

Tema 6: Generación de superficies

Leonardo Fernández Jambrina

E.T.S.I. Navales, Universidad Politécnica de Madrid

Avenida de la Memoria 4

E-28040-Madrid, España

Correo-e: leonardo.fernandez@upm.es

1. Introducción

Las superficies producto son una notable aportación al diseño, pero existen otros procedimientos para generar superficies, algunos de ellos anteriores a la aparición de las NURBS. Estos formalismos alternativos están basados en curvas, lo cual es la situación habitual en la industria. Lo usual es trazar varias secciones del objeto, un avión, un buque, . . . , según planos longitudinales y transversales, de modo que quede acotado por una malla de curvas en el espacio. Sólo resta, por tanto, interpolar sobre dicha malla para definir una superficie admisible del objeto, dentro de unas tolerancias de curvatura, dimensiones, volumen, . . .

Nuestro objetivo, pues, es describir maneras sencillas de rellenar con una superficie el espacio entre dos, tres o cuatro curvas, lo cual se logra, entre otros métodos, con superficies regladas, traslacionales y de Coons. Trataremos en lo posible de relacionar estos esquemas con nuestro formalismo.

Otras superficies generadas a partir de curvas son las superficies de revolución, las cuales, por su simetría, que comparten con numerosas piezas y partes de los objetos de la industria, son especialmente relevantes en el diseño. Les dedicaremos, pues, un apartado en este tema.

Aparte, en algunas industrias basadas principalmente en el acero, como es la naval, es característico el uso de planchas que no se pueden deformar, lo cual implicaría fundición, sino tan sólo doblar o enrollar, es decir, manipulaciones que no supongan la aparición de curvatura en la plancha. Así pues,

es fundamental el diseño, en lo posible, por superficies de curvatura nula, llamadas desarrollables, o que se les aproximen dentro de una tolerancia.

Finalmente, las superficies producto tenían el problema de no poder representar superficies cerradas complicadas, más allá del toro o del cilindro, o de requerir el uso de mallas degeneradas para cubrir toda una esfera. Incluso a la hora de interpolar una nube de puntos en el espacio, los resultados que ofrecen estas superficies no son muy buenos si los datos se alejan de una malla “rectangular”.

Por ello, es conveniente estudiar una generalización un poco más complicada de las curvas de Bézier, aunque igualmente natural, basada en mallas triangulares, en vez de rectangulares. Estas mallas son mucho más versátiles, como prueba su utilización en campos, en principio alejados del diseño, como son la resolución de ecuaciones diferenciales y el cálculo de estructuras por elementos finitos.

2. Superficies traslacionales

[Vídeo de Superficies traslacionales](#)

Las superficies traslacionales son la solución más sencilla a un problema de determinación de superficies: supongamos que tenemos dos curvas parametrizadas, $c_1(u)$, $d_1(v)$, $u, v \in [0, 1]$, que se cortan en el punto inicial, $c_1(0) = a = d_1(0)$. Queremos hallar una superficie parametrizada $c(u, v)$ que pase por ambas curvas, de modo que $c(0, v) = d_1(v)$, $c(u, 0) = c_1(u)$.

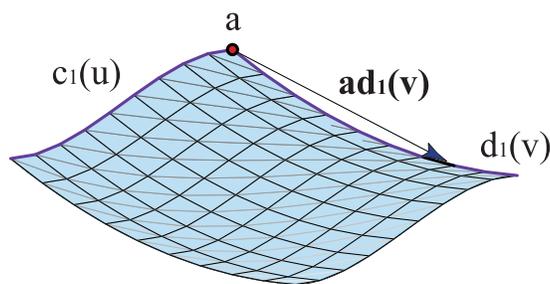


Figura 1: Superficie traslacional

Obviamente, hay infinitas superficies que son solución de este problema,

pero la más sencilla consiste en deslizar la curva $c_1(u)$ paralelamente a sí misma a lo largo de la curva $d_1(v)$. **Ejemplo.** Esto se consigue trasladando el punto $c_1(u)$ por el vector $\mathbf{ad}_1(\mathbf{v})$, es decir,

$$c(u, v) = c_1(u) + \mathbf{ad}_1(\mathbf{v}) = c_1(u) + d_1(v) - a. \quad (1)$$

Dada la simetría de la expresión, el mismo resultado se alcanza trasladando la curva $d_1(v)$ a lo largo de $c_1(u)$.

Nótese que estas superficies están caracterizadas por la condición de *twist* nulo,

$$\frac{\partial^2 c(u, v)}{\partial u \partial v} = 0, \quad (2)$$

ya que la parametrización no posee ningún término que dependa de u y de v a la vez.

Estas superficies se denominan, como ya anunciamos en el tema precedente, **superficies traslacionales**.

Por ejemplo, si queremos construir una superficie traslacional que se apoye sobre las curvas $c_1(u) = (u, 1, u^2)$ y $d_1(0, v + 1, v^3)$, que se cortan en $a = (0, 1, 0)$, obtenemos la parametrización $(u, v + 1, u^2 + v^3)$, $u, v \in [0, 1]$.

No es difícil encajar este tipo de superficies en nuestro formalismo y construir, por tanto, superficies traslacionales de Bézier, racionales o *spline*. Para ello, sólo es preciso contar con dos curvas que posean dichas características.

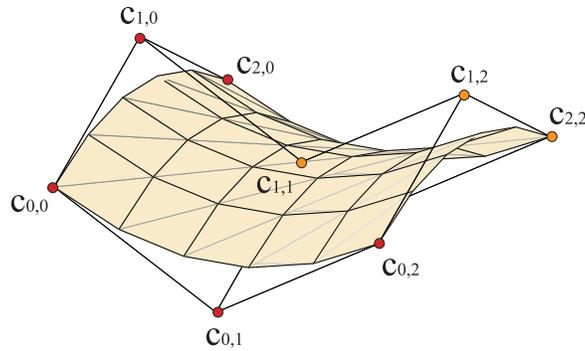


Figura 2: Superficie de Bézier traslacional

Supongamos que $c_1(u)$, $d_1(v)$ son curvas de Bézier de grados m y n y polígonos de control $\{c_{10}, \dots, c_{1m}\}$, $\{d_{10}, \dots, d_{1n}\}$, respectivamente. El punto

de corte es $c_{10} = a = d_{10}$. Como la superficie traslacional $c(u, v)$ pasa por ambas curvas, estos vértices nos proporcionan una columna y una fila del borde de la malla de control. **Ejemplo.** El resto de vértices se infieren de la condición de *twist* nulo,

$$c_{i+1,j+1} = c_{i+1,j} + c_{i,j+1} - c_{i,j}, \quad (3)$$

que implica que también el polígono de control de la curva $c_1(u)$ se traslada a lo largo del polígono de la curva $d_1(v)$. **Ejemplo.** Por tanto, en nuestro caso,

$$c_{i,j} = c_{1i} + d_{1j} - a. \quad (4)$$

Por ejemplo, si tenemos dos parábolas de polígonos de control respectivos, $\{(1, 0, 0), (2, 0, 1), (3, 0, 0)\}$, $\{(1, 0, 0), (1, 1, -1), (1, 2, 0)\}$, que se cortan en el punto $a = (1, 0, 0)$, aplicando la relación anterior, la malla de control de la superficie traslacional que las interpola es,

$$\begin{aligned} c_{0,0} &= c_{10} + d_{10} - a = (1, 0, 0) + (1, 0, 0) - (1, 0, 0) = (1, 0, 0) = c_{10} = d_{10}, \\ c_{0,1} &= c_{10} + d_{11} - a = (1, 0, 0) + (1, 1, -1) - (1, 0, 0) = (1, 1, -1) = d_{11}, \\ c_{0,2} &= c_{10} + d_{12} - a = (1, 0, 0) + (1, 2, 0) - (1, 0, 0) = (1, 2, 0) = d_{12}, \\ c_{1,0} &= c_{11} + d_{10} - a = (2, 0, 1) + (1, 0, 0) - (1, 0, 0) = (2, 0, 1) = c_{11}, \\ c_{1,1} &= c_{11} + d_{11} - a = (2, 0, 1) + (1, 1, -1) - (1, 0, 0) = (2, 1, 0), \\ c_{1,2} &= c_{11} + d_{12} - a = (2, 0, 1) + (1, 2, 0) - (1, 0, 0) = (2, 2, 1), \\ c_{2,0} &= c_{12} + d_{10} - a = (3, 0, 0) + (1, 0, 0) - (1, 0, 0) = (3, 0, 0) = c_{12}, \\ c_{2,1} &= c_{12} + d_{11} - a = (3, 0, 0) + (1, 1, -1) - (1, 0, 0) = (3, 1, -1), \\ c_{2,2} &= c_{12} + d_{12} - a = (3, 0, 0) + (1, 2, 0) - (1, 0, 0) = (3, 2, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{(1, 0, 0), (1, 1, -1), (1, 2, 0); \\ &(2, 0, 1), (2, 1, 0), (2, 2, 1); \\ &(3, 0, 0), (3, 1, -1), (3, 2, 0)\}. \end{aligned}$$

Aunque esta relación la hemos deducido para superficies de Bézier, es también válida para superficies B-spline. En cambio, no es válida para superficies racionales. Si quisiéramos aplicar una relación como (4), a los pesos

de las curvas, $\{w_{10}, \dots, w_{1m}\}$, $\{\omega_{10}, \dots, \omega_{1n}\}$, podríamos obtener pesos negativos por culpa de la resta. La solución correcta la obtenemos directamente de la definición de superficie traslacional,

$$\begin{aligned}
c(u, v) &= c_1(u) + d_1(v) - a = \frac{\sum_{i=0}^m w_{1i} c_{1i} B_i^m(u)}{\sum_{i=0}^m w_{1i} B_i^m(u)} + \frac{\sum_{j=0}^n \omega_{1j} d_{1j} B_j^n(v)}{\sum_{j=0}^n \omega_{1j} B_j^n(v)} - a \\
&= \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{1i} \omega_{1j} (c_{1i} + d_{1j} - a) B_i^m(u) B_j^n(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{1i} \omega_{1j} B_i^m(u) B_j^n(v)},
\end{aligned}$$

donde $c_{10} = a = d_{10}$.

De esta expresión podemos leer ya directamente los pesos y los vértices de la malla de control de la superficie,

$$w_{i,j} = w_{1i} \omega_{1j}, \quad c_{i,j} = c_{1i} + d_{1j} - a, \quad (5)$$

que es también válida para superficies B-spline racionales.

3. Superficies regladas

[Vídeo de Superficies regladas y de Coons](#)

Otro problema de interpolación de superficies, emparentado con el que da lugar a las superficies traslacionales, es aquel en el que las curvas directrices no se cortan necesariamente.

Supongamos que tenemos dos curvas parametrizadas, $c_1(u)$, $c_2(u)$, en el mismo intervalo $u \in [0, 1]$ y queremos construir una superficie, $c(u, v)$, cuyo borde contenga a ambas,

$$c(u, 0) = c_1(u), \quad c(u, 1) = c_2(u). \quad (6)$$

Una solución consiste en enlazar cada punto de la primera curva, $c_1(u_0)$, con aquel de la segunda que le corresponde por su valor del parámetro u ,

$c_2(u_0)$. En principio podríamos emplear cualquier tipo de curvas generatrices, pero el caso más sencillo es aquel en el que se toman rectas. Son las **superficies regladas**. **Ejemplo.** Por su simplicidad, suelen estar incorporadas como opción en cualquier aplicación de diseño basada en curvas.

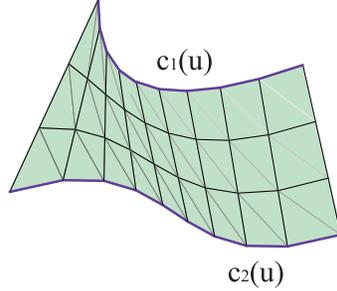


Figura 3: Superficie reglada

Haciendo uso de la parametrización de la recta que pasa por dos puntos, la parametrización de la superficie reglada es

$$c(u, v) = (1 - v)c_1(u) + vc_2(u), \quad u, v \in [0, 1]. \quad (7)$$

Por ejemplo, la superficie reglada que se apoya en las curvas parametrizadas $c_1(u) = (u, 0, u^3)$, $c_2(u) = (u, 1, u^2)$ tiene por parametrización, para $u, v \in [0, 1]$, $c(u, v) = (u, v, u^3 - u^3v + u^2v)$.

Construir superficies regladas de Bézier no es ningún problema, ya que si $c_1(u)$, $c_2(u)$ son curvas de grado m y polígonos de control $\{c_{10}, \dots, c_{1m}\}$, $\{c_{20}, \dots, c_{2m}\}$, la superficie reglada necesariamente será de bigrado $(m, 1)$, con lo cual la única posibilidad es que su malla de control esté formada únicamente por las dos columnas del borde, que no son sino los polígonos de ambas curvas, $\{c_{10}, c_{20}; \dots; c_{1m}, c_{2m}\}$. **Ejemplo.**

Por ejemplo, si queremos construir una superficie reglada que se apoye en dos parábolas, cuyos polígonos de control son $\{(0, 0, 0), (1, 0, 1), (2, 0, 0)\}$, $\{(0, 1, 0), (3/2, 1, 2), (3, 2, 1)\}$, la malla de control que obtenemos para la superficie es $\{(0, 0, 0), (0, 1, 0); (1, 0, 1), (3/2, 1, 2); (2, 0, 0), (3, 2, 1)\}$.

Este resultado es válido asimismo para superficies regladas B-spline. Para superficies racionales o B-spline racionales, sólo es preciso añadir la matriz de pesos que, de acuerdo con el razonamiento anterior, está formada por los pesos de las dos curvas, $\{w_{10}, w_{20}; \dots; w_{1m}, w_{2m}\}$.

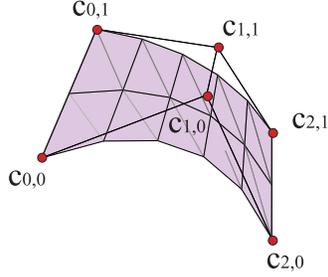


Figura 4: Superficie de Bézier reglada

Nótese que de este modo obtenemos una parametrización de la superficie reglada,

$$c(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \{w_{1i}c_{1i}B_i^m(u)(1-v) + w_{2i}c_{2i}B_i^m(u)v\}}{\sum_{i=0}^m \{w_{1i}B_i^m(u)(1-v) + w_{2i}B_i^m(u)v\}},$$

que difiere de la que se planteaba inicialmente para estas superficies,

$$\tilde{c}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m w_{1i}c_{1i}B_i^m(u)}{\sum_{i=0}^m w_{1i}B_i^m(u)}(1-v) + \frac{\sum_{i=0}^m w_{2i}c_{2i}B_i^m(u)}{\sum_{i=0}^m w_{2i}B_i^m(u)}v.$$

Pero, a pesar de las apariencias, sigue tratándose de una superficie reglada, ya que los puntos $c_1(u)$ y $c_2(u)$ de las curvas están unidos por un tramo recto dentro de la superficie, como corresponde a la definición de estas superficies, aunque la parametrización del segmento sea distinta en $c(u, v)$ y en $\tilde{c}(u, v)$.

4. Superficies desarrollables

Un caso particular de superficies regladas son las superficies desarrollables. Geométricamente se caracterizan por tener curvatura gaussiana nula, lo

cual quiere decir que son intrínsecamente planas. Son planos o regiones planas que se sumergen en el espacio sin deformarse. A lo sumo se doblan para formar conos, cilindros ... Por ello se pueden extender sobre el plano, tras realizarles algunos cortes. De ahí el nombre de **superficies desarrollables**.

Consideremos una superficie desarrollable parametrizada por $c(u, v)$. Si $n(u, v)$ es un vector normal a la superficie en el punto $c(u, v)$, la condición de curvatura nula se expresa como

$$0 = \begin{vmatrix} c_{uu} \cdot n & c_{uv} \cdot n \\ c_{uv} \cdot n & c_{vv} \cdot n \end{vmatrix}_{(u,v)}, \quad (8)$$

que en el caso de que estemos considerando una parametrización reglada,

$$\begin{aligned} c_u(u, v) &= (1 - v)c_{1u}(u) + vc_{2u}(u), & c_v(u, v) &= c_2(u) - c_1(u), \\ c_{vv}(u, v) &= 0, & c_{uv}(u, v) &= c_{2u}(u) - c_{1u}(u), \end{aligned}$$

se traduce en una condición mucho más sencilla,

$$c_{uv}(u, v) \cdot (c_u(u, v) \times c_v(u, v)) = 0, \quad (9)$$

teniendo en cuenta que el producto vectorial de las derivadas parciales de la parametrización define un vector normal a la superficie. Este resultado expresa que la superficie es desarrollable si $c_{uv}(u, v)$, $c_u(u, v)$, $c_v(u, v)$ están en un mismo plano para cada par de valores de los parámetros.

La condición (9) se puede desgranar aún más. Veamos que sucede para $v = 0$. En este caso, como $c_u(u, 0) = c_{1u}$, la condición se simplifica bastante, desglosando el producto vectorial,

$$\begin{aligned} 0 &= (c_{2u}(u) - c_{1u}(u)) \cdot (c_{1u} \times (c_2(u) - c_1(u))) \\ &= c_{2u}(u) \cdot (c_{1u}(u) \times (c_2(u) - c_1(u))), \end{aligned} \quad (10)$$

y tiene una interpretación geométrica muy clara, ya que expresa que los dos vectores tangentes a las curvas, $c_{1u}(u)$, $c_{2u}(u)$, para el mismo valor del parámetro u , y el vector que une los puntos $c_1(u)$, $c_2(u)$ son coplanarios.

A la misma conclusión se llega evaluando (9) para $v = 1$. El resto de casos están comprendidos en (10), ya que $c_u(u, v)$ es combinación de $c_{1u}(u)$ y $c_{2u}(u)$.

En resumen, una superficie reglada es desarrollable si y sólo si para todo par de puntos homólogos, los generadores de las curvas y de la recta que los une están en un mismo plano.

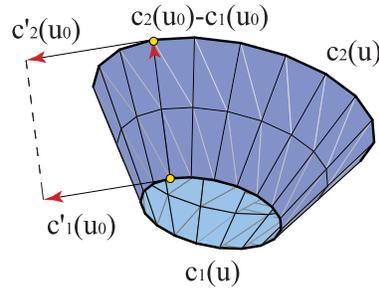


Figura 5: Superficie desarrollable

Esta condición, pese a su sencillez, es molesta para implementar en el diseño, ya que exige estar pendiente de ángulos y planos.

Otra manera de verlo se obtiene dándose cuenta de que si $c_{1u}(u)$, $c_{2u}(u)$, $c_2(u) - c_1(u)$ están en el mismo plano para un valor determinado de u , entonces $c_u(u, v)$, $c_v(u, v)$ generan el mismo plano para ese valor de u , sea cual sea v . Por tanto, el plano tangente a la superficie es el mismo en cada punto de la recta generatriz que une $c_1(u)$ y $c_2(u)$. O sea, una superficie desarrollable es una superficie reglada con plano tangente común a lo largo de cada recta generatriz.

Ejemplos sencillos de superficies desarrollables, aparte del propio plano, son las superficies cilíndricas y cónicas.

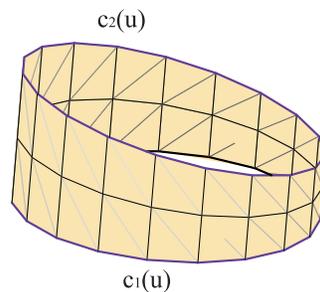


Figura 6: Superficie cilíndrica

Las **superficies cilíndricas** son las superficies regladas, o partes de ellas, en las que las curvas $c_1(u)$, $c_2(u)$ se obtienen una a partir de otra por medio

de una traslación,

$$c_2(u) = c_1(u) + \mathbf{v}, \quad c(u, v) = c_1(u) + v\mathbf{v}, \quad (11)$$

con lo cual $c_{1u}(u) \equiv c_{2u}(u)$ y la condición de coplanariedad (10) se satisface trivialmente.

A la vista de (11), las superficies cilíndricas se pueden interpretar como superficies traslacionales en las que la segunda curva es una recta, $d_1(v) = a + v\mathbf{v}$.

O, con mayor generalidad, las superficies cilíndricas son superficies regladas en las cuales todas las rectas generatrices son paralelas.

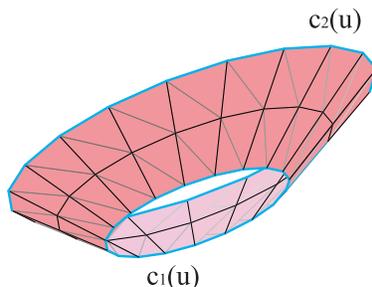


Figura 7: Superficie cónica

Las **superficies cónicas** se generan mediante el haz de rectas que une cada punto de una curva $c_1(u)$ con un punto fijo a , el vértice del cono,

$$c(u, v) = (1 - v)c_1(u) + va. \quad (12)$$

O sea, que en el caso en el que $v \in [0, 1]$, la curva $c_2(u)$ ha degenerado en el punto a .

Por ello, como $c_u(u, v)$ y $c_{uv}(u, v)$ son ambas proporcionales a $c_{1u}(u)$, la condición de coplanariedad vuelve a ser trivial.

Veamos en qué se traduce la condición de desarrollable para superficies de Bézier. En este caso, los vectores tangentes a las curvas son

$$c_{1u}(u) = m \sum_{i=0}^{m-1} \Delta c_{1i} B_i^{m-1}(u), \quad c_{2u}(u) = m \sum_{i=0}^{m-1} \Delta c_{2i} B_i^{m-1}(u),$$

y el vector director de cada recta generatriz de la superficie reglada es

$$c_2(u) - c_1(u) = \sum_{i=0}^m (c_{2i} - c_{1i}) B_i^m(u).$$

Estudiemos la condición de desarrollable en los extremos de la curva. Para $u = 0$,

$$c_{1u}(0) = m\Delta c_{10}, \quad c_{2u}(0) = m\Delta c_{20}, \quad c_2(0) - c_1(0) = c_{20} - c_{10},$$

de donde se infiere que la superficie, para ser desarrollable, tendrá que tener en un mismo plano los vértices c_{10} , c_{20} , c_{11} , c_{21} . Es decir, la primera celda de la malla de control de la superficie es un cuadrilátero plano. Del mismo modo, para $u = 1$,

$$c_{1u}(1) = m\Delta c_{1m-1}, \quad c_{2u}(1) = m\Delta c_{2m-1}, \quad c_2(1) - c_1(1) = c_{2m} - c_{1m},$$

se obtiene una condición similar. La última celda de la malla de control, la formada por los vértices c_{1m-1} , c_{2m-1} , c_{1m} , c_{2m} , es un cuadrilátero plano.

Para el caso de regladas de bigrado $(1, 1)$, es decir, una única celda en la malla, este hecho refleja algo ya conocido: si la celda es plana, la superficie es plana y, por tanto, desarrollable. Si la celda no es plana, tenemos un paraboloides hiperbólico, que no es una superficie desarrollable.

Por ello, es tentador pensar que la condición de coplanariedad se traduce directamente a superficies de Bézier en términos de la malla de control, lo cual es falso, incluso al nivel más bajo, una reglada de bigrado $(2, 1)$.

Por ejemplo, comprobemos que la superficie reglada de malla de control $\{(0, -1, 1), (0, -2, 0); (0, 0, 1), (0, 0, 0); (2, 0, 1), (1, 0, -1)\}$ no es desarrollable, a pesar de que la primera celda es un cuadrilátero plano, situado en el plano $x = 0$, y la segunda, también, en el plano $y = 0$,

$$\begin{aligned} c(u, v) &= (2u^2 - u^2v, 2uv - v - u^2v - 1 + 2u - u^2, 1 - u^2v - v), \\ c_u(u, v) &= (4u - 2uv, 2v - 2uv + 2 - 2u, -2uv), \\ c_v(u, v) &= (-u^2, 2u - 1 - u^2, -u^2 - 1), \\ c_{uv}(u, v) &= (-2u, 2 - 2u, -2u), \\ c_{uv}(u, v) \cdot (c_u(u, v) \times c_v(u, v)) &= 12u - 8u^3 - 4u^2, \end{aligned}$$

que no se anula para todos los valores, a pesar de que, obviamente, se anula para los extremos, $u = 0$, $u = 1$.

No es tan sencillo, pues, caracterizar las superficies desarrollables de bigrado $(1, n)$ en términos de su malla de control.

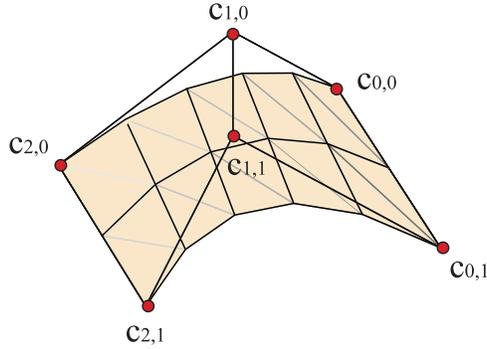


Figura 8: Superficie reglada no desarrollable

5. Superficies de Coons

[Vídeo de Superficies regladas y de Coons](#)

Finalmente, abordaremos un problema de interpolación que combina los que dan origen a las superficies regladas y traslacionales.

Supongamos que tenemos cuatro curvas parametrizadas, $c_1(u)$, $c_2(u)$, $d_1(v)$, $d_2(v)$, $u, v \in [0, 1]$, que forman un cuadrilátero curvo, es decir,

$$\begin{aligned} c_1(0) &= a = d_1(0), & c_1(1) &= b = d_2(0), \\ c_2(0) &= c = d_1(1), & c_2(1) &= d = d_2(1), \end{aligned} \quad (13)$$

y queremos hallar una superficie, $c(u, v)$, que pase por las cuatro curvas,

$$\begin{aligned} c(u, 0) &= c_1(u), & c(u, 1) &= c_2(u), \\ c(0, v) &= d_1(v), & c(1, v) &= d_2(v). \end{aligned} \quad (14)$$

Al igual que en los problemas anteriores, existen infinitas superficies que satisfacen estas condiciones. Nos limitaremos a proporcionar una de las más sencillas.

Denotaremos por $c_c(u, v)$ la superficie reglada que se apoya en $c_1(u)$ y $c_2(u)$ y por $c_d(u, v)$, la que se apoya en $d_1(v)$ y $d_2(v)$,

$$c_c(u, v) = (1 - v)c_1(u) + vc_2(u), \quad c_d(u, v) = (1 - u)d_1(v) + ud_2(v). \quad (15)$$

Obviamente, cada una de estas superficies satisface la mitad de las condiciones (14), con los otros dos bordes rectos en lugar de curvos,

$$\begin{aligned} c_c(0, v) &= (1 - v)a + vc, & c_c(1, v) &= (1 - v)b + vd, \\ c_d(u, 0) &= (1 - u)a + ub, & c_d(u, 1) &= (1 - u)c + ud, \end{aligned}$$

Por tanto, si a la suma de las parametrizaciones regladas $c_c(u, v)$ y $c_d(u, v)$ le restamos otra reglada, un paraboloides hiperbólico, que interpole entre los bordes espúreos,

$$\begin{aligned} c_{cd}(u, v) &= (1 - u)((1 - v)a + vc) + u((1 - v)b + vd) \\ &= (1 - v)((1 - u)a + ub) + v((1 - u)c + ud), \end{aligned} \quad (16)$$

obtenemos una parametrización que es una solución de nuestro problema,

$$c(u, v) := c_c(u, v) + c_d(u, v) - c_{cd}(u, v), \quad u, v \in [0, 1]. \quad (17)$$

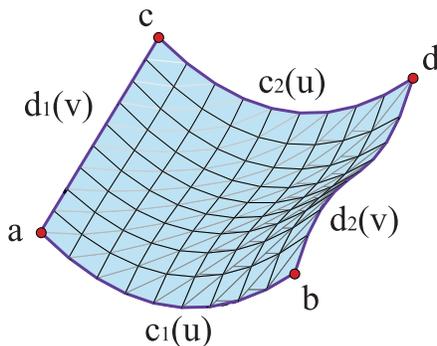


Figura 9: Superficie de Coons

Estas superficies se denominan **superficies de Coons** y generalizan e incluyen las superficies regladas. **Ejemplo.** En el caso en el que $d_1(v)$, $d_2(v)$ son rectas, las parametrizaciones $c_d(u, v)$ y $c_{cd}(u, v)$ son iguales y la parametrización de Coons se reduce a la reglada $c_c(u, v)$.

Esto es bastante obvio. No lo es tanto que las superficies de Coons incluyan también a las superficies traslacionales: si en una superficie de Coons las curvas opuestas están relacionadas por una traslación, la superficie resultante es traslacional. Lo comprobamos.

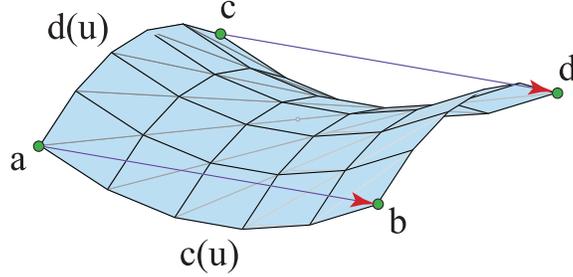


Figura 10: Las superficies traslacionales son superficies de Coons

Supongamos que $c_1(u) = c(u)$, $c_2(u) = c(u) + \mathbf{ac}$, $d_1(v) = d(v)$, $d_2(v) = d(v) + \mathbf{ab}$, para implementar la condición de translación. La parametrización de la superficie de Coons es,

$$\begin{aligned} c(u, v) &= (1-v)c(u) + v(c(u) + c - a) + (1-u)d(v) + u(d(v) + b - a) \\ &\quad - (1-u)(1-v)a - (1-u)vc - u(1-v)b - uvd \\ &= c(u) + d(v) - a + uv(b - d + c - a) = c(u) + d(v) - a, \end{aligned}$$

puesto que por la condición de ser curvas trasladadas, precisamente $\mathbf{ab} = \mathbf{cd}$.

Por ejemplo, si queremos construir una superficie parametrizada que interpole el espacio comprendido entre las curvas parametrizadas $c_1(u) = (u, 0, u^2)$, $c_2(u) = (u, 1, u^3 + 1)$, $d_1(v) = (0, v, v)$, $d_2(v) = (1, v, v^2 + 1)$, la parametrización de Coons que se obtiene es

$$\begin{aligned} a &= c_1(0) = d_1(0) = (0, 0, 0), & b &= c_1(1) = d_2(0) = (1, 0, 1), \\ c &= c_2(0) = d_1(1) = (0, 1, 1), & d &= c_2(1) = d_2(1) = (1, 1, 2), \\ c_c(u, v) &= (1-v)c_1(u) + vc_2(u) = (1-v)(u, 0, u^2) + v(u, 1, u^3 + 1), \\ c_d(u, v) &= (1-u)d_1(v) + ud_2(v) = (1-u)(0, v, v) + u(1, v, v^2 + 1), \\ c_{cd}(u, v) &= (1-u)((1-v)a + vc) + u((1-v)b + vd) \\ &= (1-u)v(0, 1, 1) + u((1-v)(1, 0, 1) + v(1, 1, 2)), \\ c(u, v) &= (u, v, u^2 - vu^2 + v + vu^3 - uv + uv^2). \end{aligned}$$

Después de haber estudiado las superficies regladas, no es difícil describir las superficies polinómicas de Coons. Supongamos que $c_1(u)$, $c_2(u)$ son curvas de grado m y polígonos de control $\{c_{10}, \dots, c_{1m}\}$, $\{c_{20}, \dots, c_{2m}\}$, respectivamente. A su vez, $d_1(v)$, $d_2(v)$ son curvas de grado n y polígonos $\{d_{10}, \dots, d_{1n}\}$, $\{d_{20}, \dots, d_{2n}\}$.

Las superficies regladas $c_c(u, v)$, $c_d(u, v)$, $c_{cd}(u, v)$ son, respectivamente, de bigrado $(m, 1)$, $(1, n)$, $(1, 1)$ y conocemos sus mallas de control. Por tanto, para obtener la malla de la superficie de Coons, tendremos que elevar el bigrado de todas ellas hasta (m, n) . **Ejemplo.** Así pues, los vértices de la malla de control de la superficie de Coons, $\{c_{0,0}, \dots, c_{m,n}\}$, se podrán expresar como

$$c_{i,j} = c_{ci,j} + c_{di,j} - c_{cdi,j}, \quad (18)$$

en función de los vértices respectivos de las tres superficies. **Ejemplo.**

$$\begin{aligned} c_{ci,j} &= \frac{n-j}{n}c_{1i} + \frac{j}{n}c_{2i}, \\ c_{di,j} &= \frac{m-i}{m}d_{1j} + \frac{i}{m}d_{2j}, \\ c_{cdi,j} &= \frac{n-j}{n} \left(\frac{m-i}{m}a + \frac{i}{m}b \right) + \frac{j}{n} \left(\frac{m-i}{m}c + \frac{i}{m}d \right). \end{aligned} \quad (19)$$

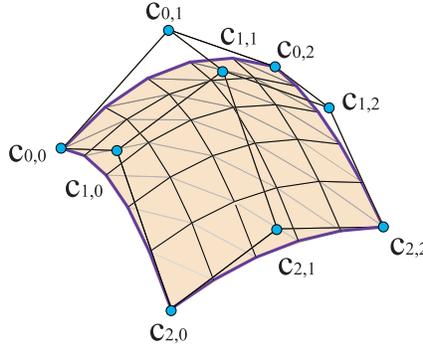


Figura 11: Superficie de Bézier de Coons

Por ejemplo, si tenemos dos curvas de Bézier, c_1 , c_2 , de grado tres, dadas por sus polígonos de control, $\{(0, 0, 0), (1/2, 0, 2), (1, 0, 3), (2, 0, 0)\}$, $\{(0, 3, 0), (1/2, 3, 3), (1, 3, 1), (2, 4, 0)\}$, y dos curvas de grado dos, d_1 , d_2 , cuyos polígonos son $\{(0, 0, 0), (0, 1, 3), (0, 3, 0)\}$, $\{(2, 0, 0), (2, 1, 2), (2, 4, 0)\}$, la superficie de Coons correspondiente de bigrado $(3, 2)$ tiene malla de control,

$$c_{0,0} = c_{10} = d_{10} = (0, 0, 0) = a, \quad c_{0,1} = d_{11} = (0, 1, 3),$$

$$\begin{aligned}
c_{0,2} &= c_{20} = d_{12} = (0, 3, 0) = c, & c_{3,0} &= c_{13} = d_{20} = (2, 0, 0) = b, \\
c_{3,1} &= d_{21} = (2, 1, 2), & c_{3,2} &= c_{23} = d_{22} = (2, 4, 0) = d \\
c_{1,0} &= c_{11} = (1/2, 0, 2), & c_{2,0} &= c_{12} = (1, 0, 3), \\
c_{1,2} &= c_{21} = (1/2, 3, 3), & c_{2,2} &= c_{22} = (1, 3, 1), \\
c_{c1,1} &= \frac{1}{2}c_{11} + \frac{1}{2}c_{21} = (1/2, 3/2, 5/2), & c_{c2,1} &= \frac{1}{2}c_{12} + \frac{1}{2}c_{22} = (1, 3/2, 2), \\
c_{d1,1} &= \frac{2}{3}d_{11} + \frac{1}{3}d_{21} = (2/3, 1, 8/3), & c_{d2,1} &= \frac{1}{3}d_{11} + \frac{2}{3}d_{21} = (4/3, 1, 7/3), \\
c_{cd1,1} &= \frac{2(a+c) + (b+d)}{6} = (2/3, 5/3, 0), \\
c_{cd2,1} &= \frac{(a+c) + 2(b+d)}{6} = (4/3, 11/6, 0), \\
c_{1,1} &= c_{c1,1} + c_{d1,1} - c_{cd1,1} = (1/2, 5/6, 31/6), \\
c_{2,1} &= c_{c2,1} + c_{d2,1} - c_{cd2,1} = (1, 2/3, 13/3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\{(0, 0, 0), (0, 1, 3), (0, 3, 0) \\
&(1/2, 0, 2), (1/2, 5/6, 31/6), (1/2, 3, 3) \\
&(1, 0, 3), (1, 2/3, 13/3), (1, 3, 1) \\
&(2, 0, 0), (2, 1, 2), (2, 4, 0)\}.
\end{aligned}$$

De igual modo podemos construir superficies de Coons B-spline, usando el algoritmo de inserción para que las tres superficies auxiliares tengan los mismos nudos. Primero elevaríamos el grado de las tres parametrizaciones hasta que todas alcancen el bigrado (m, n) y luego insertaríamos los nudos no comunes para que todas tengan las mismas sucesiones de nudos.

Las superficies de Coons racionales tampoco presentan especial problema, ya que hemos estudiado ya como construir superficies regladas a partir de curvas racionales. Sin embargo, no es trivial construir mallas de control y pesos para ellas, ya que, como vimos, las parametrizaciones regladas de la forma,

$$\tilde{c}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m w_{1i} c_{1i} B_i^m(u)}{\sum_{i=0}^m w_{1i} B_i^m(u)} (1-v) + \frac{\sum_{i=0}^m w_{2i} c_{2i} B_i^m(u)}{\sum_{i=0}^m w_{2i} B_i^m(u)} v,$$

no tienen bigrado como racionales, ya que la variable v sólo aparece en el numerador.

Otra opción consiste, como ya se hizo en el apartado de las superficies regladas, en obtener la parametrización reglada en \mathbb{R}^4 , realmente en el espacio proyectivo, y luego proyectar sobre el espacio afín, obteniéndose de este modo mallas y pesos de la forma, $\{c_{10}, \dots, c_{1m}\}$, $\{c_{20}, \dots, c_{2m}\}$, $\{w_{10}, w_{20}, \dots, w_{1m}, w_{2m}\}$, por ejemplo, para la reglada $c_c(u, v)$. Tal como se estudió, esta es una manera totalmente equivalente de construir la superficie reglada.

Sin embargo, no sucede lo mismo para las superficies de Coons. Si ingenuamente, definiéramos la malla de Coons en \mathbb{R}^4 como en (19), obtendríamos una colección de vectores $\{\mathbf{c}_{0,0}, \dots, \mathbf{c}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}\}$, donde pesos y vértices se despejan de la expresión $\mathbf{c}_{i,j} = (w_{i,j}, w_{i,j}c_{i,j})$.

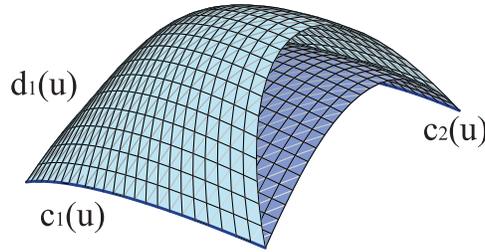


Figura 12: La superficie de Coons no se corresponde con la proyección de una superficie de Coons en \mathbb{R}^4

Esto puede causar problemas, ya que, al estar definidos los pesos mediante una resta, $w_{i,j} = w_{c_{i,j}} + w_{d_{i,j}} - w_{cd_{i,j}}$, bien pudiera suceder que se diera el caso de pesos negativos o nulos, lo cual distorsionaría notablemente la forma de la superficie.

Aparte, como ya se ha avanzado, la parametrización así construida, no se corresponde con la superficie de Coons que hemos definido, a pesar de que interpola el espacio entre las cuatro curvas. El razonamiento anterior es concluyente, ya que la mera interpolación no puede mandar puntos al infinito y el algoritmo anterior sí puede hacerlo. En la figura, la superficie proyectada es la más abombada.

Por ello, nos abstendremos de dar algoritmos más complicados para las mallas y pesos de las superficies racionales de Coons.

Las superficies de Coons se pueden emplear para interpolar una malla de curvas en el espacio, de modo que cada cuadrilátero curvo defina una superficie de Coons. La superficie global así construida será continua, pero presenta problemas a la hora de garantizar su diferenciabilidad. Consideremos una única superficie de Coons. Si la queremos enlazar con otra superficie, por ejemplo, a lo largo de la curva correspondiente a $u = 1$, $d_2(v)$, tenemos que la derivada transversal a lo largo de dicho borde es

$$\left. \frac{\partial c(u, v)}{\partial u} \right|_{u=1} = (1-v)m\Delta c_{1m-1} + vm\Delta c_{2m-1} + d_2(v) - d_1(v) + (1-v)(b-a) + v(d-c). \quad (20)$$

Por tanto, observamos un efecto no deseado. El valor de la derivada transversal en $u = 1$ depende de los valores en $u = 0$, es decir, de la curva opuesta del borde, $d_1(v)$, lo cual complica sobremanera el engarce diferenciable con una segunda superficie. [Ejemplo](#).

Esto se debe a que los polinomios de interpolación lineal, u , $1-u$, tienen derivadas que no se anulan en los bordes. Por ello, se puede generalizar la construcción de superficies de Coons empleando funciones de interpolación no lineales, de modo que este problema quede solventado.

Una solución sería utilizar los polinomios cúbicos $B_0^3(u) + B_1^3(u)$ y $B_2^3(u) + B_3^3(u)$ como funciones de interpolación o directamente utilizar los polinomios de Bernstein de grado tres. Esta última opción supone dar más datos sobre la superficie que las curvas de los bordes.

6. Superficies de revolución

[Vídeo de Superficies de revolución](#)

Como es bien sabido, las **superficies de revolución** se generan por rotación de una curva plana en torno a un eje contenido en dicho plano. [Ejemplo](#). Por ejemplo, si la curva está contenida en el plano XZ , $c_1(u) = (f(u), 0, g(u))$, una parametrización de la correspondiente superficie de revolución obtenida al girar en torno al eje Z es

$$c(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)), \quad v \in [0, 2\pi]. \quad (21)$$

Las líneas de parámetro v constante, copias rotadas de la curva original, son los meridianos de la superficie. Las líneas de u constante, circunferencias

descritas al girar los puntos de la curva, son los paralelos de la superficie, de radio $|f(u)|$.

Describir los paralelos no es complicado, ya que vimos en el tema de las curvas racionales que podíamos describir una circunferencia descomponiéndola en tres arcos iguales, de modo que el vértice intermedio de cada arco tenía peso igual a la mitad de los otros dos. O también con cuatro arcos de ángulo $\pi/2$. En este caso cada vértice intermedio tiene peso igual a $\sqrt{2}/2$ veces el de los otros.

Por tanto, para construir la malla de control de una superficie de revolución generada por una curva plana racional de polígono $\{c_0, \dots, c_n\}$ y pesos $\{w_0, \dots, w_n\}$, sólo es preciso trazar las circunferencias C_i que describen los vértices al rotar alrededor del eje Z . Los polígonos de estos arcos de circunferencia, $\{(C_i)_0, (C_i)_1, (C_i)_2\}$ son las filas de la malla de control. Es decir, la fila i -ésima de la malla de control es el polígono del arco de circunferencia descrito por c_i al girar. La columna cero será, pues, el polígono de la curva plana original, $(C_i)_0 = c_i$. [Ejemplo](#).

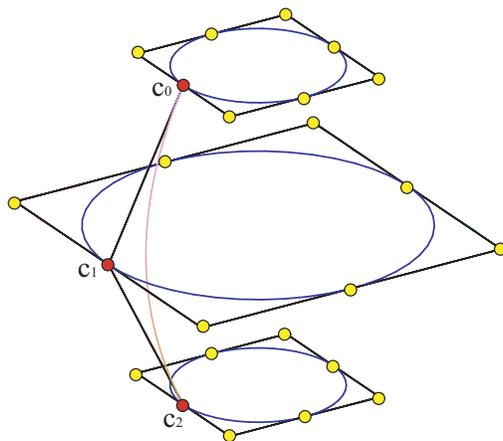


Figura 13: Malla B-spline de una superficie de revolución

Del mismo modo, la columna cero de la matriz de pesos estará formada por los pesos de la curva plana, $\{w_0, \dots, w_n\}$. Todos los arcos de circunferencia C_i tienen pesos normalizados $\{1, w, 1\}$, siendo w el coseno de la mitad del ángulo girado. Ahora bien, si el peso w_i no es uno, habrá que multiplicar todos los pesos de la fila i -ésima por este valor para que cuadren con la columna cero, $\{w_i, w_i w, w_i\}$.

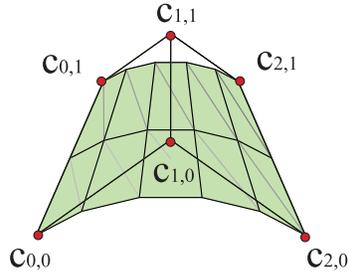


Figura 14: Cuadrante de tronco de cono

Por ejemplo, vamos a construir un tronco de cono. Un segmento en el plano XZ tiene polígono de control formado por dos únicos vértices, $\{c_0 = (a, 0, b), c_1 = (c, 0, d)\}$. Un cuadrante de la superficie se describe por la malla $\{c_{0,0} = (a, 0, b), c_{0,1} = (a, a, b), c_{0,2} = (0, a, b); c_{1,0} = (c, 0, d), c_{1,1} = (c, c, d), c_{1,2} = (0, c, d)\}$ y los pesos respectivos, $\{1, \sqrt{2}/2, 1; 1, \sqrt{2}/2, 1\}$. El resto de cuadrantes se describen con los mismos pesos y mallas simétricas en torno al eje de rotación.

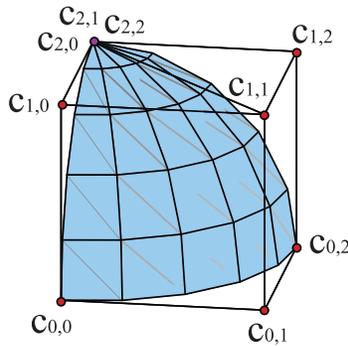


Figura 15: Octante de esfera

Un octante de esfera de radio unidad se obtiene al girar el cuadrante de circunferencia, de polígono de control $\{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ y pesos $\{1, \sqrt{2}/2, 1\}$, en torno al eje Z . La malla resultante es,

$$\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\};$$

$$(1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 1);$$

$$(0, 0, 1), (0, 0, 1), (0, 0, 1)\},$$

y los pesos, $\{1, \sqrt{2}/2, 1; \sqrt{2}/2, 1/2, \sqrt{2}/2; 1, \sqrt{2}/2, 1\}$. Nótese lo que ya se apuntaba en el tema anterior: la malla es degenerada, ya que la última fila de vértices está repetida, como corresponde al hecho de que este paralelo es en realidad un punto, el polo. Aun así, obsérvese que los pesos *no* son iguales.

La construcción anterior también es válida para curvas B-spline, de polígono $\{c_0, \dots, c_L\}$, pesos $\{w_0, \dots, w_L\}$ y nudos $\{u_0, \dots, u_K\}$. Las circunferencias C_i tendrán polígonos B-spline $\{(C_i)_0, \dots, (C_i)_{L'}\}$, que serán las filas de la malla de control. Y pesos normalizados $\{\omega_0, \dots, \omega_{L'}\}$, con lo que los pesos de la fila i -ésima serán $\{w_i\omega_0, \dots, w_i\omega_{L'}\}$. Los nudos de las circunferencias, $\{v_0, \dots, v_{K'}\}$, son los mismos para todas ellas.

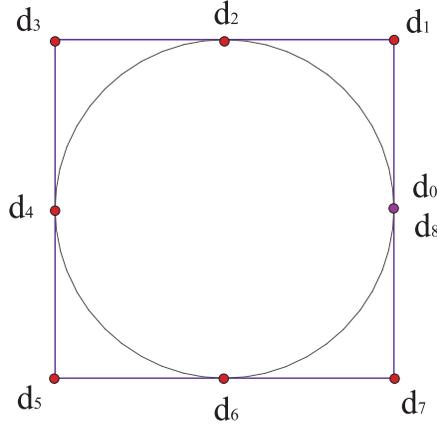


Figura 16: Circunferencia B-spline

Esto nos permite construir representaciones de toda la superficie, ya que una circunferencia completa de radio unidad en el plano $z = 0$ se puede obtener con el polígono B-spline de cuatro tramos,

$$\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0), (-1, 1, 0), (-1, 0, 0),$$

$$(-1, -1, 0), (0, -1, 0), (1, -1, 0), (1, 0, 0)\},$$

los pesos $\{1, \sqrt{2}/2, 1, \sqrt{2}/2, 1, \sqrt{2}/2, 1, \sqrt{2}/2, 1\}$ y, por último, la sucesión de nudos $\{0, 0, 1/4, 1/4, 1/2, 1/2, 3/4, 3/4, 1, 1\}$. En el [ejemplo](#) vemos cómo se construye el polígono B-spline de circunferencias con N tramos.

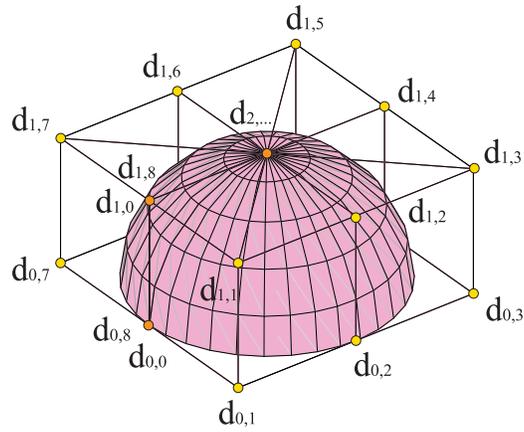


Figura 17: Semiesfera

El proceso es esencialmente el mismo. Se traslada el polígono anterior a cada punto del polígono B-spline de la curva que se va a rotar, modificando los radios y las alturas, y se multiplican los pesos, como se hacía para superficies de Bézier de revolución.