantizar su diferenciabilidad. Consideremos una única superficie de Coons. Si la queremos enlazar con otra superficie, por ejemplo, a lo largo de la curva correspondiente a $u = 1$, $d_2(v)$, tenemos que

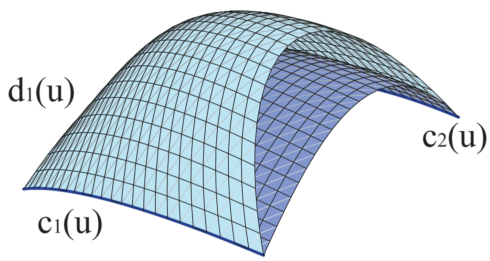

Figura 12: La superficie de Coons no se corresponde con la proyección de una superficie de Coons en $\mathbb{R}^4$

la derivada transversal a lo largo de dicho borde es

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial c(u,v)}{\partial u}\right|_{u=1} &= (1-v)m\Delta c_{1m-1} + vm\Delta c_{2m-1} + d_2(v) - d_1(v) \\ &+ (1-v)(b-a) + v(d-c). \end{aligned} \tag{17}$$

Por tanto, observamos un efecto no deseado. El valor de la derivada transversal en $u = 1$ depende de los valores en $u = 0$, es decir, de la curva opuesta del borde, $d_1(v)$, lo cual complica sobremanera el engarce diferenciable con una segunda superficie. Ejemplo.

Una solución sería utilizar los polinomios cúbicos $B_0^3(u)+B_1^3(u)$ y $B_2^3(u)+B_3^3(u)$ como funciones de interpolación o directamente utilizar los polinomios de Bernstein de grado tres. Esta última opción supone dar más datos sobre la superficie que las curvas de los bordes.