Capítulo 3

Curvas racionales

Problema 3.1 *¿Por qué punto pasa en el instante* $t = 1/3$ *la curva de polígono de control* $\{(0,1),(1,,0),(2,0)\}$ *y pesos* $\{1,4/5,1\}$*?, ¿y en el instante* $t = 0$*?, ¿y en el instante* $t = 1$*?*

Solución:

Las curvas racionales pasan por el vértice inicial y el final, respectivamente, en $t = 0$ y $t = 1$. Por tanto, $c(0) = c_0 = (0,1)$, $c(1) = c_2 = (2,0)$.

Para el valor $t = 1/3$ tenemos que recurrir a la expresión general,

$$c(t) = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} w_i c_i B_i^n(t)}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)} ,$$

que en nuestro caso proporciona el punto

$$c(1/3) = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{2} w_i c_i B_i^2(1/3)}{\displaystyle\sum_{i=0}^{2} w_i B_i^2(1/3)} = (26/41, 20/41) \, . \, \square$$

Problema 3.2 *Una curva de pesos* $\{2,3,4\}$*, ¿qué clase de curva es (elipse, hipérbola, parábola...)?*

Solución:

Con la información facilitada es difícil concluir de qué tipo de cónica se trata, ya que los pesos no están en forma canónica. Los transformamos de modo que $\tilde{w}_0 = 1 = \tilde{w}_n$. Primero hacemos que el último peso tome el valor uno, dividiendo todos los pesos por su valor,

$$w_0 = 1/2 \, , \quad w_1 = 3/4 \, , \quad w_2 = 1 \, ,$$

y a continuación aplicamos el otro procedimiento de normalización,

$$\tilde{w}_i = b^{n-i} w_i \ , \qquad b = (w_n/w_0)^{1/n} \ .$$

En nuestro caso concreto, $b = \sqrt{w_2/w_0} = \sqrt{2}$ y los nuevos pesos, equivalentes a los anteriores son,

$$\tilde{w}_0 = 1 \ , \quad \tilde{w}_1 = 3\sqrt{2}/4 \ , \quad \tilde{w}_2 = 1 \ ,$$

y como el peso $\tilde{w}_1$ es mayor que la unidad, la curva es una hipérbola. □

Problema 3.3 *Dar el polígono de control y pesos de un arco de circunferencia de 120 grados con centro en el origen y radio unidad.*

Solución:

Podemos trazar un arco de 120 grados simétrico en torno al polo superior de la circunferencia, teniendo en cuenta que el polígono de control de un arco de ángulo 2α de ese tipo es

$$\begin{aligned} c_0 &= (-R\sin\alpha, R\cos\alpha) = (-\sqrt{3}/2, 1/2) \ , \\ c_1 &= (0, R/\cos\alpha) = (0, 2) \ , \\ c_2 &= (R\sin\alpha, R\cos\alpha) = (\sqrt{3}/2, 1/2) \ , \end{aligned}$$

y los pesos, por su parte, son

$$w_0 = 1 \ , \quad w_1 = \cos\alpha = 1/2 \ , \quad w_2 = 1 \ . \ \square$$

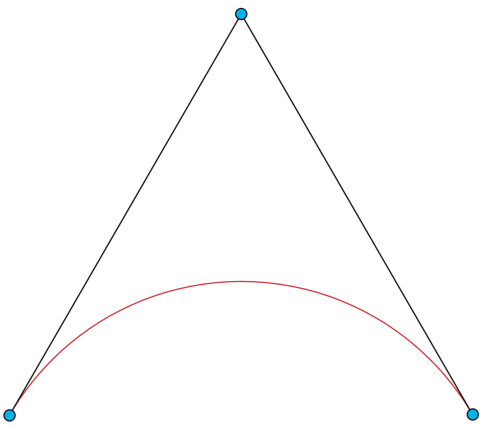

Figura 3.1: Arco de circunferencia

Problema 3.4 *¿Qué sucede si a una curva cuadrática le multiplicamos el primer peso por 1/4, el segundo por 1/2 y el tercero lo dejamos como estaba?*

Solución:

Sabemos que multiplicar a cada peso w_i por un factor b^{n-i}, donde n es el grado de la curva, no afecta a la gráfica de la curva racional. En nuestro caso se trata de una cónica y el factor es de dicha forma, con $b = 1/2$. Luego la gráfica no se ve modificada. $\square$

Problema 3.5 *¿Por qué punto pasa en el instante $t = 1/3$ la curva de polígono de control $\{(0,1),(1,0),(2,0)\}$ y pesos $\{1,1,1\}$ si el segundo vértice es un vector de control?*

Solución:

Para una curva cuadrática con un vector de control, la parametrización es

$$c(t) = \frac{c_0 B_0^2(t) + c_1 B_1^2(t) + c_2 B_2^2(t)}{B_0^2(t) + B_2^2(t)} = \left(\frac{2t}{1-2t+2t^2}, \frac{(1-t)^2}{1-2t+2t^2} \right) , \tag{3.1}$$

con lo cual el punto buscado es $c(1/3) = (6/5, 4/5)$. $\square$

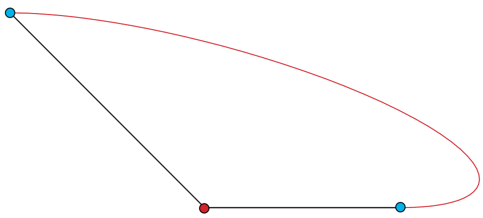

Figura 3.2: Cónica con vector de control

Problema 3.6 *¿Qué curva resulta si para un polígono de control $\{c0, c1, c2\}$ tomamos pesos $\{1,0,1\}$?*

Solución:

Es un caso límite, ya que no tiene mucho sentido tomar un peso nulo. La parametrización sería de la forma

$$c(t) = \frac{(1-t)^2 c_0 + t^2 c_2}{(1-t)^2 + t^2} ,$$

luego estamos haciendo combinaciones baricéntricas de los puntos c_0 y c_2. Por tanto, se trata del segmento de recta comprendido entre ambos puntos. $\square$

Problema 3.7 *¿Es lo mismo tomar un peso cero que considerar el vértice correspondiente como vector de control?*

Solución:

No, ya que con peso cero el vértice desaparece del numerador, pero no sucede así con el vector de control. $\square$

Problema 3.8 *Obtener dos maneras distintas de elevar el grado de una curva de polígono* $\{(0,0),(2,1),(4,-1)\}$ *y pesos* $\{1,1/2,1\}$.

Solución:

En principio, hay infinitas maneras de elevar el grado de una curva racional de grado n, dependiendo de la proporción α/β,

$$\begin{aligned} w_i^1 &= \alpha\frac{n+1-i}{n+1}w_i + \beta\frac{i}{n+1}w_{i-1} \ , \\ w_i^1 c_i^1 &= \alpha\frac{n+1-i}{n+1}w_i c_i + \beta\frac{i}{n+1}w_{i-1}c_{i-1} \ . \end{aligned}$$

La manera usual, idéntica a la empleada para curvas polinómicas, sería tomar $\alpha = 1 = \beta$, que proporciona el siguiente polígono y lista de pesos,

$$\{(0,0),(1,1/2),(3,0),(4,-1)\} \ , \quad \{1,2/3,2/3,1\} \ .$$

Pero, por ejemplo, si tomamos $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/4$, obtenemos otro polígono y otros pesos,

$$\{(0,0),(4/3,2/3),(10/3,-1/3),(4,-1)\} \ , \quad \{1/2,1/4,1/4,1/4\} \ .$$

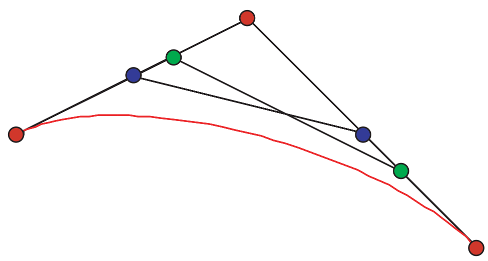

Figura 3.3: Distintas maneras de elevar el grado de una cónica

Problema 3.9 *Sean los polígonos y pesos de dos tramos de una curva compuesta,* $\{(0,0),(0,1),(1,1)\}$, $\{1,w,1\}$ *y* $\{(1,1),(3,1),(2,-1)\}$, $\{1,1/3,1\}$. *Escoger* w *de modo que la curva sea diferenciable.*

Solución:

Si denominamos $c(t)$ y $\tilde{c}(\tilde{t})$, respectivamente a las parametrizaciones de ambas cónicas, con $t,\tilde{t} \in [0,1]$, la condición para que las derivadas $c'(1)$ y $\tilde{c}'(0)$ sean iguales es

$$\frac{w_1}{w_2}(c_2 - c_1) = \frac{\tilde{w}_1}{\tilde{w}_0}(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0) \ ,$$

que en nuestro caso concreto se traduce en la relación $(w,0) = (2/3,0)$, de donde se infiere $w = 2/3$. $\square$

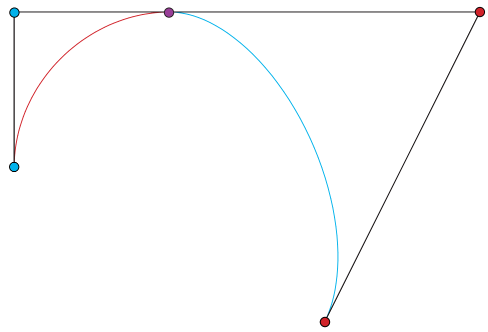

Figura 3.4: Curva compuesta con tangente continua

Problema 3.10 *Consideremos la curva de polígono* $\{(0,0),(0,1),(1,1)\}$ *y pesos* $\{1,1/3,1\}$*. Rotarla 90 grados con centro en el origen en sentido antihorario. ¿Cuál es el polígono de control y los pesos de la nueva curva?*

Solución:

Al aplicar una transformación afín f sobre una curva racional parametrizada $c(t)$, la curva resultante, de parametrización $f(c(t))$, tiene los mismos pesos que la inicial y por polígono $\{f(c_0),\dots,f(c_n)\}$, la imagen del polígono inicial, $\{c_0,\dots,c_n\}$, bajo la transformación afín.

Por tanto, en nuestro caso tenemos que los pesos de la nueva curva siguen siendo $\{1,1/3,1\}$ y los nuevos vértices son $\{(0,0),(-1,0),(-1,1)\}$. $\square$

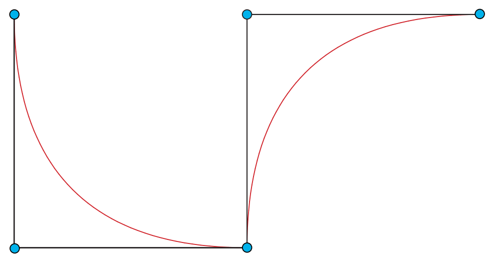

Figura 3.5: Rotación de una curva racional

Problema 3.11 *Consideremos una elipse de semiejes* a*,* b*, es decir, de ecuación* $(x/a)^2+(y/b)^2=1$*. Obtener una representación racional (polígono de control y pesos) que permita trazar el primer cuadrante de la curva (desde* $(a,0)$ *hasta* $(0,b)$*).*

Solución:

Sabemos que la elipse es una curva racional de grado dos, así que el problema se reduce a hallar el polígono de control $\{c_0,c_1,c_2\}$ y los pesos $\{w_0,w_1,w_2\}$. Como siempre podemos fijar dos pesos, tomamos $w_0=1=w_2$ y dejamos como incógnita el restante, $w_1:=w$.

Como la curva comienza en $(a, 0)$, tomamos $c_0 = (a, 0)$. Y como termina en $(0, b)$, tomamos $c_2 = (0, b)$.

Por otro lado, sabemos que el vector $\mathbf{c_0 c_1}$ define la tangente en c_0 y el vector $\mathbf{c_1 c_2}$ define la tangente en c_2. Es decir, c_1 está en la intersección de ambas tangentes. Como nuestra curva es un cuadrante de elipse, la tangente en c_0 es vertical y la tangente en c_2, horizontal. Por tanto, c_1, que está en la intersección, será $c_1 = (a, b)$.

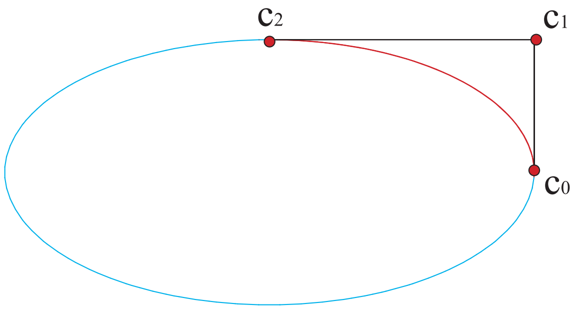

Figura 3.6: Cuadrante de elipse como curva racional

Así pues, la única incógnita que nos resta es el peso w, del cual sabemos que tiene que ser menor que la unidad para que tracemos una elipse. Para calcularla, sustituimos la parametrización,

$$\begin{aligned} c(t) &= (x(t), y(t)) = \frac{c_0 B_0^2(t) + w c_1 B_1^2(t) + c_2 B_2^2(t)}{B_0^2(t) + w B_1^2(t) + B_2^2(t)} \\ &= \left(\frac{a\,(1-t)^2 + 2\,wat\,(1-t)}{(1-t)^2 + 2\,wt\,(1-t) + t^2}, \frac{2\,wbt\,(1-t) + bt^2}{(1-t)^2 + 2\,wt\,(1-t) + t^2} \right) , \end{aligned}$$

en la ecuación de la elipse en un valor genérico t, o en uno en concreto. De la ecuación,

$$\frac{x(t)^2}{a^2} + \frac{y(t)^2}{b^2} = 1 ,$$

obtenemos una sencilla condición algebraica,

$$2t^2(2w^2 - 1)(t-1)^2$$

cuya única solución para todo valor de t es $w^2 = 1/2$. Es decir, teniendo en cuenta que los pesos son positivos, $w = \sqrt{2}/2$.

Así que la solución es que el polígono está formado por $\{(a, 0), (a, b), (0, b)\}$ y los pesos correspondientes son $\{1, \sqrt{2}/2, 1\}$. $\square$

Una manera más sencilla de resolver el problema parte del resultado conocido que describe un cuadrante de circunferencia de radio a mediante el polígono de control $\{(a, 0), (a, a), (0, a)\}$ y los pesos $\{1, \sqrt{2}/2, 1\}$. Podemos deformar la circunferencia a una elipse de semiejes a y b, mediante la dilatación a lo largo del eje Y, $x' = x$, $y' = by/a$. Como esta aplicación es afín, resulta que la curva resultante, el cuadrante de elipse, tiene por polígono la imagen del polígono de la circunferencia, $\{(a,0),(a,b),(0,b)\}$ y los pesos de la curva de partida, $\{1, \sqrt{2}/2, 1\}$. $\square$

Problema 3.12 *Consideremos una hipérbola de semiejes a, b, es decir, de ecuación $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$. Obtener una representación racional (polígono de control y pesos) que permita trazar la parte de la curva correspondiente al primer cuadrante.*

Solución:

El primer vértice del polígono de control lo podemos tomar en el vértice de la hipérbola, $(a,0)$, ya que la curva racional pasa por los vértices c_0 y c_2 del polígono de control.

Sin embargo, c_2 nos plantea un problema, ya que es un punto del infinito, correspondiente a la asíntota de ecuación $x/a = y/b$. Por tanto, podemos tomarlo como (a,b), pero teniendo en cuenta que es un vector de control, no un punto de control.

El vértice c_1 tiene que estar situado sobre la intersección de las rectas tangentes a la hipérbola en c_0 y c_2. La recta tangente en c_0 es vertical, $x = a$. Y la recta tangente en el punto del infinito, c_2, es la propia asíntota, de ecuación $x/a = y/b$. Así pues, c_1 es (a,b), que no es el mismo que c_2, ya que aquel es un verdadero punto de control.

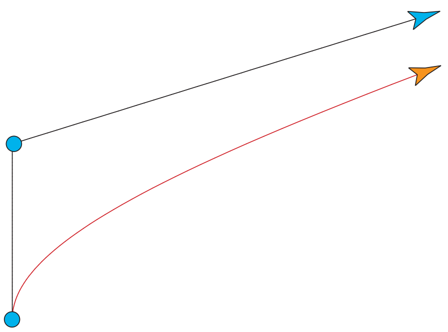

Figura 3.7: Cuadrante de hipérbola como curva racional

Sólo nos falta por determinar los pesos. Podemos tomar $w_0 = 1$ y w_2 no tiene sentido. Correspondería a tomar otro vector de control $(w_2 a, w_2 b)$, paralelo a c_2. Sólo queda determinar w_1, que denominamos w. Lo podemos determinar a partir de la parametrización del cuadrante de hipérbola,

$$
\begin{aligned}
c(t) &= \frac{(a,0)B_0^2(t) + (a,b)B_1^2(t) + (a,b)B_2^2(t)}{B_0^2(t) + B_1^2(t)} \\
&= \left(\frac{a\,(1-t)^2 + 2wat\,(1-t) + at^2}{(1-t)^2 + 2\,wt\,(1-t)}, \frac{2\,wbt\,(1-t) + bt^2}{(1-t)^2 + 2\,wt\,(1-t)} \right),
\end{aligned}
$$

que podemos sustituir en la ecuación de la hipérbola, $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$, lo cual conduce a la relación

$$\frac{t^2\left(2\,w^2 - 1\right)}{\left(1 - t + 2\,wt\right)^2} = 0\ ,$$

que se tiene que verificar para todo valor de t. Luego la solución está en $2\,w^2 - 1 = 0$. Es decir, $w = \sqrt{2}/2$. $\square$

Problema 3.13 *Consideremos una elipse de semiejes a, b, es decir, de ecuación $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$. Obtener una representación racional (polígono de control y pesos) que permita trazar un arco de la curva comprendido entre dos puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) sobre la elipse.*

Solución:

Como con un único polígono de control sólo podemos abarcar a lo sumo media elipse, damos por sentado que nos referimos al arco más corto entre los dos puntos.

Como la curva racional pasa por los vértices inicial y final, tenemos que $c_0 = (x_1, y_1)$ y $c_2 = (x_2, y_2)$. El vértice central está en la intersección de las rectas tangentes a la elipse en c_0 y c_2. El gradiente de la función que define la ecuación implícita de la hipérbola, $(x/a)^2 + (y/b)^2 - 1$, proporciona un vector normal a la curva en cada punto (x, y) de la misma, $(x/a^2, y/b^2)$. Por tanto, las ecuaciones de las rectas tangentes en c_0 y c_2 son

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{a^2}(x - x_1) + \frac{y_1}{b^2}(y - y_1) &= 0 \\
\frac{x_2}{a^2}(x - x_2) + \frac{y_2}{b^2}(y - y_2) &= 0\ ,
\end{aligned}$$

cuya solución es, teniendo en cuenta que $(x_1/a)^2 + (y_1/b)^2 = 1$, y lo mismo para (x_2, y_2),

$$c_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} a^2, \frac{x_1 - x_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1} b^2\right)\ ,$$

tras lo cual sólo queda hallar los pesos.

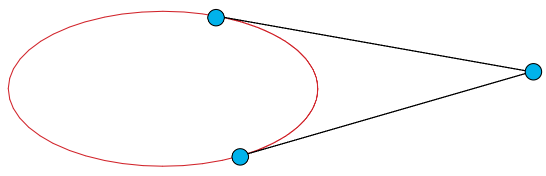

Figura 3.8: Arco de elipse como curva racional

Fijamos los pesos inicial y final, $w_0 = 1 = w_2$. Queda por obtener el peso central $w = w_1$, que podemos calcular sustituyendo la parametrización de la curva,

$$c(t) = \frac{c_0(1-t)^2 + 2wc_1(1-t)t + c_2t^2}{(1-t)^2 + 2w(1-t)t + t^2} \ ,$$

en la ecuación de la elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$. Obtenemos una expresión lineal en w^2, que permite despejar una expresión inmanejable, aun después de eliminar términos con la condición de que los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) estén sobre la elipse,

$$w^2 = \frac{A}{B} \ ,$$

$$\begin{aligned} A &= \left((x_1 + x_2)^2 a^4 - x_1 x_2 \left(2x_1x_2 + 3{x_2}^2 + 3{x_1}^2\right) a^2 + 4{x_1}^3{x_2}^3 \right) b^2 \\ &+ a^2 y_1 y_2 \left(4x_1^2 x_2^2 - a^2 (x_1 + x_2)^2 \right) \ , \\ B &= 2a^2 \left(\left(2a^4 - (x_1 + x_2)^2 a^2 + 2{x_1}^2{x_2}^2 \right) b^2 + 2a^2 y_1 y_2 \left(x_1 x_2 - a^2 \right) \right) \ , \ \square \end{aligned}$$

que obviamente conduce al resultado ya estudiado, $w^2 = 1/2$, cuando los puntos son $(a, 0)$, $(0, b)$.