Capítulo 1

Introducción

Problema 1.1 *¿Cuáles son las coordenadas cartesianas del punto del plano x=(1,6,5) en la referencia formada por el punto (1,1,2) y los vectores (0,3,1) y (0,1,-1)?*

Solución:

El punto está expresado con coordenadas (1,6,5) en una referencia cartesiana $\{a; \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$, es decir, $(1,6,5) = a + 6\mathbf{e_1} + 5\mathbf{e_2}$. Obviamente, en esta referencia el punto a tiene coordenadas $(1,0,0)$ y los vectores e_1 y e_2, respectivamente, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

Cambiamos a una nueva referencia $\{a'; \mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}\}$, cuyas coordenadas son $a' = a + \mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e'_1} = 3\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$, $\mathbf{e'_2} = \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}$.

Por tanto, las ecuaciones de cambio de referencia son

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix},$$

pero las que nos interesan son precisamente las inversas,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/4 & 1/4 & 1/4 \\ 5/4 & 1/4 & -3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix},$$

ya que nos dan las coordenadas en la primera referencia y nos las piden en la segunda. Por tanto, operando, las coordenadas nuevas del punto son $(1,2,-1)$. $\square$

Problema 1.2 *¿Cuáles son las coordenadas baricéntricas de un punto de coordenadas cartesianas (1,2,3)?*

Solución:

Las coordenadas del punto están expresadas en una referencia cartesiana $\{a; \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ y queremos las coordenadas en la referencia baricéntrica $\{a, a+\mathbf{e_1}, a+\mathbf{e_2}\}$.

En general, un punto de coordenadas cartesianas $(1, x, y)$ tiene coordenadas baricéntricas $(1 - x - y, x, y)$. Por tanto, las coordenadas de nuestro punto son $(-4, 2, 3)$. $\square$

Problema 1.3 *¿Cuáles son las coordenadas baricéntricas de un vector de coordenadas (0,2,1)?*

Solución:

Es un problema similar al anterior, sólo que se trata de un vector. Como un vector de coordenadas cartesianas $(0, x, y)$ tiene coordenadas baricéntricas $(-x - y, x, y)$, las coordenadas de nuestro vector son $(-3, 2, 1)$. $\square$

Problema 1.4 *¿Cuáles son las coordenadas cartesianas de un punto del plano de coordenadas baricéntricas (5,-2,-2), tomando como origen de la referencia el primer punto?, ¿Y si tomo como origen el segundo punto?*

Solución:

En este caso, nos dan las coordenadas en una referencia baricéntrica $\{a, b, c\}$ y nos piden las coordenadas en la referencia cartesiana $\{a; \mathbf{ab}, \mathbf{ac}\}$. Para un punto de coordenadas baricéntricas (x_0, x_1, x_2), las coordenadas cartesianas son simplemente $(1, x_1, x_2)$. Por tanto, nuestro punto tiene coordenadas cartesianas $(1, -2, -2)$. $\square$

En el segundo caso, nos piden las coordenadas en la referencia cartesiana $\{b; \mathbf{ba}, \mathbf{bc}\}$. La resolución es similar, sólo que desaparece la segunda coordenada, en lugar de la primera, $(1, x_0, x_2)$. Por tanto, las coordenadas cartesianas son en este caso, $(1, 5, -2)$. $\square$

Problema 1.5 *¿Cuáles son las coordenadas cartesianas de un vector del plano cuyas coordenadas baricéntricas son (2,1,-3), tomando como origen el primer punto de la referencia?, ¿y si tomamos el tercer punto como origen?*

Solución:

Es un problema similar al anterior, sólo que en este caso se trata de un vector, no de un punto. Si las coordenadas baricéntricas del vector son (x_0, x_1, x_2), las coordenadas cartesianas son $(0, x_1, x_2)$. Para nuestro vector las coordenadas cartesianas son $(0, 1, -3)$. $\square$

Si tomamos como origen el tercer punto, la nueva referencia cartesiana será $\{c; \mathbf{ca}, \mathbf{cb}\}$ y las coordenadas serán $(1, x_0, x_1)$. Por tanto, las coordenadas cartesianas son en este caso, $(0, 2, 1)$. $\square$

Problema 1.6 *¿Cuáles son las coordenadas baricéntricas en una referencia formada por los puntos (1,2,-2), (2,1,-2), (0,-3,4) de un punto de coordenadas baricéntricas (-1,-8,10)?*

Solución:

Es un problema similar al primero, sólo que en coordenadas baricéntricas. El punto viene expresado como $-a - 8b + 10c$ en una referencia baricéntrica

$\{a, b, c\}$. Tenemos una segunda referencia baricéntrica, $\{a', b', c'\}$, relacionada con la primera mediante las relaciones $a' = a + 2b - 2c$, $b' = 2a + b - 2c$, $c' = -3b + 4c$, con lo cual las ecuaciones de cambio de referencia son

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} ,$$

y sus inversas,

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 4/3 & 1 \\ 1/3 & -2/3 & -1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} ,$$

que son las que necesitamos, ya que tenemos coordenadas en la primera referencia y nos las piden en la segunda. Operando, las coordenadas nuevas del vector son $(-1, 0, 2)$. □

Problema 1.7 *¿Cuál es la razón simple de los puntos del plano (1,0), (-1,1) (3,-1)?*

Solución:

Existen varias definiciones de razón simple de tres puntos a, b, c alineados, pero en este problema adoptamos como tal el cociente de los dos segmentos en lo que divide c al segmento $\overline{ab}$. En nuestro caso,

$$[a, b, c] = \frac{\mathbf{ac}}{\mathbf{cb}} = \frac{c - a}{b - c} = \frac{(2, -1)}{(-4, 2)} = -\frac{1}{2} ,$$

en cualquier referencia. □

Problema 1.8 *¿Cuál es la razón simple de los puntos del espacio (2,3,4), (5,2,1), (1,-1,0)?*

Solución:

No está definida en este caso, ya que los puntos no están alineados. Los vectores **ac** y **cb**, de coordenadas $(-1, -4, -4)$ y $(4, 3, 1)$, no son paralelos. □

Problema 1.9 *¿Cuál es la razón doble de los puntos del plano (1,1), (-1,2), (3,0), (-3,3)?*

Solución:

También en este caso existen numerosas definiciones de razón doble de cuatro puntos alineados a, b, c, d. En consonancia con la escogida para la razón simple, escogemos el cociente de las razones simples $[a, b, d]$, $[a, b, c]$. En nuestro caso,

$$[a, b, c, d] = \frac{[a, b, d]}{[a, b, c]} = \frac{\mathbf{ad}}{\mathbf{db}} \cdot \frac{\mathbf{cb}}{\mathbf{ac}} = \frac{d - a}{b - d} \cdot \frac{b - c}{c - a} = \frac{(-4, 2)}{(2, -1)} \cdot \frac{(-4, 2)}{(2, -1)} = 4 ,$$

en cualquier referencia. □

Problema 1.10 *¿A qué punto del afín corresponde un punto del plano proyectivo dado por sus coordenadas (2,4,8)?, ¿y el punto (0,3,-1)?*

Solución:

Un punto del plano proyectivo, de coordenadas homogéneas (x_0, x_1, x_2) expresadas en una referencia proyectiva $\{a, b, c; d\}$ se corresponde con un punto del plano afín $x_0 = 1$ de coordenadas cartesianas $(1, x_1/x_0, x_2/x_0)$, expresadas en la referencia cartesiana $\{a; \mathbf{ab}, \mathbf{ac}\}$. Salvo en el caso de que el punto proyectivo esté en $x_0 = 0$, en cuyo caso es un punto del infinito, y se corresponde con un vector de coordenadas $(0, x_1, x_2)$.

Por ello, al punto proyectivo de coordenadas $(2, 4, 8)$ le corresponde en el afín un punto de coordenadas $(1, 2, 4)$. Y al punto de coordenadas $(0, 3, -1)$, el vector de coordenadas $(0, 3, -1)$. $\square$