Capítulo 2

Curvas de Bézier

Problema 2.1 *¿Por qué punto pasa en el instante t=1/4 la curva de polígono de control* $\{(0,1),(2,0),(1,0),(-2,1)\}$*?, ¿y en el instante t=0?, ¿y en el instante t=1?*

Solución:

Por las propiedades de las curvas de Bézier, la curva pasa en el instante inicial por c_0 y en el final, por c_n. Por tanto,

$$c(0) = (0,1)\ , \qquad c(1) = (-2,1)\ .\ \Box$$

Para el otro valor tenemos que recurrir, o bien al algoritmo de de Casteljau, o la expresión con polinomios de Bernstein,

$$c(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i B_i^n(t),$$

que en nuestro caso particular, $n = 3$, $t = 1/4$, proporciona

$$c(1/4) = \sum_{i=0}^{2} c_i B_i^2(1/4) = (61/64, 7/16)\ ,\ \Box$$

teniendo en cuenta las expresiones de los polinomios de Bernstein,

$$B_0^3(t) = (1-t)^3\ ,\ B_1^3(t) = 3t(1-t)^2\ ,\ B_2^3(t) = 3t^2(1-t)\ ,\ B_1^3(t) = t^3\ .$$

Problema 2.2 *Elevar una unidad el grado de la curva de polígono de control* $\{(0,1),(2,0),(1,0),(-2,1)\}$*. ¿Cuál es el grado final?*

Solución:

La curva es de grado tres, con lo cual al elevar el grado será formalmente de grado cuatro. El polígono de control lo obtenemos de la fórmula,

$$c_i^1 = \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) c_i + \frac{i}{n+1} c_{i-1} \ ,$$

que aplicada a nuestro caso concreto nos proporciona,

$$\{(0,1), (3/2, 1/4), (3/2, 0), (1/4, 1/4), (-2, 1)\} \ . \ \square \tag{2.1}$$

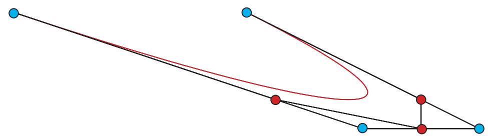

Figura 2.1: Elevación del grado

Problema 2.3 *Reducir una unidad el grado de la curva de polígono de control* $\{(0,1), (2,0), (1,0), (-2,1)\}$. *¿Cuál es el grado final?*

Solución:

La curva es de grado tres, con lo cual al reducir el grado obtenemos una curva de grado dos, en general distinta, ya que la reducción de grado es una aproximación. El sistema de ecuaciones, $AC = B$,que tendríamos que resolver,

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

que no tiene solución. Buscamos mejor aproximación por mínimos cuadrados, multiplicando el sistema por la matriz traspuesta, $A^t A C = A^t B$,

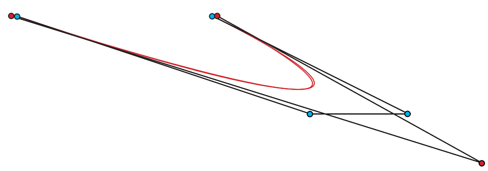

Figura 2.2: Reducción del grado

$$\begin{pmatrix} 10/9 & 2/9 & 0 \\ 2/9 & 8/9 & 2/9 \\ 0 & 2/9 & 10/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 2 & 0 \\ -5/3 & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

que sí tiene una matriz solución, cuyas filas nos dan las coordenadas de los vértices del polígono de control de la mejor aproximación de grado dos a la curva inicial,

$$\{(1/20, 1), (11/4, -1/2), (-41/20, 1)\} \ . \ \square$$

Problema 2.4 *Calcular el nuevo polígono de control de la curva de polígono* $\{(0, 1), (2, 0), (1, 0), (-2, 1)\}$ *después de trasladarla por el vector de coordenadas* $(1, -1)$.

Solución:

Como las curvas de Bézier son invariantes bajo transformaciones afines,

$$f(c(t)) = \sum_{i=0}^{n} f(c_i) B_i^n(t) \ ,$$

basta trasladar el polígono para obtener el polígono de control de la curva trasladada,

$$(1, 0), (3, -1), (2, -1), (-1, 0) \ . \ \square$$

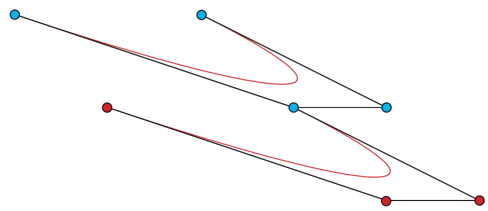

Figura 2.3: Traslación

Problema 2.5 *¿En qué región sabemos que está contenida la curva de polígono de control* $\{(0, 0), (2, 3), (5, -1), (2, 1), (1, 1), (1, 3)\}$*?*

Solución:

Por simple inspección, los puntos que delimitan el menor polígono convexo que engloba a todos los vértices del polígono de control de la curva son $(0, 0), (1, 3), (2, 3), (5, -1)$. Y sabemos que la curva estará contenida en dicho polígono. $\square$

Problema 2.6 *Si queremos quedarnos con la parte comprendida entre* $t = 1/3$ *y* $t = 1/2$ *de la curva de polígono* $\{(0, 1), (2, 0), (1, 0), (-2, 1)\}$*, ¿cuál es el nuevo polígono de control?*

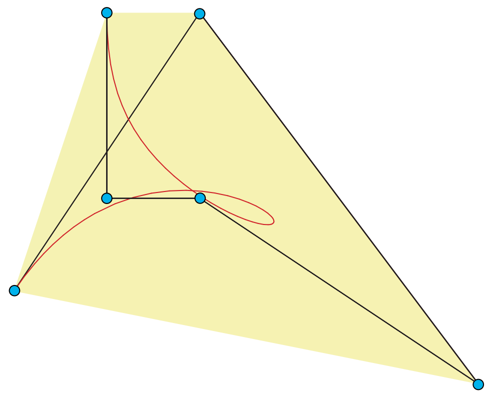

Figura 2.4: Envolvente convexa

Solución:

Para quedarnos con una parte de la curva, tenemos que recalcular el polígono de control usando la forma polar de la parametrización. Recordemos que la forma polar se calcula aplicando el algoritmo de de Casteljau, sólo que con un valor distinto en cada iteración,

$$
\begin{aligned}
c_0^{1)}[t_1] &= (1-t_1)c_0 + t_1 c_1 \ , \\
c_1^{1)}[t_1] &= (1-t_1)c_1 + t_1 c_2 \ , \\
c_2^{1)}[t_1] &= (1-t_1)c_2 + t_1 c_3 \ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_0^{2)}[t_1,t_2] &= (1-t_2)c_0^{1)}[t_1] + t_2 c_1^{1)}[t_1] \ , \\
c_1^{2)}[t_1,t_2] &= (1-t_2)c_1^{1)}[t_1] + t_2 c_2^{1)}[t_1] \ ,
\end{aligned}
$$

$$
c[t_1,t_2,t_3] \quad = \quad c_0^{3)}[t_1,t_2,t_3] = (1-t_3)c_0^{2)}[t_1,t_2] + t_3 c_1^{2)}[t_1,t_2] \ .
$$

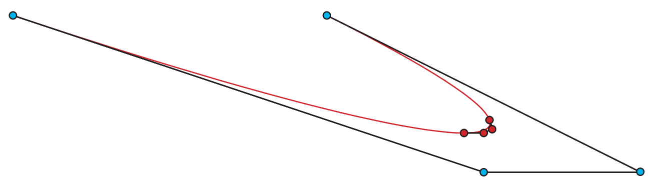

Figura 2.5: Restricción

El nuevo polígono de control se obtiene para valores concretos de la expresión anterior,

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_0 &= c[1/3,1/3,1/3] = (28/27,1/3)\\
\tilde{c}_1 &= c[1/3,1/3,1/2] = (19/18,5/18)\\
\tilde{c}_2 &= c[1/3,1/2,1/2] = (1,1/4)\\
\tilde{c}_3 &= c[1/2,1/2,1/2] = (7/8,1/4)\ .\ \square
\end{aligned}$$

Problema 2.7 *¿Cuál es el polígono de control de la curva que pasa por los puntos* $(0,0),(1,2),(-1,1)$ *en los instantes* $t=1/3$*,* $t=1/2$*,* $t=3/4$ *respectivamente?*

Solución:

Para resolver el problema de interpolación planteado, tendremos que resolver el sistema de ecuaciones lineales, $a_i = \sum B_j^2(t_i)c_j$, $i=0,1,2$, es decir,

$$\begin{pmatrix} B_0^2(1/3) & B_1^2(1/3) & B_2^2(1/3)\\ B_0^2(1/2) & B_1^2(1/2) & B_2^2(1/2)\\ B_0^2(3/4) & B_1^2(3/4) & B_2^2(3/4)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0\\ c_1\\ c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4/9 & 4/9 & 1/9\\ 1/4 & 1/2 & 1/4\\ 1/16 & 3/8 & 9/16\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0\\ c_1\\ c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

cuya solución única es

$$c_0 = (-38/5,-52/5)\ ,\quad c_1 = (47/5,58/5)\ ,\quad c_2 = (-36/5,-24/5)\ ,$$

el polígono de control de la curva interpolante. $\square$

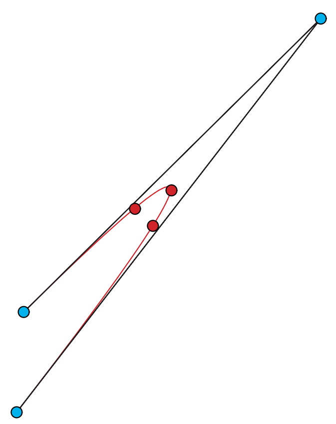

Figura 2.6: Interpolación

Problema 2.8 *Si queremos que esté definida en el intervalo* $[-1,1]$*, ¿cuál será la parametrización de una curva de polígono* $\{(0,1),(2,0),(1,0),(-2,1)\}$*?*

Solución:

La parametrización de la curva está inicialmente definida en el intervalo $[0, 1]$,

$$c(t) = \sum_{i=0}^{3} B_i^3(t)c_i = \left(t^3 - 9t^2 + 6t, 1 - 3t + 3t^2\right) ,$$

y como queremos que esté definida en el intervalo $[-1, 1]$, tenemos que cambiar el parámetro a u,

$$t(u) = \frac{u+1}{1-(-1)} = \frac{u+1}{2},$$

de modo que cuando u vale -1, t vale cero; y cuando u vale uno, t vale uno también.

Sólo tenemos, pues, que hacer el cambio de variable,

$$\tilde{c}(u) = c(t(u)) = \left(u^3/8 - 15u^2/8 - 9u/8 + 7/8, 3u^2/4 + 1/4\right) ,$$

y tenemos la misma curva, pero parametrizada en $u \in [-1, 1]$. □

Problema 2.9 *Obtener el polígono de control de la gráfica de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo [0,1].*

Solución:

Se trata de obtener el polígono de control de $(x, f(x))$ como curva de grado dos. Sabemos que el polígono de control de la función lineal x es equiespaciado,

$$x = \frac{1}{2}B_1^2(x) + B_2^2(x) ,$$

y para obtener el de $f(x)$ no tenemos que recurrir a ningún cálculo, ya que $B_2^2(x) = x^2$.

Por tanto, juntando las dos coordenadas de cada vértice del polígono de control, concluimos

$$c_0 = (0, 0) , \quad c_1 = (1/2, 0) , \quad c_2 = (1, 1) . \ \Box$$

Problema 2.10 *¿Cuál es la recta que mejor aproxima a la curva que pasa por los puntos $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(-1, 1)$ en los instantes $t = 1/3$, $t = 1/2$, $t = 3/4$ respectivamente?*

Solución:

El problema es parecido al de interpolación, $AC = B$, sólo que en este caso nos falta una ecuación, ya que la curva es de grado uno,

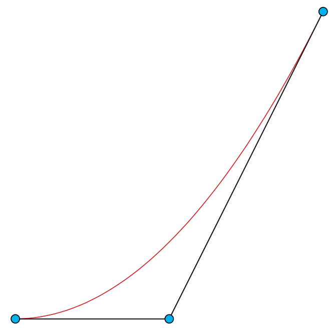

Figura 2.7: Gráfica de una función

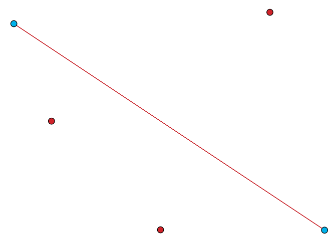

Figura 2.8: Aproximación

$$\begin{pmatrix} B_0^1(1/3) & B_1^1(1/3) \\ B_0^1(1/2) & B_1^1(1/2) \\ B_0^1(3/4) & B_1^1(3/4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

por lo que, en general, este tipo de sistemas carece de solución. Por ello se pide una solución aproximada, que se obtiene por mínimos cuadrados, multiplicando el sistema anterior por la matriz traspuesta del sistema, A^t,

$$\begin{pmatrix} 109/144 & 95/144 \\ 95/144 & 133/144 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 5/4 \\ -1/4 & 7/4 \end{pmatrix} ,$$

para conseguir un sistema de ecuaciones que tiene solución única,

$$c_0 = (3/2, 0) , \quad c_1 = (-51/38, 36/19) . \ \square$$