

Tema 5: Superficies

Leonardo Fernández Jambrina
E.T.S.I. Navales, Universidad Politécnica de Madrid
Avenida de la Memoria 4
E-28040-Madrid, España
Correo-e: leonardo.fernandez@upm.es

1. Introducción

[Vídeo de Superficies](#)

El diseño de superficies debería ser, en principio, más complejo que el diseño de curvas que hemos estudiado hasta el momento. Sin embargo, muchas de las herramientas y algoritmos que hemos desarrollado para las curvas nos van a seguir siendo útiles para las superficies, lo cual no quita para que estas posean sus especificidades.

Pensemos por ejemplo en una curva polinómica espacial de polígono de control $\{c_0, \dots, c_m\}$, $c_i \in \mathbb{A}^3$. Su representación nos es ya conocida,

$$c(u) = \sum_{i=0}^m c_i B_i^m(u).$$

Si permitimos que los vértices del polígono de control se muevan a su vez a lo largo de curvas parametrizadas, $c_i(v)$,

$$c(u, v) = \sum_{i=0}^m c_i(v) B_i^m(u),$$

las curvas de Bézier $c(u, v_0)$, de polígonos $\{c_0(v_0), \dots, c_m(v_0)\}$, evolucionan en el espacio describiendo una superficie parametrizada $c(u, v)$. [Ejemplo](#)

Este va a ser el enfoque que vamos a seguir en este tema para introducir las superficies de Bézier, aunque, como parece lógico, esta construcción es

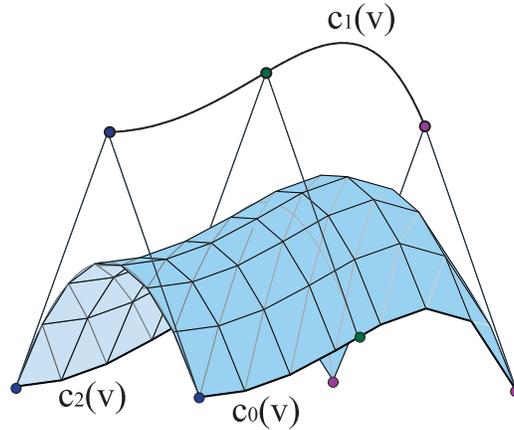


Figura 1: Variando el polígono de una curva generamos una superficie

análoga para superficies racionales o polinómicas a trozos. Por ello, por sencillez, nos centraremos en las primeras, indicando tan sólo las especificidades de las demás.

2. Superficies de Bézier

Vídeo de Superficies de Bézier

Como parece natural, no nos va a interesar que los vértices evolucionen a lo largo de curvas arbitrarias $c_i(v)$, sino según curvas cuya modelización sea sencilla. La propuesta más obvia es que sean a su vez curvas de Bézier de grado n , con polígonos de control respectivos $\{c_{i,0}, \dots, c_{i,n}\}$. De este modo, la parametrización de la superficie resultante,

$$\begin{aligned}
 c(u, v) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v), \quad u, v \in [0, 1], \\
 &= \begin{pmatrix} B_0^m(u) & \cdots & B_m^m(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{0,0} & \cdots & c_{0,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m,0} & \cdots & c_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0^n(v) \\ \vdots \\ B_n^n(v) \end{pmatrix}, \quad (1)
 \end{aligned}$$

será una superficie de bigrado (m, n) y estará descrita por una **mall**a de **control** de $(m + 1)(n + 1)$ vértices, $\{c_{0,0}, \dots, c_{m,n}\}$. [Ejemplo](#).

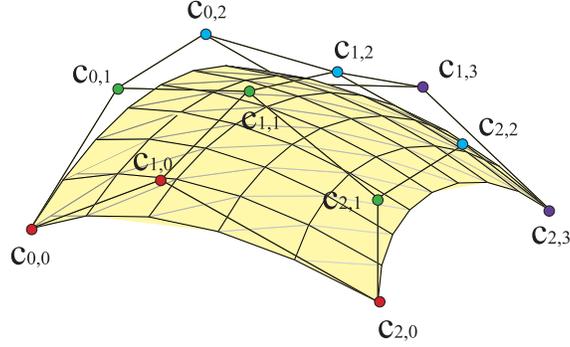


Figura 2: Superficie de bigrado (2, 3)

De este modo, logramos cierta simetría en la representación, ya que las curvas de parámetro u constante,

$$c(u_0, v) = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^m c_{i,j} B_i^m(u_0) \right) B_j^n(v), \quad v \in [0, 1],$$

son curvas de Bézier de grado n y polígono de vértices $c_j = (\sum_i c_{i,j} B_i^m(u_0))$. Mientras que las curvas de parámetro v constante,

$$c(u, v_0) = \sum_{i=0}^m \left(\sum_{j=0}^n c_{i,j} B_j^n(v_0) \right) B_i^m(u), \quad u \in [0, 1],$$

son curvas de grado m y vértices $c_i = (\sum_j c_{i,j} B_j^n(v_0))$. **Ejemplo.**

Por tanto, nuestra superficie es una malla formada por curvas de grado m y n .

Por ejemplo, para una malla de bigrado (2, 3) formada por los puntos

$$\begin{aligned} &\{(0, 0, -1), (1, 0, 4), (2, 0, 3), (3, 0, -3); \\ &(0, 2, 2), (1, 2, 5), (2, 2, 6), (3, 2, 3); \\ &(0, 4, -2), (1, 4, 4), (2, 4, 3), (2, 4, -3)\}, \end{aligned}$$

la parametrización de la superficie correspondiente es

$$c(u, v) = (B_0^2(u), B_1^2(u), B^2(u)) \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0^3(v) \\ B_1^3(v) \\ B_2^3(v) \\ B_3^3(v) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-v)^3 ((0,0,-1)(1-u)^2 + (0,2,2)2u(1-u) + (0,4,-2)u^2) \\
&+ 3v(1-v)^2 ((1,0,4)(1-u)^2 + (1,2,5)2u(1-u) + (1,4,4)u^2) \\
&+ 3v^2(1-v) ((2,0,3)(1-u)^2 + (2,2,6)2u(1-u) + (2,4,3)u^2) \\
&+ v^3 ((3,0,-3)(1-u)^2 + (3,2,3)2u(1-u) + (2,4,-3)u^2) \\
&= (-u^2v^3 + 3v, 4u, 7u^2v^3 - 6uv^3 + v^3 - 27u^2v^2 + 24uv^2 \\
&- 18v^2 + 15u^2v - 12uv + 15v - 7u^2 + 6u - 1), \quad u, v \in [0, 1].
\end{aligned}$$

Las $(m+1)(n+1)$ funciones que estamos empleando en estas parametrizaciones son el producto de las bases de los polinomios de grado m en la variable u y de grado n en la variable v , $\{B_0^m(u)B_0^n(v), \dots, B_m^m(u)B_n^n(v)\}$, que forman base del espacio de polinomios de bigrado (m, n) en las variables (u, v) . Como este espacio es producto de los espacios anteriores de polinomios,

$$\mathbb{R}_{m,n}[u, v] = \mathbb{R}_m[u]\mathbb{R}_n[v], \quad (2)$$

a estas superficies se las denomina a veces **superficies producto tensorial de bigrado** (m, n) .

Al igual que sucedía con las curvas no paramétricas, nuestro formalismo permite representar gráficas de funciones polinómicas de dos variables, $f(u, v)$, ya que las podemos parametrizar como $c(u, v) = (u, v, f(u, v))$. **Ejemplo.** En el tema segundo estudiamos como expresar el monomio u en el intervalo $[0, 1]$ por medio de un polígono de control de cualquier grado, formado por puntos equidistantes sobre dicho intervalo.

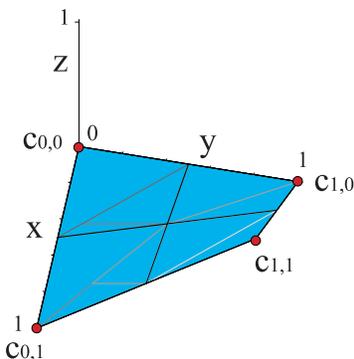


Figura 3: Gráfica de la función $f(x, y) = xy$

Ese procedimiento se traslada automáticamente a nuestro caso. Si expresamos $f(x, y)$ como combinación de una malla de control sobre la recta real,

$\{\hat{c}_{0,0}, \dots, \hat{c}_{m,n}\}$, la gráfica de la función estará determinada por su malla de control $\{c_{0,0}, \dots, c_{m,n}\}$, cuyos vértices son

$$c_{i,j} = \left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}, \hat{c}_{i,j} \right). \quad (3)$$

Por ejemplo, la gráfica de la función de bigrado $(1, 1)$, $f(x, y) = xy$, tiene por malla de control $\{(0, 0, 0), (0, 1, 0); (1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$, pues

$$xy = 0B_0^1(x)B_0^1(y) + 0B_0^1(x)B_1^1(y) + 0B_1^1(x)B_0^1(y) + 1B_1^1(x)B_1^1(y).$$

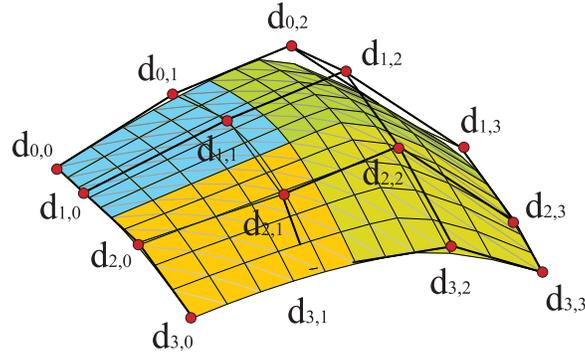


Figura 4: Superficie B-spline de bigrado $(2,2)$ y cuatro tramos

La representación producto tensorial se adapta asimismo para construir superficies B-spline. Sólo hay que sustituir los polinomios de Bernstein por las funciones B-spline. Así pues, para determinar una superficie B-spline de bigrado (m, n) y $M \times N$ tramos, será preciso indicar dos sucesiones de nudos, $\{u_0, \dots, u_{2m+M-2}\}$, $\{v_0, \dots, v_{2n+N-2}\}$ y una malla B-spline formada por los vértices $\{d_{0,0}, \dots, d_{m+M-1, n+N-1}\}$. La parametrización,

$$c(u, v) = \sum_{i=0}^{m+M-1} \sum_{j=0}^{n+N-1} d_{i,j} N_i^m(u) N_j^n(v), \quad (4)$$

está definida en el recinto $[u_{m-1}, u_{m+M-1}] \times [v_{n-1}, v_{n+N-1}]$.

Al igual que sucedía con las curvas B-spline, lo más común es que las sucesiones comiencen y acaben con m y n nudos repetidos. [Ejemplo](#).

Al aumentar un peso, la superficie se acerca al vértice correspondiente de la malla. [Ejemplo](#).

Todos los algoritmos estudiados para curvas polinómicas a trozos, tales como el algoritmo de inserción, el algoritmo de De Boor, el algoritmo de obtención de polígonos de control, . . . siguen siendo útiles para superficies de Bézier. Algunos de ellos sólo requieren que los apliquemos a la malla de control en dos pasadas, una para las filas y otra para las columnas.

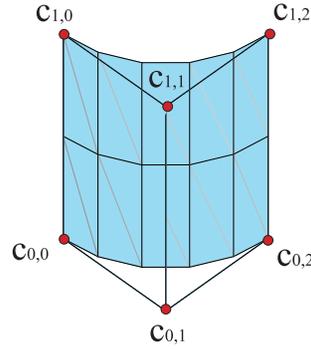


Figura 5: La inclusión de pesos permite representar un cilindro de manera exacta

Tampoco causa mayor trastorno la inclusión de pesos, $\{w_{i,j}\}$, para obtener superficies racionales y racionales a trozos,

$$c(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} c_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}, \quad (5)$$

$$c(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^{m+M-1} \sum_{j=0}^{n+N-1} w_{i,j} d_{i,j} N_i^m(u) N_j^n(v)}{\sum_{i=0}^{m+M-1} \sum_{j=0}^{n+N-1} w_{i,j} N_i^m(u) N_j^n(v)}. \quad (6)$$

La principal novedad es que las funciones de la base no se pueden factorizar en producto de funciones de u y de funciones de v por culpa de los

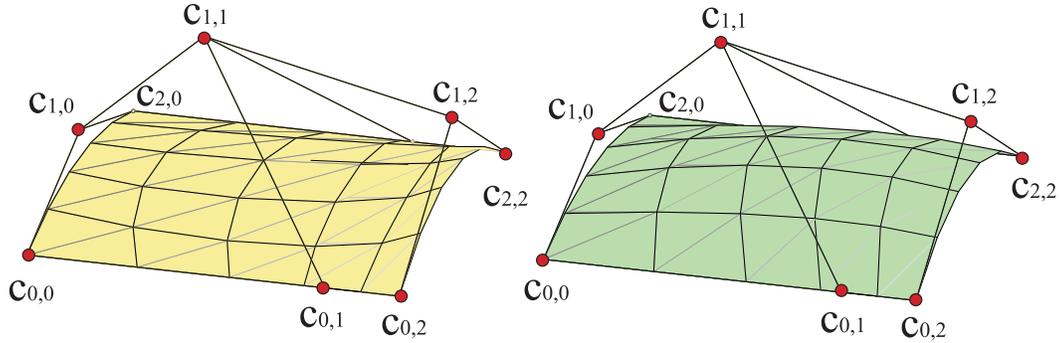


Figura 6: Al pasar el peso $w_{1,1}$ de uno a tres, la superficie se acerca al vértice $c_{1,1}$

denominadores. En cambio, podemos utilizar la escala de los pesos y la libertad para reparametrizar las variables u y v para fijar varios de ellos.

3. Propiedades de las superficies de Bézier

Como las superficies de Bézier son una generalización natural de las curvas polinómicas, muchas de las propiedades de estas se mantienen. En particular, como

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) = \left(\sum_{i=0}^m B_i^m(u) \right) \left(\sum_{j=0}^n B_j^n(v) \right) = 1, \quad (7)$$

puesto que los polinomios de Bernstein forman partición de la unidad, nuestra base de funciones es también **partición de la unidad** y nuestra parametrización (1) es una combinación baricéntrica de los vértices de la malla de control.

Este hecho traía consigo numerosas buenas propiedades, como la **invariancia afín** de la parametrización,

$$f(c(u, v)) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f(c_{i,j}) B_i^m(u) B_j^n(v), \quad u, v \in [0, 1], \quad (8)$$

para cualquier aplicación afín f . Aparte, las superficies racionales mantienen la invariancia proyectiva.

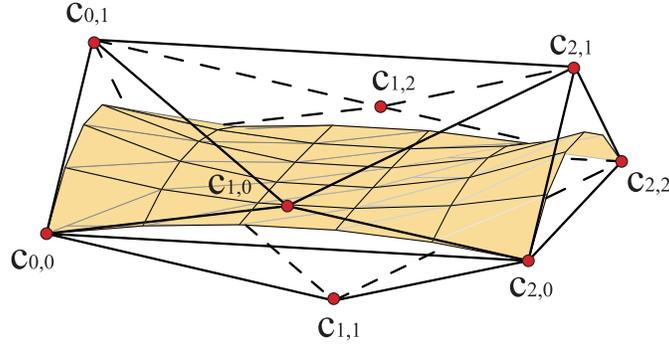


Figura 7: La superficie está contenida en la envoltura convexa de su malla de control

La superficie sigue estando comprendida, si los pesos son todos positivos, en la **envoltura convexa de la malla de control**, lo cual, recordemos, nos proporciona una primera estimación de la posición de la superficie. [Ejemplo](#). En el caso de superficies a trozos, cada tramo de superficie está además comprendido en la envoltura convexa de su malla de control.

Sin embargo, no todo van a ser bondades, no hay una generalización sencilla de la propiedad de disminución de la variación. Es fácil, por ejemplo, comprobar que una recta puede cortar a la superficie en más puntos que los que corta al poliedro descrito por la malla de control.

Por ejemplo, la superficie de bigrado $(1, 2)$ con malla de control formada por $\{(0, 0, 0), (1, 1, 0), (2, 0, 0); (0, 0, 1), (1, 1, 1), (2, 0, 1)\}$ tiene por parametrización $(2v, 2v - 2v^2, u)$. Es claro que para $v = 1/2$ esta superficie contiene una recta, $(1, 1/2, u)$, que corta, pues, a la superficie en infinitos puntos y no corta al poliedro formado por la malla de control. Lo mismo sucede para otras rectas.

Por supuesto, si queremos definir la parametrización en un recinto rectangular, $[a, b] \times [c, d]$ distinto del que hemos empleado hasta el momento, $[0, 1] \times [0, 1]$, no precisamos más que realizar una reparametrización afín de los parámetros u, v , que no afecta ni a la malla de control ni a la gráfica de la superficie,

$$u(\tilde{u}) = \frac{\tilde{u} - a}{b - a}, \quad \tilde{u} \in [a, b], \quad v(\tilde{v}) = \frac{\tilde{v} - c}{d - c}, \quad \tilde{v} \in [c, d],$$

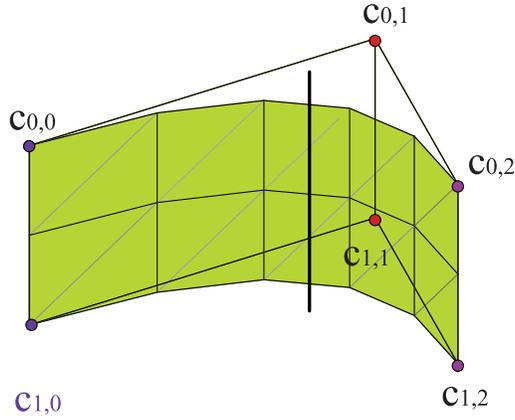


Figura 8: No hay disminución de la variación para superficies

de modo que la nueva parametrización sea

$$\tilde{c}(\tilde{u}, \tilde{v}) = c(u(\tilde{u}), v(\tilde{v})) := c\left(\frac{\tilde{u} - a}{b - a}, \frac{\tilde{v} - c}{d - c}\right), \quad \tilde{u} \in [a, b], \quad \tilde{v} \in [c, d].$$

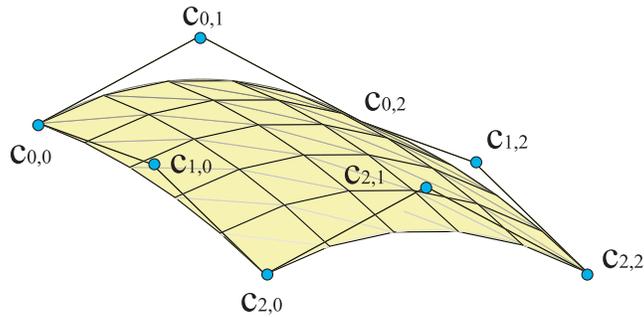


Figura 9: El borde de una superficie de Bézier está determinado por las filas y columnas primera y última de su malla de control

Del mismo modo que las curvas de Bézier sólo pasan por los vértices extremos, correspondientes a $t = 0$, $t = 1$, las superficies sólo pasan por cuatro vértices, las esquinas de la malla de control,

$$c_{0,0} = c(0, 0), \quad c_{m,0} = c(1, 0), \quad c_{0,n} = c(0, 1), \quad c_{m,n} = c(1, 1),$$

aunque la superficie pasa por las cuatro curvas de Bézier que describen los bordes de la malla de control. [Ejemplo](#). Por ejemplo, para $u = 0$,

$$c(0, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{i,j} B_i^m(0) B_j^n(v) = \sum_{j=0}^n c_{0,j} B_j^n(v), \quad v \in [0, 1],$$

la curva correspondiente, $c(0, v)$, tiene por polígono de control $\{c_{0,0}, \dots, c_{0,n}\}$, la primera fila de la malla de control de la superficie. Del mismo modo, la última fila, $\{c_{m,0}, \dots, c_{m,n}\}$, es el polígono de control de la curva $c(1, v)$. Y, para $v = 0$,

$$c(u, 0) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(0) = \sum_{i=0}^m c_{i,0} B_i^m(u), \quad u \in [0, 1],$$

el polígono de control de la curva $c(u, 0)$ es la primera columna de la malla de control, $\{c_{0,0}, \dots, c_{m,0}\}$. De manera análoga, el polígono de control de $c(u, 1)$ es la última columna, $\{c_{0,n}, \dots, c_{m,n}\}$.

Por tanto, el borde de la malla se corresponde con el borde de la superficie. [Ejemplo](#).

Esta propiedad se mantiene en las superficies racionales y en las superficies a trozos, si el nudo del comienzo y del final de cada sucesión tiene la multiplicidad igual al grado.

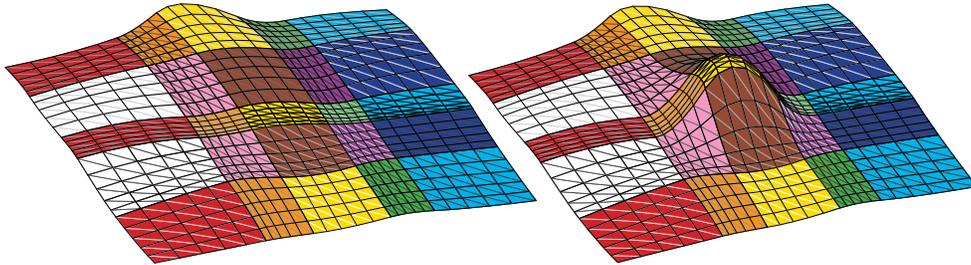


Figura 10: Control local de superficies B-spline: desplazar un vértice en una curva bicuadrática afecta a lo sumo a nueve tramos de superficie

Las superficies a trozos siguen poseyendo la propiedad de control local. Un vértice genérico de la malla de control afecta a lo sumo a $(m + 1) \cdot (n + 1)$ tramos de la superficie. En el ejemplo de la figura se ha desplazado el vértice $c_{3,3}$ de una superficie de bigrado $(2, 2)$ y 5×5 tramos. [Ejemplo](#).

La principal cortapisa de la representación producto tensorial son las limitaciones que impone a la topología de las superficies. Cuando se trata de superficies abiertas, no hay mayor problema. Pero cuando se trata de superficies cerradas, las únicas topologías permitidas son la del cilindro y la del toro. Topologías más complicadas, como la de un doble o triple toro no se pueden representar. Incluso para representar la esfera es preciso recurrir a mallas degeneradas en las que los vértices se solapan, por ejemplo, en los polos de la esfera.

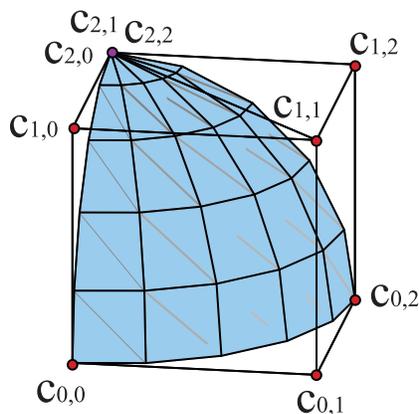


Figura 11: La esfera se representa por mallas degeneradas, con vértices múltiples

Tal como veremos en el siguiente tema, las superficies de revolución se generan rotando el polígono de control de una curva. Por tanto, el cuadrante de circunferencia, al tener un vértice sobre el eje de giro, genera una malla degenerada, ya que dicho punto al girar proporciona vértices idénticos.

4. Algoritmo de De Casteljaou

[Vídeo de Algoritmo de de Casteljaou y elevacion de grado](#)

Tal como hemos visto, la parametrización de las superficies de Bézier trata de manera casi independiente las variables u, v , recuperando el formalismo de las curvas polinómicas cuando fijamos una de ellas.

Por ello, extender el algoritmo de De Casteljaou a superficies es poco menos que una obviedad. Sólo tenemos que aplicarlo por separado a las columnas de la malla de control, como si fueran polígonos de curvas de grado m ,

$$\begin{aligned} c_{i,j}^{r,0}(u) &:= (1-u)c_{i,j}^{r-1,0}(u) + uc_{i+1,j}^{r-1,0}(u), \\ i = 0, \dots, m-r, \quad r = 1, \dots, m, \quad j = 0, \dots, n, \end{aligned} \quad (9)$$

hasta llegar a un único punto en la iteración m -ésima en cada columna, $\{c_{0,0}^{m,0}(u), \dots, c_{0,n}^{m,0}(u)\}$, que podemos considerar como un polígono de control de una curva de grado n , al cual volvemos a aplicar el algoritmo de De Casteljaou,

$$\begin{aligned} c_{0,j}^{m,s}(u,v) &:= (1-v)c_{0,j}^{m,s-1}(u,v) + vc_{0,j+1}^{m,s-1}(u,v), \\ j = 0, \dots, n-s, \quad s = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (10)$$

hasta llegar al último paso de la iteración, que nos proporciona el punto $c(u,v)$ de la superficie,

$$c(u,v) = c_{0,0}^{m,n}(u,v). \quad (11)$$

Obviamente el proceso es simétrico. Podíamos haber comenzado aplicando el algoritmo de De Casteljaou a las filas, considerándolas polígonos de curvas de grado n , para volver a aplicarlo sobre el polígono resultante de grado m . La idea subyacente es bien sencilla, aplicar el algoritmo de De Casteljaou sucesivamente a filas y a columnas de la malla de control.

A su vez, la forma polar de una superficie de Bézier tampoco causa mayores problemas, ya que, a la vista del algoritmo de De Casteljaou,

$$\begin{aligned} c[u_1, \dots, u_m; v_1, \dots, v_n] &:= c[u_1, \dots, u_m][v_1, \dots, v_n] \\ &= c[v_1, \dots, v_n][u_1, \dots, u_m], \end{aligned} \quad (12)$$

es decir, evaluamos la forma polar primero en u_1, \dots, u_m en cada de una de las columnas de la malla de control y, con el polígono resultante de grado n , evaluamos en v_1, \dots, v_n . O a la inversa, evaluamos en las filas en v_1, \dots, v_n y luego, en la columna resultante, en u_1, \dots, u_m .

Por ejemplo, si queremos restringir una superficie parametrizada, $c(u,v)$, al recinto $[a, b] \times [c, d]$, la malla de control, $\{\tilde{c}_{0,0}, \dots, \tilde{c}_{m,n}\}$, de la nueva superficie es ,

$$\tilde{c}_{i,j} = c[a^{\langle m-i \rangle}, b^{\langle i \rangle}; c^{\langle n-j \rangle}, d^{\langle j \rangle}]. \quad (13)$$

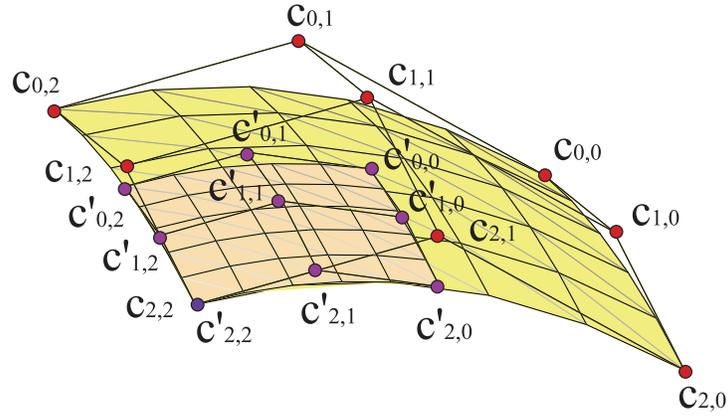


Figura 12: El algoritmo de De Casteljau se puede emplear para restringir la parametrización de una superficie

Ejemplo.

En un caso concreto, si disponemos de la malla de control de una superficie bicuadrática,

$$\begin{aligned} & \{(0, 0, 0), (1, 0, 4), (2, 0, 3); \\ & (0, 2, 1), (1, 2, 5), (2, 2, 4); \\ & (0, 4, 0), (1, 4, 4), (2, 4, 3)\}, \end{aligned}$$

la restricción de la parametrización al recinto $[1/2, 1] \times [1/3, 1]$ tiene por malla de control,

$$\begin{aligned} & \{(2/3, 2, 47/18), (4/3, 2, 25/6), (2, 2, 7/2); \\ & (2/3, 3, 47/18), (4/3, 3, 25/6), (2, 3, 7/2); \\ & (2/3, 4, 19/9), (4/3, 4, 11/3), (2, 4, 3)\}. \end{aligned}$$

Podemos llegar a este resultado en varios pasos. Podemos considerar las filas de la malla de control polígonos de control de curvas definidas para $v \in [0, 1]$ y aplicarles el algoritmo de restricción al intervalo $[1/3, 1]$, ya estudiado para curvas,

$$\begin{aligned} c_i[v_1, v_2] &= (1 - v_2)c_{i,0}^1 + v_2c_{i,1}^1 \\ &= (1 - v_1)(1 - v_2)c_{i,0} + \{v_1(1 - v_2) + v_2(1 - v_1)\}c_{i,1} + v_1v_2c_{i,2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{c}_{0,0} &= c_0[1/3, 1/3] = \frac{4c_{0,0} + 4c_{0,1} + c_{0,2}}{9} = (2/3, 0, 19/9), \\
\hat{c}_{0,1} &= c_0[1/3, 1] = \frac{2c_{0,1} + c_{0,2}}{3} = (4/3, 0, 11/3), \\
\hat{c}_{0,2} &= c_0[1, 1] = c_{0,2} = (2, 0, 3), \\
\hat{c}_{1,0} &= c_1[1/3, 1/3] = \frac{4c_{1,0} + 4c_{1,1} + c_{1,2}}{9} = (2/3, 2, 28/9), \\
\hat{c}_{1,1} &= c_1[1/3, 1] = \frac{2c_{1,1} + c_{1,2}}{3} = (4/3, 2, 14/3), \\
\hat{c}_{1,2} &= c_1[1, 1] = c_{1,2} = (2, 2, 4), \\
\hat{c}_{2,0} &= c_2[1/3, 1/3] = \frac{4c_{2,0} + 4c_{2,1} + c_{2,2}}{9} = (2/3, 4, 19/9), \\
\hat{c}_{2,1} &= c_2[1/3, 1] = \frac{2c_{2,1} + c_{2,2}}{3} = (4/3, 4, 11/3), \\
\hat{c}_{2,2} &= c_2[1, 1] = c_{2,2} = (2, 4, 3),
\end{aligned}$$

para a continuación aplicar el mismo algoritmo a las columnas, para restringir la superficie al intervalo $u \in [1/2, 1]$,

$$\begin{aligned}
c_j[u_1, u_2] &= (1 - u_2)c_{0,j}^1 + u_2c_{1,j}^1 \\
&= (1 - u_1)(1 - u_2)c_{0,j} + \{u_1(1 - u_2) + u_2(1 - u_1)\}c_{1,j} + u_1u_2c_{2,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_{0,0} &= c_0[1/2, 1/2] = \frac{\hat{c}_{0,0} + 2\hat{c}_{1,0} + \hat{c}_{2,0}}{4} = (2/3, 2, 47/18), \\
\tilde{c}_{1,0} &= c_0[1/2, 1] = \frac{\hat{c}_{1,0} + \hat{c}_{2,0}}{2} = (2/3, 3, 47/18), \\
\tilde{c}_{2,0} &= c_0[1, 1] = \hat{c}_{2,0} = (2/3, 4, 19/9), \\
\tilde{c}_{0,1} &= c_1[1/2, 1/2] = \frac{\hat{c}_{0,1} + 2\hat{c}_{1,1} + \hat{c}_{2,1}}{4} = (4/3, 2, 25/6), \\
\tilde{c}_{1,1} &= c_1[1/2, 1] = \frac{\hat{c}_{1,1} + \hat{c}_{2,1}}{2} = (4/3, 3, 25/6), \\
\tilde{c}_{2,1} &= c_1[1, 1] = \hat{c}_{2,1} = (4/3, 4, 11/3), \\
\tilde{c}_{0,2} &= c_2[1/2, 1/2] = \frac{\hat{c}_{0,2} + 2\hat{c}_{1,2} + \hat{c}_{2,2}}{4} = (2, 2, 7/2), \\
\tilde{c}_{1,2} &= c_2[1/2, 1] = \frac{\hat{c}_{1,2} + \hat{c}_{2,2}}{2} = (2, 3, 7/2), \\
\tilde{c}_{2,2} &= c_2[1, 1] = \hat{c}_{2,2} = (2, 4, 3).
\end{aligned}$$

5. Elevación del grado

Vídeo de Algoritmo de de Casteljaou y elevacion de grado

El proceso de elevación del grado de una superficie de Bézier no difiere del ya estudiado para curvas polinómicas. Si tenemos una malla de control de bigrado (m, n) , $\{c_{0,0}, \dots, c_{m,n}\}$ y queremos expresar la superficie como si fuera de bigrado $(m + 1, n)$, no tenemos más que aplicar el algoritmo de elevación del grado independientemente a las $n + 1$ columnas de la malla de control,

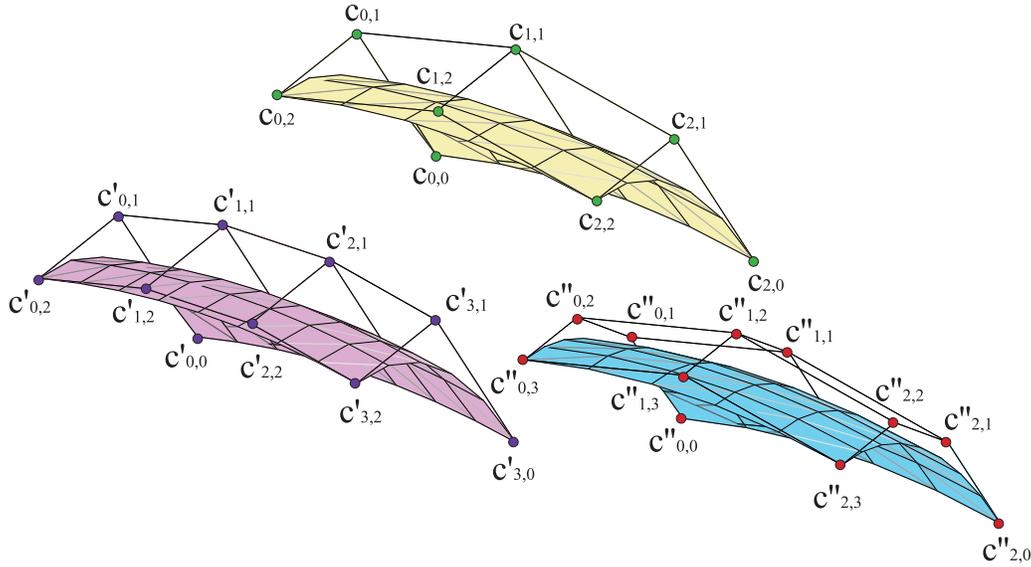


Figura 13: Elevación del grado de una superficie de bigrado $(2, 2)$

$$\begin{aligned}
 c(u, v) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v) = \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^n c_{i,j}^{1,0} B_i^{m+1}(u) B_j^n(v), \\
 c_{i,j}^{1,0} &= \left(1 - \frac{i}{m+1}\right) c_{i,j} + \frac{i}{m+1} c_{i-1,j},
 \end{aligned} \tag{14}$$

y de manera análoga, si queremos elevar el bigrado a $(m, n + 1)$, aplicamos

el algoritmo a las $m + 1$ filas de la malla de control por separado,

$$c(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n+1} c_{i,j}^{0,1} B_i^m(u) B_j^{n+1}(v),$$

$$c_{i,j}^{0,1} = \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) c_{i,j} + \frac{j}{n+1} c_{i,j-1}, \quad (15)$$

y, por supuesto, podemos extender también el resto de fórmulas basadas en la forma polar o en la elevación sucesiva del grado. [Ejemplo.](#) [Ejemplo.](#)

Por ejemplo, una superficie bicuadrática con malla de control dada por

$$\{(0, 0, 0), (1, 0, 4), (2, 0, 3);$$

$$(0, 2, 1), (1, 2, 5), (2, 2, 4);$$

$$(0, 4, 0), (1, 4, 4), (2, 4, 3)\},$$

la podemos expresar formalmente como una superficie de bigrado $(3, 2)$,

$$c_{0,0}^{1,0} = \left(1 - \frac{0}{3}\right) c_{0,0} + \frac{0}{3} c_{-1,0} = c_{0,0} = (0, 0, 0),$$

$$c_{0,1}^{1,0} = \left(1 - \frac{0}{3}\right) c_{0,1} + \frac{0}{3} c_{-1,1} = c_{0,1} = (1, 0, 4),$$

$$c_{0,2}^{1,0} = \left(1 - \frac{0}{3}\right) c_{0,2} + \frac{0}{3} c_{-1,2} = c_{0,2} = (2, 0, 3),$$

$$c_{1,0}^{1,0} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) c_{1,0} + \frac{1}{3} c_{0,0} = \frac{2c_{1,0} + c_{0,0}}{3} = (0, 4/3, 2/3),$$

$$c_{1,1}^{1,0} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) c_{1,1} + \frac{1}{3} c_{0,1} = \frac{2c_{1,1} + c_{0,1}}{3} = (1, 4/3, 14/3),$$

$$c_{1,2}^{1,0} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) c_{1,2} + \frac{1}{3} c_{0,2} = \frac{2c_{1,2} + c_{0,2}}{3} = (0, 4/3, 11/3),$$

$$c_{2,0}^{1,0} = \left(1 - \frac{2}{3}\right) c_{2,0} + \frac{2}{3} c_{1,0} = \frac{c_{2,0} + 2c_{1,0}}{3} = (0, 8/3, 2/3),$$

$$c_{2,1}^{1,0} = \left(1 - \frac{2}{3}\right) c_{2,1} + \frac{2}{3} c_{1,1} = \frac{c_{2,1} + 2c_{1,1}}{3} = (1, 8/3, 14/3),$$

$$c_{2,2}^{1,0} = \left(1 - \frac{2}{3}\right) c_{2,2} + \frac{2}{3} c_{1,2} = \frac{c_{2,2} + 2c_{1,2}}{3} = (2, 8/3, 11/3),$$

$$c_{3,0}^{1,0} = \left(1 - \frac{3}{3}\right) c_{3,0} + \frac{3}{3} c_{2,0} = c_{2,0} = (0, 4, 0),$$

$$\begin{aligned}
c_{3,1}^{1,0} &= \left(1 - \frac{3}{3}\right) c_{3,1} + \frac{3}{3} c_{2,1} = c_{2,1} = (1, 4, 4), \\
c_{3,2}^{1,0} &= \left(1 - \frac{3}{3}\right) c_{3,2} + \frac{3}{3} c_{2,2} = c_{2,2} = (2, 4, 3),
\end{aligned}$$

es decir, la malla de control es

$$\begin{aligned}
&\{(0, 0, 0), (1, 0, 4), (2, 0, 3); \\
&(0, 4/3, 2/3), (1, 4/3, 14/3), (2, 4/3, 11/3); \\
&(0, 8/3, 2/3), (1, 8/3, 14/3), (2, 8/3, 11/3); \\
&(0, 4, 0), (1, 4, 4), (2, 4, 3)\},
\end{aligned}$$

o por una superficie de bigrado $(2, 3)$, elevando el grado por filas en lugar de por columnas,

$$\begin{aligned}
&\{(0, 0, 0), (2/3, 0, 8/3), (4/3, 0, 11/3), (2, 0, 3); \\
&(0, 2, 1), (2/3, 2, 11/3), (4/3, 2, 14/3), (2, 2, 4); \\
&(0, 4, 0), (2/3, 4, 8/3), (4/3, 4, 11/3), (2, 4, 3)\}.
\end{aligned}$$

6. Derivadas

[Vídeo de Uniones de curvas y twists](#)

Dado que la base de funciones polinómicas que empleamos, $B_i^m(u)B_j^n(v)$ es separable en las variables u, v , las expresiones de las derivadas parciales de la parametrización no sufren grandes cambios respecto a las estudiadas para curvas de Bézier. Por ejemplo, la derivada con respecto a u ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c(u, v)}{\partial u} &= \sum_{j=0}^n \frac{\partial}{\partial u} \left(\sum_{i=0}^m c_{i,j} B_i^m(u) \right) B_j^n(v) \\
&= m \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{m-1} \Delta^{1,0} c_{i,j} B_i^{m-1}(u) B_j^n(v), \tag{16}
\end{aligned}$$

donde hemos introducido las diferencias en los subíndices,

$$\Delta^{i,j} c_{i,j} = \Delta^{i-1,j} c_{i+1,j} - \Delta^{i-1,j} c_{i,j} = \Delta^{i,j-1} c_{i,j+1} - \Delta^{i,j-1} c_{i,j},$$

cuyos primeros valores son generalización directa de las diferencias en un único índice,

$$\Delta^{1,0}c_{i,j} = c_{i+1,j} - c_{i,j}, \quad \Delta^{0,1}c_{i,j} = c_{i,j+1} - c_{i,j}.$$

De manera análoga, la expresión de la derivada parcial respecto a v es

$$\frac{\partial c(u, v)}{\partial v} = n \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n-1} \Delta^{0,1}c_{i,j} B_i^m(u) B_j^{n-1}(v), \quad (17)$$

y la generalización a derivadas superiores es inmediata,

$$\frac{\partial^{r+s} c(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} = \frac{m! n!}{(m-r)!(n-s)!} \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} \Delta^{r,s}c_{i,j} B_i^{m-r}(u) B_j^{n-s}(v). \quad (18)$$

Especialmente interesantes son las derivadas en los bordes de la superficie, formado por los cuatros tramos $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$, $v = 1$. Consideraremos uno de ellos, $u = 0$. Las derivadas parciales con respecto a la variable v corresponden a las derivadas tangenciales a la curva $c(0, v)$, que ya hemos estudiado en el primer tema. La novedad es la aparición de las derivadas transversales al borde, como son las parciales con respecto a u ,

$$\left. \frac{\partial^r c(u, v)}{\partial u^r} \right|_{u=0} = \frac{m!}{(m-r)!} \sum_{j=0}^n \Delta^{r,0}c_{0,j} B_j^n(v). \quad (19)$$

Esta expresión se puede generalizar sin problemas al resto de tramos del borde. Por ejemplo, en $u = 1$,

$$\left. \frac{\partial^r c(u, v)}{\partial u^r} \right|_{u=1} = \frac{m!}{(m-r)!} \sum_{j=0}^n \Delta^{r,0}c_{m-r,j} B_j^n(v). \quad (20)$$

Esta es una curva vectorial de grado n , cuyos vértices son vectores formados por las diferencias entre las primeras filas de puntos de la malla de control, $\{\Delta^{r,0}c_{0,0}, \dots, \Delta^{r,0}c_{0,n}\}$. Este resultado nos permite interpretar las hileras interiores de vértices de la malla. La primera hilera define el borde, la segunda la tangente y así sucesivamente.

Necesitaremos estos resultados para construir superficies polinómicas a trozos. Supongamos que tenemos dos superficies de Bézier parametrizadas

respectivamente por $c(u, v)$, $\tilde{c}(u, v)$ en los recintos $[u_0, u_1] \times [v_0, v_1]$, $[u_1, u_2] \times [v_0, v_1]$, con mallas de control $\{c_{0,0}, \dots, c_{m,n}\}$ y $\{\tilde{c}_{0,0}, \dots, \tilde{c}_{m,n}\}$.

Si queremos que las superficies estén unidas por el borde $u = u_1$, la condición de continuidad exige que las curvas $c(u_1, v)$, $\tilde{c}(u_1, v)$ sean idénticas, lo cual se consigue si sus polígonos de control son los mismos, es decir, si la última fila de la malla de la primera superficie y la primera fila de la segunda son coincidentes,

$$c(u_1, v) = \tilde{c}(u_1, v) \Rightarrow c_{m,j} = \tilde{c}_{0,j}, \quad j = 0, \dots, n. \quad (21)$$

Como las superficies comparten el borde $u = u_1$, todas las derivadas parciales con respecto a la variable v son iguales en ambas superficies a lo largo del borde. Por ello, para establecer la clase de diferenciabilidad, sólo tenemos que preocuparnos de las derivadas transversales.

La condición para que la superficie compuesta sea de clase C^1 se obtiene a partir de (19-20),

$$\left. \frac{\partial c(u, v)}{\partial u} \right|_{u=u_1} = \left. \frac{\partial \tilde{c}(u, v)}{\partial u} \right|_{u=u_1} \Rightarrow \frac{\Delta^{1,0} c_{m-1,j}}{\Delta u_0} = \frac{\Delta^{1,0} \tilde{c}_{0,j}}{\Delta u_1}, \quad j = 0, \dots, n, \quad (22)$$

que es una generalización directa de la condición equivalente para curvas. Podemos interpretarla pensando en las columnas de las mallas $\{c_{0,j}, \dots, c_{m,j}\}$, $\{\tilde{c}_{0,j}, \dots, \tilde{c}_{m,j}\}$ como polígonos de control de curvas compuestas a las cuales estamos imponiendo la condición de tener derivada continua.

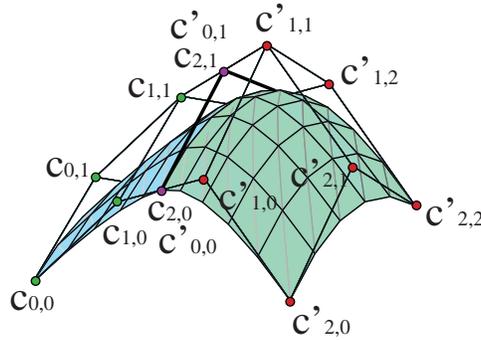


Figura 14: Superficie de clase C^1 compuesta de dos tramos bicuadráticos

De este modo, la condición de ser de clase C^1 afecta a la franja de vértices de las mallas formada por las dos últimas filas de la primera superficie y las dos primeras filas de la segunda.

Cuando estudiamos la diferenciabilidad de las curvas de Bézier, admitimos que esta condición era demasiado restrictiva, que para que una curva compuesta tuviera tangente continua, bastaba que los vectores Δc_m , $\Delta \tilde{c}_0$ fueran paralelos.

Sin embargo, esta buena propiedad se pierde en las superficies. Si imponemos en lugar de (22) que las parejas de vectores $\Delta^{1,0} c_{m,j}$, $\Delta^{1,0} \tilde{c}_{0,j}$ sean paralelas dos a dos, obtenemos una superficie que, en general, no tiene ni siquiera plano tangente bien definido en los puntos del borde, salvo en los extremos, como se comprueba calculando la normal en el borde.

La razón está en que la tangente en el borde no está definida, salvo en los extremos, por una única condición de paralelismo, sino por las $n + 1$ expresiones. Por ello, al alterar las condiciones (22), estamos realizando combinaciones lineales de vectores distintos a ambos lados del borde y, en general, esto conducirá a vectores transversales no paralelos. Las curvas que sí tendrán tangente continua, aquellas determinadas por las columnas de las mallas de control, no están sobre la superficie, salvo la primera y la última.

Esto se ve claramente con un ejemplo. Consideremos dos superficies bicuadráticas, con respectivas mallas de control,

$$\begin{aligned} & \{(-1, -2, 0), (0, -1, 1), (1, -2, 0); & \{(-1, 0, 0), (0, 0, 0), (1, 0, 0); \\ & (-1, -1, 0), (0, 0, 1), (1, -1, 0); & (-1, 1, 0), (0, 0, -2), (1, 1, 0); \\ & (-1, 0, 0), (0, 0, 0), (1, 0, 0)\} & (-1, 2, 0), (0, 1, -2), (1, 2, 0)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1(u, v) &= (2v - 1, 2u^2v^2 - 2v^2 - 2u^2v + 2v + 2u - 2, \\ & \quad -2u^2v + 2u^2v^2 + 2v - 2v^2) \\ c_2(u, v) &= (2v - 1, -2u^2v^2 + 4uv^2 + 2u^2v - 4uv + 2u, \\ & \quad 4u^2v - 4u^2v^2 - 8uv + 8uv^2), \end{aligned}$$

que enlazan a lo largo de la parábola (en este caso es una recta) de polígono de control dado por la fila, $\{(-1, 0, 0), (0, 0, 0), (1, 0, 0)\}$, parametrizada por $c(v) = (2v - 1, 0, 0)$, con lo cual constituyen una curva compuesta.

Las diferencias entre las dos últimas filas de la primera malla y entre las dos primeras filas de la segunda malla son, respectivamente,

$$\{(0, 1, 0), (0, 0, -1), (0, 1, 0)\} \quad \{(0, 1, 0), (0, 0, -2), (0, 1, 0)\}.$$

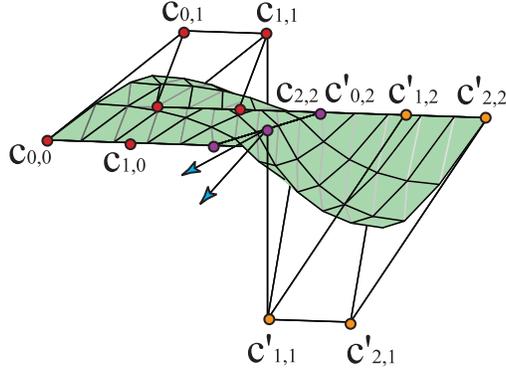


Figura 15: Superficie bicuadrática no diferenciable compuesta de dos tramos

Los vectores $(0, 0, -1)$ y $(0, 0, -2)$ no son iguales, aunque son paralelos. Aún así, la normal a la superficie no es igual a ambos lados de la curva de unión, ya que, si comparamos las derivadas de la parametrización de la primera superficie en $u = 1$ y de la segunda superficie en $u = 0$, vemos que se obtienen vectores claramente distintos,

$$\begin{aligned} c_{1,u}(1, v) &= (0, 4v^2 - 4v + 2, -4v + 4v^2), & c_{1,v}(1, v) &= (2, 0, 0) \\ c_{2,u}(0, v) &= (0, 4v^2 - 4v + 2, -8v + 8v^2), & c_{2,v}(0, v) &= (2, 0, 0), \end{aligned}$$

que proporcionan normales distintas para el mismo punto,

$$\begin{aligned} N_1(1, v) &= c_{1,u}(1, v) \times c_{1,v}(1, v) = (0, -8v + 8v^2, -4 - 8v^2 + 8v), \\ N_2(0, v) &= c_{2,u}(0, v) \times c_{2,v}(0, v) = (0, -16v + 16v^2, -4 - 8v^2 + 8v), \end{aligned}$$

que ni siquiera son paralelas y, por tanto, tenemos un plano tangente distinto a cada lado de la parábola, con lo que la superficie compuesta es continua pero no suave. Sólo coinciden, como ya se ha dicho, en los extremos de la curva, para los valores $v = 0, 1$.

Generalizando este resultado, imponer que la superficie compuesta sea de clase C^r involucra a las $r + 1$ filas adyacentes de cada malla de control y se refleja en la condición,

$$\frac{\Delta^{r,0} c_{m-r,j}}{(\Delta u_0)^r} = \frac{\Delta^{r,0} \tilde{c}_{0,j}}{(\Delta u_1)^r}, \quad j = 0, \dots, n. \quad (23)$$

El problema de construir superficies compuestas se complica si queremos añadir superficies de Bézier definidas en $[u_0, u_1] \times [v_1, v_2]$ y en $[u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$, ya que, por ejemplo, el vértice $\hat{c}_{1,1}$ de la cuarta superficie está determinado a la vez por la condición de diferenciabilidad en $u = u_1$ y por la de $v = v_1$. Que ambas sean compatibles dependerá de la elección de vértices sobre las curvas $u = u_1, v = v_1$. Por supuesto, las superficies B-spline solucionan estos problemas, ya que garantizan la diferenciabilidad desde el comienzo, salvo que repitamos nudos.

Otras derivadas interesantes son las derivadas segundas cruzadas, que normalmente en el diseño se suelen llamar *twists*. En función de los vértices de la malla de control,

$$\frac{\partial^2 c(u, v)}{\partial u \partial v} = mn \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta^{1,1} c_{i,j} B_i^{m-1}(u) B_j^{n-1}(v), \quad (24)$$

podemos escribir los coeficientes de manera que tengan una interpretación geométrica sencilla,

$$\begin{aligned} \Delta^{1,1} c_{i,j} &= c_{i+1,j+1} - a_{i,j} = c_{i+1,j+1} - c_{i+1,j} - c_{i,j+1} + c_{i,j}, \\ a_{i,j} &= c_{i+1,j} + c_{i,j+1} - c_{i,j} = c_{i,j} + \mathbf{c}_{i,j} \mathbf{c}_{i+1,j} + \mathbf{c}_{i,j} \mathbf{c}_{i,j+1}. \end{aligned}$$

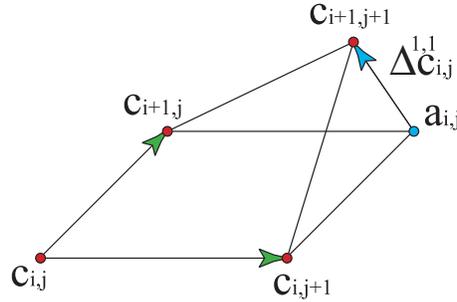


Figura 16: Twist

El vector $\Delta^{1,1} c_{i,j}$ representa la separación del vértice $c_{i+1,j+1}$ respecto del paralelogramo que determinan $c_{i,j}, c_{i+1,j}, c_{i,j+1}, a_{i,j}$.

En las esquinas del borde de la superficie, por ejemplo, en $c_{0,0}$, el *twist* es proporcional a $\Delta^{1,1} c_{0,0}$ y, como los vectores $\mathbf{c}_{0,0} \mathbf{c}_{1,0}$, $\mathbf{c}_{0,0} \mathbf{c}_{0,1}$ determinan

el plano tangente a la superficie en $c_{0,0}$, tenemos que dicho twist mide la separación del vértice $c_{1,1}$ del plano tangente a la superficie en $c_{0,0}$.

Pensemos en una superficie de Bézier bicúbica. Su malla de control posee dieciséis vértices, de los cuales doce, los externos, están determinados por las curvas que delimitan su borde. Sólo quedan libres los cuatro vértices interiores, que quedan determinados precisamente si fijamos los *twists* de las esquinas. Por tanto, la elección de los *twists* es fundamental para determinar la superficie que llena el espacio entre las cuatro curvas. De ahí su importancia. [Ejemplo](#). [Ejemplo](#).

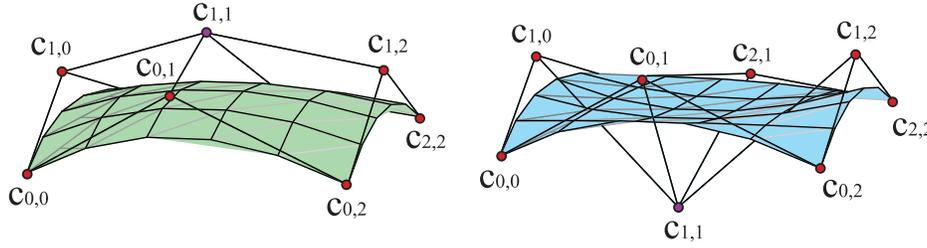


Figura 17: Variación del *twist* de una superficie bicuadrática

La opción más sencilla para escoger los *twists* es tomarlos nulos. Las superficies con todos los *twists* nulos se denominan **superficies traslacionales**. [Ejemplo](#). Las estudiaremos más adelante. Anticiparemos, no obstante, que, en contra de lo que la intuición indica (la interpretación geométrica de los *twists* parece sugerir que las superficies traslacionales deberían ser bastante planas), tener *twists* nulos no está relacionado con la curvatura de la superficie.

Las derivadas de la parametrización nos sirven asimismo para construir vectores normales en cada punto de la superficie. Dado que las derivadas parciales con respecto a u y a v definen vectores tangentes a la superficie, su producto vectorial define un vector normal en el punto $c(u, v)$,

$$\begin{aligned} n(u, v) &= \frac{\partial c(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial c(u, v)}{\partial v} \\ &= \sum_{i,k=0}^{m-1} \sum_{j,l=0}^{n-1} \Delta^{1,0} c_{i,j} \times \Delta^{0,1} c_{k,l} B_i^{m-1}(u) B_j^{n-1}(v) B_k^{m-1}(u) B_l^{n-1}(v), \end{aligned}$$

que podemos hacer unitario dividiéndolo por su norma.

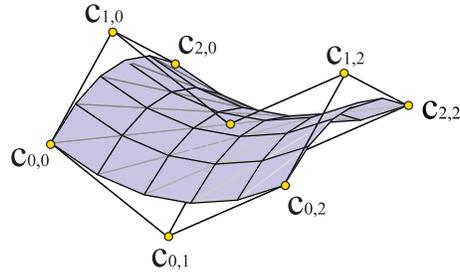


Figura 18: Superficie traslacional

Esta expresión supone un aumento considerable del grado con respecto al de la superficie. No es válida en los puntos en los que las derivadas parciales sean paralelas o nulas, lo cual no siempre quiere decir que la normal no esté bien definida, sino que puede ser un problema de la parametrización empleada.

Por ejemplo, en la figura 11, la esfera tiene normal definida en el polo, pero no la podemos calcular ingenuamente por culpa del vértice múltiple.

La expresión se simplifica notablemente en las esquinas de la superficie, ya que involucran pocas diferencias de vértices. Por ejemplo, en $c_{0,0} = c(0, 0)$,

$$n(0, 0) = \Delta^{1,0}c_{0,0} \times \Delta^{0,1}c_{0,0}, \quad (25)$$

si hubiera dos vértices iguales o los vértices $c_{0,0}, c_{0,1}, c_{1,0}$ estuvieran alineados, la fórmula anterior no nos proporcionaría la normal.

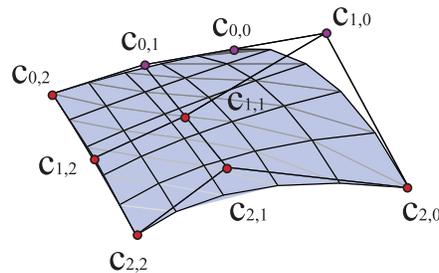


Figura 19: Superficie regular con vértices alineados

7. Interpolación y aproximación

Vídeo de Interpolación y aproximación de superficies

En el tema segundo estudiamos como construir una curva de Bézier que interpolará una colección de datos $a_i = c(u_i)$, $i = 0, \dots, n$. Un problema similar se puede plantear para superficies, que puede resolverse mediante el uso de superficies de Bézier.

Supongamos que tenemos una nube de $(m+1) \cdot (n+1)$ datos en el espacio, $\{a_{0,0}, \dots, a_{m,n}\}$, por los cuales queremos que pase por una superficie, $c(u, v)$, para valores determinados de dos parámetros u, v ,

$$a_{i,j} = c(u_i, v_j), \quad i = 0, \dots, m \quad j = 0, \dots, n. \quad (26)$$

Intentaremos ajustarlos con una parametrización producto de una superficie de bigrado (m, n) . En vez de atacar el problema como un sistema lineal de $(m+1) \cdot (n+1)$ incógnitas, los vértices de la malla de control, haremos uso del producto de polinomios para escribirlo como $B_U C B_V^t = A$,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{0,0} & \cdots & a_{0,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,0} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, & B_U &= \begin{pmatrix} B_0^m(u_0) & \cdots & B_m^m(u_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_0^m(u_m) & \cdots & B_m^m(u_m) \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} c_{0,0} & \cdots & c_{0,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m,0} & \cdots & c_{m,n} \end{pmatrix}, & B_V &= \begin{pmatrix} B_0^n(v_0) & \cdots & B_n^n(v_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_0^n(v_n) & \cdots & B_n^n(v_n) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (27)$$

donde las matrices A, C definen tres sistemas lineales, uno por cada coordenada de los puntos.

Las coordenadas de los vértices de la malla de control se obtienen formalmente invirtiendo las matrices, $C = B_U^{-1} A (B_V^t)^{-1}$. Aunque es más sencillo reducir el problema al ya estudiado de las curvas interpolantes, definiendo matrices auxiliares $\tilde{C} := B_U C$, que serán la incógnita del sistema $\tilde{C} B_V^t = A$.

Por tanto, hemos reducido la solución del problema a dos pasos. Primero resolvemos los sistemas $\tilde{C} B_V^t = A$ y con la solución obtenida, \tilde{C} , planteamos $B_U C = \tilde{C}$, cuya solución es la malla de control de la superficie interpolante.

Nótese que con esta argucia hemos reducido el problema inicial, un sistema lineal de $(m+1) \cdot (n+1)$ ecuaciones a dos sistemas, de $(m+1)$ y

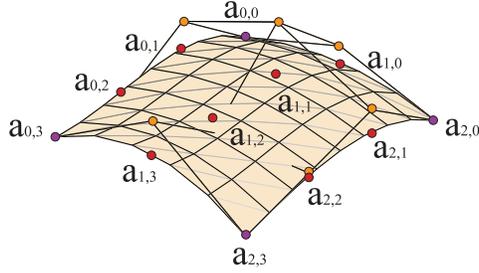


Figura 20: Superficie interpolante de bigrado (2,3)

$(n + 1)$ ecuaciones, respectivamente, con el consiguiente ahorro de operaciones. [Ejemplo](#).

Este procedimiento sugiere una manera práctica de resolver el problema de interpolación. Para cada valor de u_i , es decir, para cada fila de la matriz de datos, construimos la curva que interpola los datos $\{a_{i,0}, \dots, a_{i,n}\}$, que tendrá un polígono de control $\{\tilde{c}_{i,0}, \dots, \tilde{c}_{i,n}\}$. Luego interpolamos cada columna de la nueva matriz $\{\tilde{c}_{0,j}, \dots, \tilde{c}_{m,j}\}$, es decir, fijando v_j , para obtener el polígono de control $\{c_{0,j}, \dots, c_{m,j}\}$. La malla resultante de todos los problemas de interpolación, $\{c_{0,0}, \dots, c_{m,n}\}$ es la solución de nuestro problema, como se comprueba fácilmente.

Obviamente, la solución es idéntica si interpolamos primero sobre las columnas y después sobre las filas.

Este planteamiento puede emplearse también para aproximar un conjunto de datos, sustituyendo las curvas interpolantes por curvas aproximantes.

Veamos un ejemplo. Supongamos que queremos obtener una superficie parametrizada, $c(u, v)$, de bigrado (2, 3) que verifique las siguientes condiciones,

$$\begin{aligned}
 c(0, 0) &= (0, 0, 0), & c(1/2, 0) &= (0, 1, 1), & c(1, 0) &= (0, 2, 0), \\
 c(0, 1/3) &= (1, 0, 1), & c(1/2, 1/3) &= (1, 1, 2), & c(1, 1/3) &= (1, 2, 1), \\
 c(0, 2/3) &= (2, 0, 0), & c(1/2, 2/3) &= (2, 1, 1), & c(1, 2/3) &= (2, 2, 0), \\
 c(0, 1) &= (3, 0, -1), & c(1/2, 1) &= (3, 1, 1/2), & c(1, 1) &= (3, 2, -2).
 \end{aligned}$$

Construimos las matrices de coeficientes, desglosando A en tres matrices, A_x, A_y, A_z , correspondientes a las coordenadas x, y, z , respectivamente de

los puntos dato,

$$\begin{aligned}
B_U &= \begin{pmatrix} B_0^2(0) & B_1^2(0) & B_2^2(0) \\ B_0^2(1/2) & B_1^2(1/2) & B_2^2(1/2) \\ B_0^2(1) & B_1^2(1) & B_2^2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
B_V &= \begin{pmatrix} B_0^3(0) & B_1^3(0) & B_2^3(0) & B_3^3(0) \\ B_0^3(1/3) & B_1^3(1/3) & B_2^3(1/3) & B_3^3(1/3) \\ B_0^3(2/3) & B_1^3(2/3) & B_2^3(2/3) & B_3^3(2/3) \\ B_0^3(1) & B_1^3(1) & B_2^3(1) & B_3^3(1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8/27 & 4/9 & 2/9 & 1/27 \\ 1/27 & 2/9 & 4/9 & 8/27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \\
A_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \\
C_x &= B_U^{-1} A_x (B_V^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \\
C_y &= B_U^{-1} A_y (B_V^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \\
C_z &= B_U^{-1} A_z (B_V^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 8/3 & -2/3 & -1 \\ 2 & 31/6 & 1/12 & 5/2 \\ 0 & 7/3 & 1/6 & -2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

al igual que las matrices solución, C_x , C_y , C_z , que nos proporcionan las coordenadas de los vértices de la malla de control.

La malla de control para dicha superficie está determinada, pues, de manera única,

$$\begin{aligned}
&\{(0, 0, 0), (1, 0, 8/3), (2, 0, -2/3), (3, 0, -1); \\
&(0, 1, 2), (1, 1, 31/6), (2, 1, 1/12), (3, 1, 5/2); \\
&(0, 2, 0), (1, 2, 7/3), (2, 2, 1/6), (3, 2, -2)\},
\end{aligned}$$

y la parametrización correspondiente es

$$c(u, v) = \left(3v, 2u, \frac{27}{2}(uv^3 - uv^2) + 9v^3 + 18(u^2v^2 - v^2 - u^2v^3) \right)$$

$$+ 3uv + 8v + 4(u - u^2 - u^2v)).$$

Otra opción, mucho más frecuente, es interpolar mediante superficies B-spline bicúbicas. El planteamiento es esencialmente el mismo, sólo hay que sustituir en nuestro sistema los polinomios de Bernstein por funciones B-spline.

Supongamos que nuestros datos deben verificar $a_{i,j} = c(u_i, v_j)$, para $i = 0, \dots, M$, $j = 0, \dots, N$. Podemos fijar u_i e interpolar mediante un *spline* cúbico los puntos de la fila correspondiente, $\{a_{i,0}, \dots, a_{i,N}\}$. Obtenemos $M + 1$ polígonos B-spline, uno por cada fila, que forman una matriz de puntos $\{\tilde{d}_{0,0}, \dots, \tilde{d}_{M,N+2}\}$. Interpolamos con *splines* cúbicos cada columna $\{\tilde{d}_{0,j}, \dots, \tilde{d}_{M,j}\}$ y obtenemos una familia de $N + 3$ polígonos B-spline, $\{d_{0,0}, \dots, d_{M+2,N+2}\}$, que constituyen la malla B-spline de la superficie interpolante. Las sucesiones de nudos son las propias $\{u_0, \dots, u_M\}$, $\{v_0, \dots, v_N\}$, con los nudos inicial y final repetidos tres veces. Obviamente, hace falta imponer condiciones en los extremos para que el problema de interpolación tenga solución única. [Ejemplo](#).

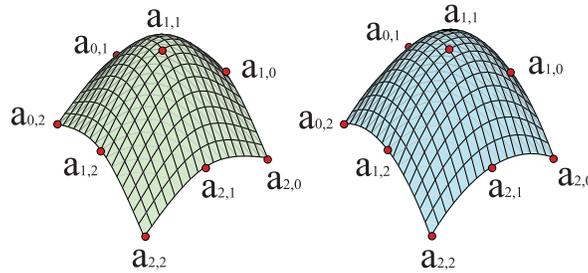


Figura 21: Superficie spline cúbica interpolante de una malla de 3×3 puntos con condiciones naturales y tangentes de Bessel

También podríamos haber resuelto el problema interpolando primero las columnas de datos y después las filas de vértices obtenidos.

En general, no es de esperar que nuestros datos estén organizados en el espacio de acuerdo a un patrón establecido, menos aún una malla aproximadamente rectangular. Lo usual es que debamos asignar a cada dato a_i unos parámetros (u_i, v_i) que no estén situados sobre una malla rectangular.

Consideremos el problema de aproximación, en el cual queremos obtener una superficie de bigrado (m, n) que aproxime un conjunto de datos,

$\{a_0, \dots, a_M\}$, tales que $a_i = c(u_i, v_i)$. El sistema lineal del problema,

$$\begin{pmatrix} B_0^m(u_0)B_0^n(v_0) & \cdots & B_m^m(u_0)B_n^n(v_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_0^m(u_M)B_0^n(v_M) & \cdots & B_m^m(u_M)B_n^n(v_M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{0,0} \\ \vdots \\ c_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_M \end{pmatrix}, \quad (28)$$

tiene $(m + 1) \cdot (n + 1)$ incógnitas para $M + 1$ ecuaciones, así que para un número alto de datos, el sistema está sobredeterminado.

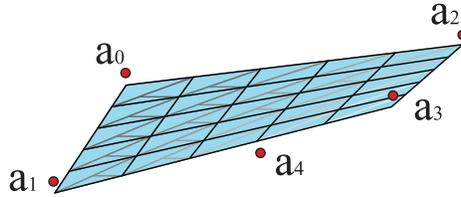


Figura 22: Superficie spline de bigrado (1,1) aproximante de una malla de 5 puntos

Recurrimos, pues, a la aproximación por mínimos cuadrados. Si escribimos nuestro sistema como $BC = A$, lo podemos transformar, como hicimos en el problema equivalente para curvas, en un problema de $(m + 1) \cdot (n + 1)$ ecuaciones e incógnitas,

$$B^t BC = B^t A, \quad (29)$$

que, en principio, es abordable, aunque para un número elevado de datos el sistema está mal condicionado y no es soluble numéricamente.

En el caso de que el número de datos sea exactamente igual al número de incógnitas, volvemos a caer en un problema de interpolación y no precisamos usar (29), sino directamente (28). Curiosamente, este problema no siempre tiene solución.

Si intercambiamos entre sí los parámetros de dos puntos dato, $(u_i, v_i) \leftrightarrow (u_j, v_j)$, el determinante de la matriz, B , del sistema cambia de signo, ya que lo único que hacemos es intercambiar dos de sus filas. Por tanto, si hacemos el cambio de parámetros de manera continua, en algún momento alcanzaremos unos valores de los parámetros para los cuales el determinante se anula y el problema de interpolación no tendrá solución. Es un problema mal planteado, pues.

Esto no sucedía en el caso de curvas, ya que no tiene sentido alterar el orden de las filas, ya que se supone que el parámetro u está ordenado, lo cual no sucede, por contra, en el plano, que carece de un orden.

Como ya sucedía en el caso de las curvas, no es común tener los parámetros (u_i, v_i) de los datos, sino que el diseñador tendrá que imponerlos de alguna manera eficiente. Esta es una tarea ardua y complicada.

Una opción sería proyectar los puntos sobre un plano, por ejemplo, el XY y leer las coordenadas (x_i, y_i) de los datos como parámetros, transformándolos si es preciso mediante un cambio de escala para que estén contenidos en nuestro dominio, el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

Veamos un ejemplo. Consideremos una malla de cinco puntos en el espacio, $\{(0, 0, 1/4), (1, 0, 1/3), (0, 1, 1/2), (1, 1, 3/4), (1/2, 1/2, 1/4)\}$ y una superficie parametrizada, $c(u, v)$, desconocida para la cual se verifica

$$a_0 = c(0, 0), \quad a_1 = c(1, 0), \quad a_2 = c(0, 1), \quad a_3 = c(1, 1), \quad a_4 = c(1/2, 1/2).$$

Queremos aproximar dicha superficie por un paraboloides hiperbólico parametrizado (superficie de bigrado $(1, 1)$). La mejor aproximación la proporciona la superficie cuya malla de control está formada por cuatro vértices,

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} B_0^1(0)B_0^1(0) & B_0^1(0)B_1^1(0) & B_1^1(0)B_0^1(0) & B_1^1(0)B_1^1(0) \\ B_0^1(1)B_0^1(0) & B_0^1(1)B_1^1(0) & B_1^1(1)B_0^1(0) & B_1^1(1)B_1^1(0) \\ B_0^1(0)B_0^1(1) & B_0^1(0)B_1^1(1) & B_1^1(0)B_0^1(1) & B_1^1(0)B_1^1(1) \\ B_0^1(1)B_0^1(1) & B_0^1(1)B_1^1(1) & B_1^1(1)B_0^1(1) & B_1^1(1)B_1^1(1) \\ B_0^1(\frac{1}{2})B_0^1(\frac{1}{2}) & B_0^1(\frac{1}{2})B_1^1(\frac{1}{2}) & B_1^1(\frac{1}{2})B_0^1(\frac{1}{2}) & B_1^1(\frac{1}{2})B_1^1(\frac{1}{2}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad B^t B = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 17 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 17 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 17 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 17 \end{pmatrix}, \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad B^t A = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & 18 & 9 \\ 18 & 2 & 19/3 \\ 18 & 18 & 13 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} c_{0,0} \\ c_{0,1} \\ c_{1,0} \\ c_{1,1} \end{pmatrix} = (B^t B)^{-1} B^t A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5/24 \\ 0 & 1 & 11/24 \\ 1 & 0 & 7/24 \\ 1 & 1 & 17/24 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

que podemos leer directamente a partir de las filas de la matriz C que hemos obtenido, $\{(0, 0, 5/24), (0, 1, 11/24); (1, 0, 7/24), (1, 1, 17/24)\}$, es decir, la mejor aproximación la proporciona la parametrización $(u, v, uv/6 + v/4 + u/12 + 5/24)$.