Curvas racionales

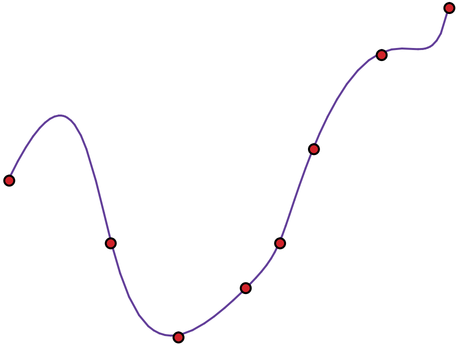
Leonardo Fernández Jambrina

Matemática Aplicada
E.T.S.I. Navales
Universidad Politécnica de Madrid
leonardo.fernandez@upm.es

21 de diciembre 2010

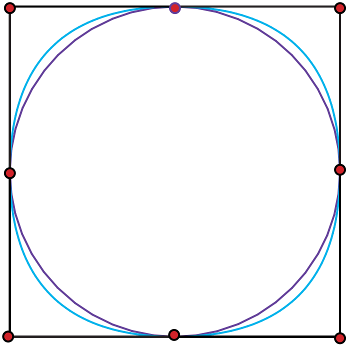
Máster universitario en Tecnologías y Sistemas de Comunicaciones

Problemas de las curvas polinómicas: rigidez



Las curvas polinómicas son demasiado rígidas. . .

Problemas de las curvas polinómicas: circunferencias



Las únicas curvas polinómicas de grado dos son las parábolas.
No podemos representar circunferencias, elipses…

Estructura del curso

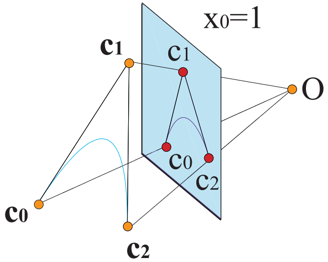
- Curvas polinómicas.
- Curvas racionales. 

- Curvas *spline*.
- Superficies de Bézier.
- Generación de superficies.

Esquema

Curvas proyectivas

- Consideremos una curva $\mathbf{c}(t) = (c_0(t), c_1(t), c_2(t))$ en $\mathbb{R}^3$.
- Se proyecta desde el origen sobre el plano $x_0 = 1$ con una parametrización $c(t) = (c_1(t)/c_0(t), c_2(t)/c_0(t))$.
- La coordenada $c_0(t)$ es el denominador y el resto, los numeradores de la curva racional, $x(t) = \frac{c_1(t)}{c_0(t)}$, $y(t) = \frac{c_2(t)}{c_0(t)}, \ldots$
- $\mathbf{c}(t)$ es polinómica de grado n, $c(t)$ es racional de grado n.



Curvas racionales de Bézier

- Construimos una curva vectorial polinómica $\mathbf{c}(t)$ en $\mathbb{R}^{p+1}$ de polígono $\{\mathbf{c}_0, \ldots, \mathbf{c}_n\}$.
- Separamos las coordenadas $\mathbf{c}_i = (w_i, w_i c_i)$.
- Llamamos **pesos** a los números $\{w_0, \ldots, w_n\}$, el "polígono" del denominador".
- Mientras que $\{w_0 c_0, \ldots, w_n c_n\}$, es el "polígono" del numerador".
- Y seguimos llamando **vértices** del **polígono de control** a los puntos $\{c_0, \ldots, c_n\}$.
- Porque al proyectar $\mathbb{R}^{p+1} \to \mathbb{R}^p$, el vértice $\mathbf{c}_i \to (1, c_i)$.

Resumiendo...

Una curva racional se describe por un polígono de control $\{c_0, \ldots, c_n\}$ en $\mathbb{R}^p$ y una lista de pesos $\{w_0, \ldots, w_n\}$

$$\mathbf{c}(t) = \left(\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t), \sum_{i=0}^{n} w_i c_i B_i^n(t) \right),$$

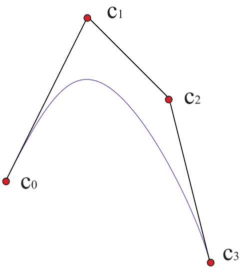
$$c(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i c_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)} = \sum_{i=0}^{n} c_i P_i^w(t) \qquad \text{con } P_i^w(t) = \frac{w_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)}.$$

- Partición de la unidad: $\sum_{i=0}^{n} P_i^w(t) \equiv 1$ con $P_i^w(1) \geq 0$ si $w_i > 0$.
- Extremos: $P_i^w(0) = \delta_i^0, \quad P_i^w(t) = \delta_i^n$.

Resumiendo. . .

Una curva racional se describe por un polígono de control $\{c_0, \ldots, c_n\}$ en $\mathbb{R}^p$ y una lista de pesos $\{w_0, \ldots, w_n\}$

$$c(t) = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} w_i c_i B_i^n(t)}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)} = \sum_{i=0}^{n} c_i P_i^w(t) \qquad \text{con } P_i^w(t) = \frac{w_i B_i^n(t)}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)}.$$



Pesos

- En principio, hemos añadido $n+1$ grados de libertad a la curva: los pesos.
- Pero una curva de pesos $\{w_0, \ldots, w_n\}$ es la misma con pesos $\{\lambda w_0, \ldots, \lambda w_n\}$.
- Podemos usarlo para normalizar $w_0 = 1$, tomando $\lambda = 1/w_0$.
- Nos quedan n grados de libertad adicionales.
- Si todos los pesos son iguales, $w = w_i$, $i = 0, \ldots, n$, el denominador desaparece: $c(t) = \dfrac{w}{w}\sum_{i=0}^{n} c_i B_i^n(t)$.

Interpretación

- Interpretación: w_K es un parámetro de *tensión* del vértice c_K:

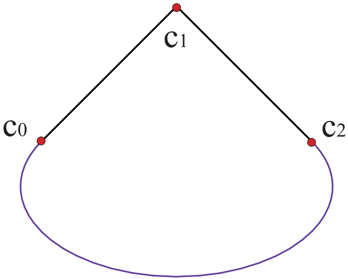
$$c_K = \lim_{w_K \to \infty} c(t).$$

(fig306.mov)

- Pero no vale para acercar la curva a varios vértices, porque se cancelan los efectos.

Positividad

- Los pesos se toman positivos para que las funciones $P_i^w(1) \geq 0$.



- De hecho, lo usual es tomarlos del orden de la unidad.

Propiedades antiguas

Se mantienen las buenas propiedades de las curvas polinómicas:

- Extremos: $c_0 = c(0), \quad c_n = c(1)$.
- Invariancia bajo transformaciones afines: transformando una curva $c(t)$ de polígono $\{c_0, \dots c_n\}$ bajo una f afín, la curva $f(c(t))$ tiene polígono $\{f(c_0), \dots f(c_n)\}$. Los pesos no cambian.
- Envolvente convexa: la curva está contenida en el menor polígono convexo generado por $\{c_0, \dots, c_n\}$.
- Disminución de la variación.
- Control (cuasi)-local: moviendo un vértice se mueve la parte más próxima de la curva.

Nuevas propiedades I

- **Invariancia bajo transformaciones proyectivas:** transformando una curva $c(t)$ de polígono vectorial $\{\mathbf{c}_0, \ldots \mathbf{c}_n\}$, $\mathbf{c}_i = (w_i, w_i c_i)$, bajo una f proyectiva, la curva $f(c(t))$ tiene polígono vectorial $\{f(\mathbf{c}_0), \ldots f(\mathbf{c}_n)\}$. Se mezclan pesos y vértices.

(fig323.mov)

Nuevas propiedades II

- **Reparametrizaciones de Möbius:** mediante el cambio

$$t(u) = \frac{u}{(1-b)u + b}$$

  transformamos el intervalo $t \in [0,1]$ en $u \in [0,1]$ y la curva racional sigue siendo racional del mismo grado.
- La gráfica de la curva es la misma, pero no la parametrización.
- Los pesos cambian a $\{b^n w_0, \ldots, b^{n-i} w_i, \ldots, w_n\}$, con el mismo polígono de control, $\{c_0, \ldots, c_n\}$.
- Si tomamos $b = (w_n/w_0)^{1/n}$, conseguimos que los pesos primero y último sean iguales, $\tilde{w}_0 = w_n = \tilde{w}_n$.
- Podemos fijar los pesos inicial y final de la curva y tomarlos iguales a la unidad, $w_0 = 1 = w_n$.
- Por tanto, nos quedamos con $n-1$ grados de libertad tan sólo.

Nuevas propiedades III

- **Elevación del grado:** Para elevar el grado de una curva polinómica, multiplicábamos por $1 = (1-t) + t$.
- En el caso de curvas racionales, multiplicamos numerador y denominador por un mismo polinomio $f(t)$ de grado uno,

$$c(t) = \frac{p(t)}{w(t)} = \frac{p(t)f(t)}{w(t)f(t)}, \qquad f(t) = \alpha(1-t) + \beta t.$$

- Se traduce en nuevos pesos y vértices,

$$\begin{aligned} w_i^1 &= \alpha\frac{n+1-i}{n+1}w_i + \beta\frac{i}{n+1}w_{i-1}, \\ w_i^1 c_i^1 &= \alpha\frac{n+1-i}{n+1}w_i c_i + \beta\frac{i}{n+1}w_{i-1}c_{i-1}. \end{aligned}$$

- Supone infinitas maneras de elevar el grado de una curva.
- Tomando $\alpha = \beta$, recuperamos la elevación del grado polinómica.
- Si $\beta \ll \alpha$, el polígono bascula hacia $\{c_0, \ldots, c_n, c_n\}$.

Nuevas propiedades III

- **Elevación del grado:** Para elevar el grado de una curva polinómica, multiplicábamos por $1 = (1 - t) + t$.
- En el caso de curvas racionales, multiplicamos numerador y denominador por un mismo polinomio $f(t)$ de grado uno,

$$c(t) = \frac{p(t)}{w(t)} = \frac{p(t)f(t)}{w(t)f(t)}, \qquad f(t) = \alpha(1 - t) + \beta t.$$

- Supone infinitas maneras de elevar el grado de una curva.
- Tomando $\alpha = \beta$, recuperamos la elevación del grado polinómica.

(fig318.mov)

Cónicas

- Las cónicas son curvas racionales de grado dos. Normalizando $w_0 = 1 = w_2$, $w_1 = w$, la parametrización queda

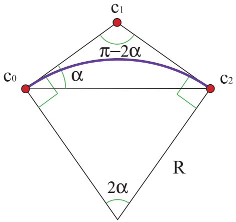
$$c(t) = \frac{(1-t)^2 c_0 + 2wt(1-t)c_1 + t^2 c_2}{(1-t)^2 + 2wt(1-t) + t^2}.$$

- Contando los ceros del denominador (puntos del infinito):
  - Elipse: $0 < w < 1$.
  - Parábola: $w = 1$.
  - Hipérbola: $w > 1$.

(fig313.mov)

Circunferencias

- Podemos trazar arcos de circunferencia de apertura 2α,



- Con centro $(0,0)$, los extremos $c_0 = (-R\sin\alpha, R\cos\alpha)$, $c_2 = (R\sin\alpha, R\cos\alpha)$, $c_1 = (0, R/\cos\alpha)$.
- Los pesos son $w_0 = 1 = w_2, \qquad w_1 = \cos\alpha$.
- Para un cuadrante $w_1 = \sqrt{2}/2$ y para un arco de $2\pi/3$, $w_1 = 1/2$.
- Sólo podemos trazar ángulos menores que π.

Circunferencias

- Podemos trazar arcos de circunferencia de apertura 2α,

(fig209.mov)

- Con centro $(0,0)$, los extremos $c_0 = (-R\sin\alpha, R\cos\alpha)$, $c_2 = (R\sin\alpha, R\cos\alpha)$, $c_1 = (0, R/\cos\alpha)$.
- Los pesos son $w_0 = 1 = w_2$, $\quad w_1 = \cos\alpha$.
- Para un cuadrante $w_1 = \sqrt{2}/2$ y para un arco de $2\pi/3$, $w_1 = 1/2$.
- Sólo podemos trazar ángulos menores que π.

- El algoritmo de De Casteljau se aplica sin problemas a la curva vectorial $\mathbf{c}(t) = (w(t), w(t)c(t))$.

$$
\begin{aligned}
w_i^{r)}(t) &= (1-t)w_i^{r-1)}(t) + tw_{i+1}^{r-1)}(t), && (1)\\
c_i^{r)}(t) &= (1-t)\frac{w_i^{r-1)}(t)}{w_i^{r)}(t)}c_i^{r-1)}(t) + t\frac{w_{i+1}^{r-1)}}{w_i^{r)}(t)}c_{i+1}^{r-1)}(t), && (2)\\
i &= 0, \ldots, n-r, \quad r = 1, \ldots, n, && (3)
\end{aligned}
$$

donde $w_i^{0)} = w_i, \quad c_i^{0)} = c_i, \quad c_0^{n)}(t) = c(t)$.

Derivación

- Para una curva racional $c(t) = \frac{p(t)}{w(t)}$ de polígono $\{c_0, \ldots, c_n\}$ y pesos $\{w_0, \ldots, w_n\}$ las expresiones de las derivadas son complicadas,

$$c'(t) = \frac{p'(t)}{w(t)} - \frac{w'(t)}{w(t)} c(t),$$

$$c^{r)}(t) \quad = \quad \frac{p^{r)}(t)}{w(t)} - \frac{1}{w(t)} \sum_{i=1}^{r} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) w^{i)}(t) c^{r-i)}(t).$$

- Salvo en los extremos,

$$c'(0) = n \frac{w_1}{w_0} \Delta c_0, \qquad c'(1) = n \frac{w_{n-1}}{w_n} \Delta c_{n-1}.$$

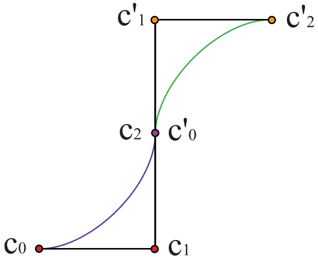
- La novedad es la dependencia en los pesos.

(fig320.mov)

Para conseguir una curva compuesta con tangente continua, basta con que los lados adyacentes a la unión sean paralelos, aunque los vectores tangentes sean sólo proporcionales.

Uniones de curvas

Tenemos dos curvas y sus polígonos, $\{c_0, \ldots, c_n\}$, $\{\tilde{c}_0, \ldots, \tilde{c}_n\}$, y pesos, $\{w_0, \ldots, w_n\}$, $\{\tilde{w}_0, \ldots, \tilde{w}_n\}$ en intervalos $[u_0, u_1]$, $[u_1, u_2]$.



- Si queremos que la unión sea continua, $c_n = \tilde{c}_0$. Imponemos $w_n = \tilde{w}_0$.
- Si queremos que sea C^1,

$$w_{n-1} \frac{\Delta c_{n-1}}{\Delta u_0} = \tilde{w}_1 \frac{\Delta \tilde{c}_0}{\Delta u_1}.$$

Problemas con derivadas superiores

- A partir de la segunda derivada, las cosas se complican,

$$c^{r)}(0) = \frac{n!}{(n-r)!}\frac{\Delta^r(w_0c_0)}{w_0} - \frac{1}{w_0}\sum_{i=1}^{r}\left(\begin{array}{c} r \\ i \end{array}\right)\frac{n!}{(n-i)!}\Delta^i w_0 c^{r-i)}(0),$$

- No podemos separar las diferencias de los vértices y de los pesos.
- Como muestra,

$$c''(0) = \frac{n(n-1)\left((\Delta^2(w_0c_0) - \Delta^2 w_0 c_0\right) - 2n^2\Delta w_0 w_1 \Delta c_0/w_0}{w_0},$$

donde ni siquiera se puede factorizar el grado n.

- Para clase C^r imponemos que las derivadas de numerador y denominador hasta orden r sean continuas.

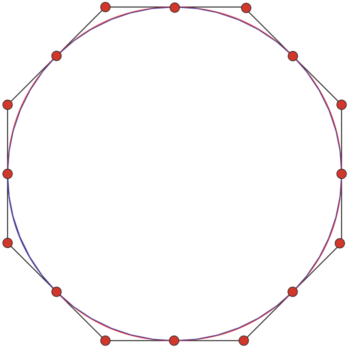
$$\frac{\Delta^s(w_{n-s}c_{n-s})}{(\Delta u_0)^s}=\frac{\Delta^s(\tilde{w}_0\tilde{c}_0)}{(\Delta u_1)^s},\quad \frac{\Delta^s w_{n-s}}{(\Delta u_0)^s}=\frac{\Delta^s\tilde{w}_0}{(\Delta u_1)^s},\quad s=0,\ldots,r\,.$$

- Es equivalente a imponer que la curva vectorial $\mathbf{c}(t)$ es de clase C^r en $\mathbb{R}^{p+1}$.

Duda existencial

- ¿Merece la pena introducir los pesos?
- Para una curva de grado n supone $n - 1$ grados de libertad adicionales (entre un 10% y un 25%).
- Introducen mucha libertad espúrea: elevación del grado, reparametrizaciones. . .
- Posibilidad de que la curva se vaya al infinito (denominadores).
- Pero permiten representar de manera exacta todas las cónicas.

¿NURBS o NUBS?



Aproximación a la circunferencia con ocho arcos parabólicos.