Modelado geométrico: Generación de superficies

Leonardo Fernández Jambrina

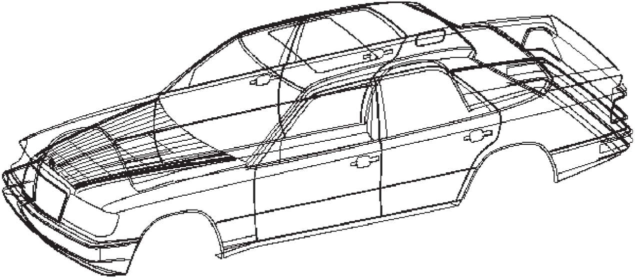
Matemática Aplicada
E.T.S.I. Navales
Universidad Politécnica de Madrid
leonardo.fernandez@upm.es

25 de enero 2010

Máster universitario en Tecnologías y Sistemas de Comunicaciones

De curvas a superficies

- Existen otros procedimientos para generar superficies, anteriores a las NURBS.
- Estos formalismos alternativos están basados en mallas de curvas (secciones del objeto).
- Interpolar sobre dicha malla para definir una superficie admisible del objeto.
- Nuestro objetivo es describir maneras sencillas de rellenar con una superficie el espacio entre varias curvas.



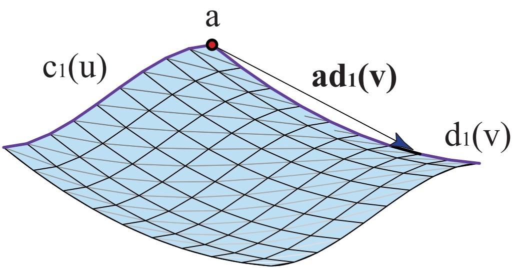
Estructura del curso

- Curvas polinómicas.
- Curvas racionales.
- Curvas *spline*.
- Superficies de Bézier.
- Generación de superficies. 

Esquema

Superficies traslacionales

- Datos: $c_1(u)$, $d_1(v)$, $u, v \in [0,1]$, tales que $c_1(0) = a = d_1(0)$.
- Interpolar una superficie $c(u,v)$ tal que $c(0,v) = d_1(v)$, $c(u,0) = c_1(u)$.
- Superficie traslacional: $c(u,v) = c_1(u) + d_1(v) - a \left(\frac{\partial^2 c(u,v)}{\partial u \partial v} \equiv 0 \right)$.
- Deslizar $c_1(u)$ paralelamente a sí misma a lo largo de $d_1(v)$.



Superficies traslacionales

- Datos: $c_1(u)$, $d_1(v)$, $u, v \in [0,1]$, tales que $c_1(0) = a = d_1(0)$.
- Interpolar una superficie $c(u,v)$ tal que $c(0,v) = d_1(v)$, $c(u,0) = c_1(u)$.
- Superficie traslacional: $c(u,v) = c_1(u) + d_1(v) - a \left(\frac{\partial^2 c(u,v)}{\partial u \partial v} \equiv 0\right)$.
- Deslizar $c_1(u)$ paralelamente a sí misma a lo largo de $d_1(v)$.

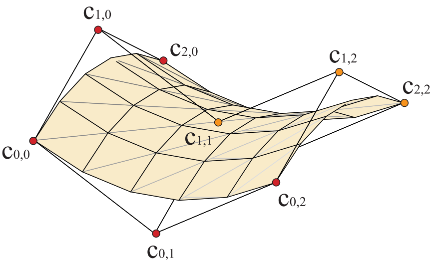
(fig601.mov)

Superficies traslacionales de Bézier

- $c_1(u)$, $d_1(v)$ curvas de grados m y n y polígonos $\{c_{10}, \ldots, c_{1m}\}$, $\{d_{10}, \ldots, d_{1n}\}$ y punto de corte $c_{10} = a = d_{10}$.
- Nos proporcionan una columna y una fila del borde de la malla de control.
- El resto de vértices se infieren de la condición de *twist* nulo,

$$c_{i+1,j+1} = c_{i+1,j} + c_{i,j+1} - c_{i,j} \Rightarrow c_{i,j} = c_{1i} + d_{1j} - a.$$

- Expresión válida también para el caso *spline*.
- En el caso racional $w_{i,j} = w_{1i}\omega_{1j}$, $c_{i,j} = c_{1i} + d_{1j} - a$.



Superficies traslacionales de Bézier

- $c_1(u)$, $d_1(v)$ curvas de grados m y n y polígonos $\{c_{10}, \ldots, c_{1m}\}$, $\{d_{10}, \ldots, d_{1n}\}$ y punto de corte $c_{10} = a = d_{10}$.
- Nos proporcionan una columna y una fila del borde de la malla de control.
- El resto de vértices se infieren de la condición de *twist* nulo,

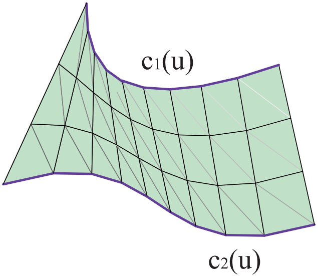
$$c_{i+1,j+1} = c_{i+1,j} + c_{i,j+1} - c_{i,j} \Rightarrow c_{i,j} = c_{1i} + d_{1j} - a.$$

- Expresión válida también para el caso *spline*.
- En el caso racional $w_{i,j} = w_{1i}\omega_{1j}$, $c_{i,j} = c_{1i} + d_{1j} - a$.

(fig602.mov)

Superficies regladas

- Datos: $c_1(u)$, $c_2(u)$, $u \in [0,1]$.
- Interpolar una superficie $c(u,v)$ tal que $c(u,0) = c_1(u)$, $c(u,1) = c_2(u)$.
- Superficie reglada: $c(u,v) = (1-v)c_1(u) + vc_2(u)$, $u, v \in [0,1]$.
- Unir con rectas los puntos de igual parámetro u.



Superficies regladas

- Datos: $c_1(u)$, $c_2(u)$, $u \in [0, 1]$.
- Interpolar una superficie $c(u, v)$ tal que $c(u, 0) = c_1(u)$, $c(u, 1) = c_2(u)$.
- Superficie reglada: $c(u, v) = (1 - v)c_1(u) + vc_2(u)$, $u, v \in [0, 1]$.
- Unir con rectas los puntos de igual parámetro u.

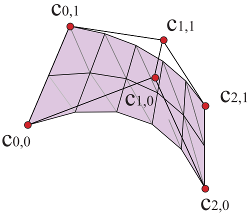
(fig604.mov)

Superficies regladas de Bézier

- $c_1(u)$, $c_2(u)$ son curvas de grado m y polígonos de $\{c_{10}, \ldots, c_{1m}\}$, $\{c_{20}, \ldots, c_{2m}\}$ (y pesos $\{w_{10}, \ldots, w_{1m}\}$, $\{w_{20}, \ldots, w_{2m}\}$).
- La superficie reglada será de bigrado $(m, 1)$.
- La malla de control y la matriz de pesos están formadas por las dos columnas del borde,

$$\left\{ \begin{array}{cc} c_{10} & c_{20} \\ \vdots & \vdots \\ c_{1m} & c_{1m} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{cc} w_{10} & w_{20} \\ \vdots & \vdots \\ w_{1m} & w_{1m} \end{array} \right\}.$$

- Expresión válida también para el caso *spline*.



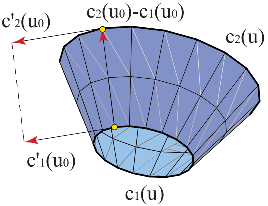
- Superficies (regladas) de curvatura gaussiana cero (intrínsicamente planas)
- Se generan doblando, enrollando y cortando, pero no curvando, superficies planas.
- De gran interés en la industria del acero y textil.
- Pero difíciles de incluir en el Diseño Geométrico (condición no lineal).

Superficies desarrollables

- Las superficies desarrollables son un caso de regladas de curvatura gaussiana nula,

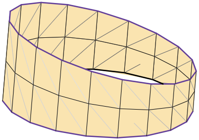
$$d'(u) \cdot c'(u) \times \left(d(u) - c(u)\right) = 0.$$

- O lo que es lo mismo, los vectores $\mathbf{w}(u) = d(u) - c(u)$, $c'(u)$, $d'(u)$ son coplanarios.
- Y el plano tangente es el mismo para todos los puntos de cada generatriz recta.

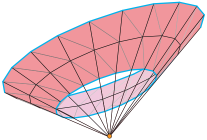


Clasificación de las superficies desarrollables

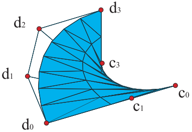
- Superficies cilíndricas: generatrices paralelas



- Superficies cónicas: generatrices con punto común, el vértice.



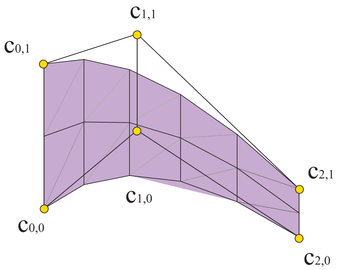
- Superficies tangentes: las generatrices son las rectas tangentes a una curva (arista de retroceso).



- Las **superficies cilíndricas** son regladas en las que las curvas $c_2(u)$ se obtiene a partir de $c_2(u)$ por traslación,

$$c_2(u) = c_1(u) + \mathbf{v}, \qquad c(u,v) = c_1(u) + v\mathbf{v},$$

- Son superficies traslacionales en las que la segunda curva es una recta, $d_1(v) = a + v\mathbf{v}$.
- Las superficies cilíndricas son superficies regladas en las que las generatrices son paralelas.

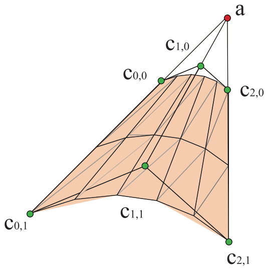


Superficies cónicas

- Las **superficies cónicas** se generan mediante el haz de rectas que une cada punto de $c_1(u)$ con un punto a, vértice del cono,

$$c(u,v) = (1-v)c_1(u) + va.$$

- O sea, si $v \in [0,1]$, la curva $c_2(u)$ ha degenerado en el punto a.



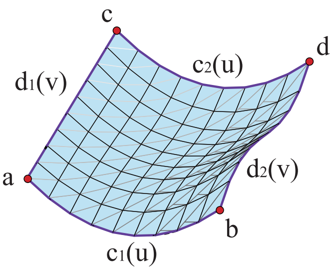
Superficies de Coons

- Datos: $c_1(u)$, $c_2(u)$, $d_1(v)$, $d_2(v)$, $u, v \in [0,1]$, que forman un cuadrilátero curvo.

$$c_1(0) = a = d_1(0), \quad c_1(1) = b = d_2(0),$$
$$c_2(0) = c = d_1(1), \quad c_2(1) = d = d_2(1).$$

- Interpolar una superficie $c(u,v)$ tal que

$$c(u,0) = c_1(u), \quad c(u,1) = c_2(u),$$
$$c(0,v) = d_1(v), \quad c(1,v) = d_2(v).$$



Superficies de Coons

- Datos: $c_1(u)$, $c_2(u)$, $d_1(v)$, $d_2(v)$, $u, v \in [0, 1]$, que forman un cuadrilátero curvo.
- Denotaremos por $c_c(u, v)$ la reglada que se apoya en $c_1(u)$ y $c_2(u)$ y por $c_d(u, v)$, la que se apoya en $d_1(v)$ y $d_2(v)$,

$$c_c(u,v) = (1-v)c_1(u)+vc_2(u), \quad c_d(u,v) = (1-u)d_1(v)+ud_2(v).$$

- Y un paraboloide hiperbólico que interpola los vértices,

$$c_{cd}(u,v) = (1-v)\big((1-u)a+ub\big)+v\big((1-u)c+ud\big).$$

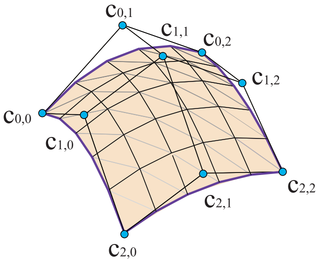
- Superficie de Coons: $c(u,v) = c_c(u,v) + c_d(u,v) - c_{cd}(u,v)$.

(fig601.mov)

Superficies de Coons de Bézier

- Las superficies regladas y traslacionales son superficies de Coons.
- $c_1(u)$, $c_2(u)$ de grado m, polígonos $\{c_{10},\ldots,c_{1m}\}$, $\{c_{20},\ldots,c_{2m}\}$,
- $d_1(v)$, $d_2(v)$ de grado n, polígonos $\{d_{10},\ldots,d_{1n}\}$, $\{d_{20},\ldots,d_{2n}\}$.
- Hay que elevar el bigrado de $c_c(u,v)$, $c_d(u,v)$, $c_{cd}(u,v)$ a (m,n),

$$
\begin{aligned}
c_{c\,i,j} &= \frac{n-j}{n}c_{1i}+\frac{j}{n}c_{2i}, \quad c_{d\,i,j}=\frac{m-i}{m}d_{1j}+\frac{i}{m}d_{2j},\\
c_{cd\,i,j} &= \frac{n-j}{n}\left(\frac{m-i}{m}a+\frac{i}{m}b\right)+\frac{j}{n}\left(\frac{m-i}{m}c+\frac{i}{m}d\right).
\end{aligned}
$$



- Las superficies regladas y traslacionales son superficies de Coons.
- $c_1(u)$, $c_2(u)$ de grado m, polígonos $\{c_{10}, \ldots, c_{1m}\}$, $\{c_{20}, \ldots, c_{2m}\}$,
- $d_1(v)$, $d_2(v)$ de grado n, polígonos $\{d_{10}, \ldots, d_{1n}\}$, $\{d_{20}, \ldots, d_{2n}\}$.
- Hay que elevar el bigrado de $c_c(u,v)$, $c_d(u,v)$, $c_{cd}(u,v)$ a (m,n),

$$
\begin{aligned}
c_{c\,i,j} &= \frac{n-j}{n}c_{1i} + \frac{j}{n}c_{2i}, \quad c_{d\,i,j} = \frac{m-i}{m}d_{1j} + \frac{i}{m}d_{2j}, \\
c_{cd\,i,j} &= \frac{n-j}{n}\left(\frac{m-i}{m}a + \frac{i}{m}b\right) + \frac{j}{n}\left(\frac{m-i}{m}c + \frac{i}{m}d\right).
\end{aligned}
$$

(fig601.mov)

Superficies de revolución

- Las **superficies de revolución** se generan rotando una curva plana en torno a un eje contenido en dicho plano.
- Si la curva está contenida en XZ, $c_1(u) = (f(u), 0, g(u))$, una parametrización de la superficie obtenida al girar en torno a Z es

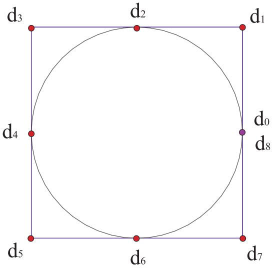
$$c(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)), \quad v \in [0, 2\pi].$$

- Las líneas de parámetro v constante, copias rotadas de la curva original, son los meridianos.
- Las líneas de u constante, circunferencias descritas al girar los puntos de la curva, son los paralelos, de radio $|f(u)|$.

(fig616.mov)

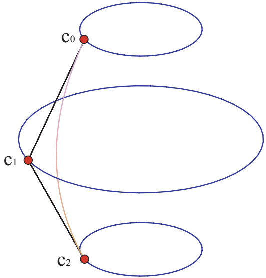
Circunferencias B-*spline*

- Sabemos cómo trazar circunferencias B-*spline*.
- Una circunferencia de 4 tramos tiene polígono $\{(R,0),(R,R),(0,R),(-R,R),(-R,0),(-R,-R),(0,-R),(R,-R),(R,0)\}$, pesos $\{1,1/\sqrt{2},1,1/\sqrt{2},1,1/\sqrt{2},1,1/\sqrt{2},1\}$ y nudos $[0,0,1,1,2,2,3,3,4,4]$.
- Sirven para trazar los paralelos de las superficies de revolución.



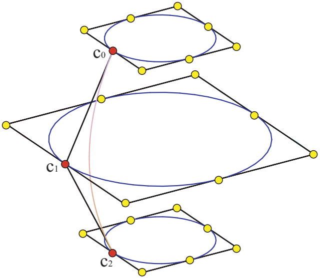
Superficies de Bézier de revolución

- Curva plana en XZ de polígono $\{c_0, \dots, c_n\}$ y pesos $\{w_0, \dots, w_n\}$.
- Si la curva es *spline*, tendrá una lista de nudos $\{u_0, \dots, u_{K'}\}$.
- Son la columna 0 de la malla y de la matriz de pesos.
- Trazamos las circunferencias descritas por c_i al rotar en torno a Z.



Superficies de Bézier de revolución

- Curva plana en XZ de polígono $\{c_0, \ldots, c_n\}$ y pesos $\{w_0, \ldots, w_n\}$.
- Si la curva es *spline*, tendrá una lista de nudos $\{u_0, \ldots, u_{K'}\}$.
- Son la columna 0 de la malla y de la matriz de pesos.
- Trazamos las circunferencias descritas por c_i al rotar en torno a Z.
- Cada circunferencia i tiene su polígono $\{c_{ij}, j = 0, \ldots, L\}$ y los mismos pesos $\{\omega_0, \ldots, \omega_L\}$ y los mismos nudos $\{v_0, \ldots, v_K\}$.
- Es la fila i-ésima de la malla de control.
- La fila i-ésima de pesos es $\{w_i\omega_0, \ldots, w_i\omega_L\}$.



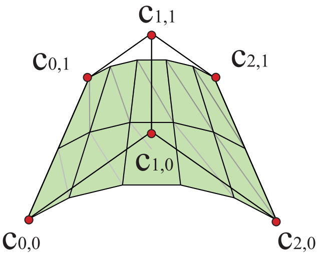
Superficies de Bézier de revolución

- Curva plana en XZ de polígono $\{c_0, \ldots, c_n\}$ y pesos $\{w_0, \ldots, w_n\}$.
- Si la curva es *spline*, tendrá una lista de nudos $\{u_0, \ldots, u_{K'}\}$.
- Son la columna 0 de la malla y de la matriz de pesos.
- Trazamos las circunferencias descritas por c_i al rotar en torno a Z.
- Cada circunferencia i tiene su polígono $\{c_{ij}, j = 0, \ldots, L\}$ y los mismos pesos $\{\omega_0, \ldots, \omega_L\}$ y los mismos nudos $\{v_0, \ldots, v_K\}$.
- Es la fila i-ésima de la malla de control.
- La fila i-ésima de pesos es $\{w_i\omega_0, \ldots, w_i\omega_L\}$.
- La superficie está descrita por la malla $\{c_{ij},\ i = 0, \ldots, n,\ j = 0, \ldots, L\}$, los pesos $\{w_i\omega_j,\ i = 0, \ldots, n,\ j = 0, \ldots, L\}$ y los nudos $\{v_0, \ldots, v_K\}$ (y los nudos $\{u_0, \ldots, u_{K'}\}$ si la curva es *spline*).

Cuadrante de tronco de cono

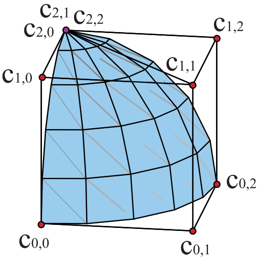
- Un segmento en XZ tiene polígono formado por dos vértices, $\{c_0 = (a, 0, b), c_1 = (c, 0, d)\}$.
- Un cuadrante de circunferencia horizontal tiene polígono $\{(r, 0, h), (r, r, h), (0, r, h)\}$ y pesos $\{1, 1/\sqrt{2}, 1\}$.
- La malla y los pesos son

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (a,0,b) & (a,a,b) & (0,a,b) \\ (c,0,d) & (c,c,d) & (0,c,d) \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \sqrt{2}/2 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}/2 & 1 \end{array} \right\}.$$



- Un cuadrante de circunferencia en XZ tiene polígono de control $\{(R,0,0),(R,0,R),(0,0,R)\}$ y pesos $\{1,\sqrt{2}/2,1\}$
- Un cuadrante de circunferencia horizontal tiene polígono $\{(r,0,h),(r,r,h),(0,r,h)\}$ y pesos $\{1,1/\sqrt{2},1\}$.
- La malla y los pesos son

$$\left\{\begin{array}{ccc}(R,0,0) & (R,R,0) & (0,R,0)\\ (R,0,R) & (R,R,R) & (0,R,R)\\ (0,0,R) & (0,0,R) & (0,0,R)\end{array}\right\},\ \left\{\begin{array}{ccc}1 & \sqrt{2}/2 & 1\\ \sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2\\ 1 & \sqrt{2}/2 & 1\end{array}\right\}.$$



Semiesfera

- La malla y los pesos son

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
(R,0,0) & (R,R,0) & (0,R,0) & (-R,R,0) & (-R,0,0) & (-R,-R,0) & (0,-R,0) & (R,-R,0) & (R,0,0) \\
(R,0,R) & (R,R,R) & (0,R,R) & (-R,R,R) & (-R,0,R) & (-R,-R,R) & (0,-R,R) & (R,-R,R) & (R,0,R) \\
(0,0,R) & (0,0,R) & (0,0,R) & (0,0,R) & (0,0,R) & (0,0,R) & (0,0,R) & (0,0,R) & (0,0,R)
\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1 \\
\sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\
1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1
\end{array}\right\}.$$

- Los nudos para las columnas son $[0,0,1,1]$.
- Los nudos para las filas son $[0,0,1,1,2,2,3,3,4,4]$.