Capítulo 4

Curvas spline

Problema 4.1 *¿Qué grado y cuántos tramos tiene la curva B-spline de polígono B-spline* $\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$ *y nudos* $\{0,1/3,2/3,1\}$*?, ¿qué valor toma la curva en* $t=1/2$*?*

Solución:

Una curva spline de grado n y l tramos tiene $n+l$ vértices y $2n+l-1$ nudos. Por tanto, la curva de nuestro caso, que tiene tres vértices y cuatro nudos, es una curva de grado dos y un único tramo, definido en el intervalo $[1/3,2/3]$. □

Para evaluar la parametrización de la curva, hacemos uso del algoritmo de de Boor,

$$\begin{aligned} c(u) &= \frac{u_2-u}{u_2-u_1}\left(\frac{u_2-u}{u_2-u_0}d_0+\frac{u-u_0}{u_2-u_0}d_1\right) \\ &+ \frac{u-u_1}{u_2-u_1}\left(\frac{u_3-u}{u_3-u_1}d_2+\frac{u-u_1}{u_3-u_1}d_3\right)\ , \end{aligned}$$

con $u_0=0$, $u_1=1/3$, $u_2=2/3$, $u_3=1$, $d_0=(0,0)$, $d_1=(1,0)$, $d_2=(0,1)$. De donde obtenemos el punto $c(1/2)=(3/4,1/8)$. □

Problema 4.2 *¿Qué grado y cuántos tramos tiene la curva B-spline de polígono B-spline* $\{(0,0),(1,0),(0,1),(-1,0)\}$ *y nudos* $\{0,1/4,1/2,3/4,1\}$*?, ¿qué valor toma la curva en* $t=1/3$*?, ¿y en* $t=2/3$*?*

Solución:

La curva tiene cuatro vértices y cinco nudos, luego es una curva de grado dos y dos tramos, definidos en los intervalos $[1/4,1/2]$ y $[1/2,3/4]$.

El primer valor de t corresponde al primer tramo, por lo que lo evaluamos según

$$\begin{aligned} c(u) &= \frac{u_2-u}{u_2-u_1}\left(\frac{u_2-u}{u_2-u_0}d_0+\frac{u-u_0}{u_2-u_0}d_1\right) \\ &+ \frac{u-u_1}{u_2-u_1}\left(\frac{u_3-u}{u_3-u_1}d_2+\frac{u-u_1}{u_3-u_1}d_3\right)\ , \end{aligned}$$

para obtener el punto $c(1/3) = (13/18, 1/18)$. $\square$

El segundo valor de t pertenece al segundo intervalo, por lo que evaluamos de acuerdo a la expresión

$$\begin{aligned} c(u) &= \frac{u_3 - u}{u_3 - u_2}\left(\frac{u_3 - u}{u_3 - u_1}d_1 + \frac{u - u_1}{u_3 - u_1}d_2\right) \\ &+ \frac{u - u_2}{u_3 - u_2}\left(\frac{u_4 - u}{u_4 - u_2}d_3 + \frac{u - u_2}{u_4 - u_2}d_4\right) \ , \end{aligned}$$

que proporciona el punto $c(2/3) = (-1/6, 13/18)$. $\square$

Problema 4.3 *Insertar el nudo 1/2 en la curva racional a trozos de polígono B-spline* $\{(0,0),(1,0),(0,1),(-1,0)\}$ *y nudos* $\{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$ *¿Cuál es el nuevo polígono B-spline?, ¿y los nuevos nudos?*

Solución:

La curva tiene cuatro vértices y cinco nudos, luego es una curva de grado dos y dos tramos, definidos en los intervalos $[1/4, 1/2]$ y $[1/2, 3/4]$. Si insertamos el nuevo nudo, la lista nueva de nudos será $\{0, 1/4, 1/2, 1/2, 3/4, 1\}$.

Los nuevos nudos se obtienen por medio del algoritmo de inserción,

$$\begin{aligned} \tilde{d}_0 &= d[\tilde{u}_0, \tilde{u}_1] = d[u_0, u_1] = d_0 = (0,0) \ , \\ \tilde{d}_1 &= d[\tilde{u}_1, \tilde{u}_2] = d[u_1, u_2] = d_1 = (1,0) \ , \\ \tilde{d}_2 &= d[\tilde{u}_2, \tilde{u}_3] = d[1/2, 1/2] = c(1/2) = (1/2, 1/2) \ , \\ \tilde{d}_3 &= d[\tilde{u}_3, \tilde{u}_4] = d[u_2, u_3] = d_2 = (0,1) \ , \\ \tilde{d}_4 &= d[\tilde{u}_4, \tilde{u}_5] = d[u_3, u_4] = d_3 = (-1,0) \ . \end{aligned}$$

Problema 4.4 *Obtener el polígono o polígonos de control que corresponden a los tramos de la curva B-spline de polígono B-spline* $\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$ *y nudos* $\{0, 1/3, 2/3, 1\}$.

Solución:

Como la curva tiene tres vértices y cuatro nudos, tiene un único tramo de grado dos, definido en el intervalo $[1/3, 2/3]$.

El polígono de control del único tramo se obtiene por medio del algoritmo de de Boor,

$$\begin{aligned} d[v_1, v_2] &= \frac{u_2 - v_2}{u_2 - u_1}\left(\frac{u_2 - v_1}{u_2 - u_0}d_0 + \frac{v_1 - u_0}{u_2 - u_0}d_1\right) \\ &+ \frac{v_2 - u_1}{u_2 - u_1}\left(\frac{u_3 - v_1}{u_3 - u_1}d_1 + \frac{v_1 - u_1}{u_3 - u_1}d_2\right) \ , \end{aligned}$$

evaluando en los extremos del intervalo de definición,

$$\begin{aligned} c_0 &= d[1/3, 1/3] = (1/2, 0) \ , \\ c_1 &= d[1/3, 2/3] = (1, 0) \ , \\ c_2 &= d[2/3, 2/3] = (1/2, 1/2) \ . \ \square \end{aligned}$$

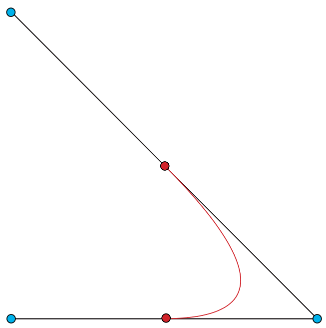

Figura 4.1: Spline parabólico de un único tramo

Problema 4.5 *Obtener el polígono o polígonos de control que corresponden a los tramos de la curva de polígono B-spline* $\{(0,0),(1,0),(0,1),(-1,0)\}$ *y nudos* $\{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$.

Solución:

La curva tiene cuatro vértices y cinco nudos, luego es un spline parabólico de dos tramos, definidos respectivamente en los intervalos $[1/4, 1/2]$ y $[1/2, 3/4]$.

Al igual que en el problema anterior, el polígono de control del primer tramo se obtiene con su forma polar,

$$\begin{aligned} d[v_1, v_2] &= \frac{u_2 - v_2}{u_2 - u_1}\left(\frac{u_2 - v_1}{u_2 - u_0} d_0 + \frac{v_1 - u_0}{u_2 - u_0} d_1\right) \\ &+ \frac{v_2 - u_1}{u_2 - u_1}\left(\frac{u_3 - v_1}{u_3 - u_1} d_1 + \frac{v_1 - u_1}{u_3 - u_1} d_2\right) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_0 &= d[1/4, 1/4] = (1/2, 0) , \\ c_1 &= d[1/4, 1/2] = (1, 0) , \\ c_2 &= d[1/2, 1/2] = (1/2, 1/2) , \end{aligned}$$

y el polígono de control del segundo tramo, con su forma polar también,

$$\begin{aligned} d[v_1, v_2] &= \frac{u_3 - v_2}{u_3 - u_2}\left(\frac{u_3 - v_1}{u_3 - u_1} d_1 + \frac{v_1 - u_1}{u_3 - u_1} d_2\right) \\ &+ \frac{v_2 - u_2}{u_3 - u_2}\left(\frac{u_4 - v_1}{u_4 - u_2} d_2 + \frac{v_1 - u_2}{u_4 - u_2} d_3\right) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c'_0 &= d[1/2, 1/2] = (1/2, 1/2) , \\ c'_1 &= d[1/2, 3/4] = (0, 1) , \\ c'_2 &= d[3/4, 3/4] = (-1/2, 1/2) . \ \square \end{aligned}$$

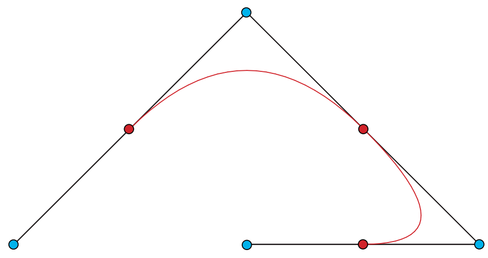

Figura 4.2: Spline parabólico de dos tramos

Problema 4.6 *Elevar el grado de la curva polinómica a trozos de polígono B-spline* $\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$ *y nudos* $\{0,1/3,2/3,1\}$*, ¿cuál es el grado, el polígono B-spline y los nudos finales?*

Solución:

La curva es un spline parabólico de un único tramo definido en el intervalo $[1/3,2/3]$. Luego, si elevamos el grado una unidad, obtendremos una parametrización formalmente de grado tres.

Los nudos se obtienen a partir de los antiguos, duplicando los nudos interiores, es decir, los que definen intervalos, $\{0,1/3,1/3,2/3,2/3,1\}$.

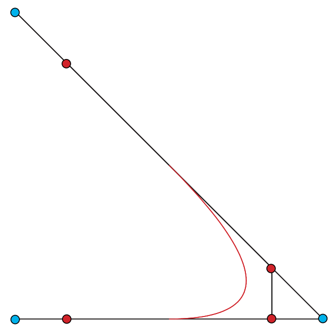

Figura 4.3: Elevación del grado de un spline parabólico

Los nuevos vértices se obtienen por la forma polar de grado superior,

$$d^1[v_1,v_2,v_3]=\frac{1}{3}\left(d[v_2,v_3]+d[v_1,v_3]+d[v_1,v_2]\right)\ ,$$

por el procedimiento habitual,

$$\begin{aligned}
d^1_0 &= d^1[\tilde u_0,\tilde u_1,\tilde u_2]=(1/6,0)\ ,\\
d^1_1 &= d^1[\tilde u_1,\tilde u_2,\tilde u_3]=(5/6,0)\ ,\\
d^1_2 &= d^1[\tilde u_2,\tilde u_3,\tilde u_4]=(5/6,1/6)\ ,\\
d^1_3 &= d^1[\tilde u_3,\tilde u_4,\tilde u_5]=(1/6,5/6)\ .\ \square
\end{aligned}$$

Problema 4.7 *Obtener el polígono B-spline y los nudos de la curva spline cúbica C^2 que interpola los puntos $\{(0,0),(1,1)\}$ para los valores $\{0,1\}$ del parámetro, con condiciones naturales y con tangentes de Bessel.*

Solución:

Como tenemos que interpolar entre dos puntos, tenemos un único tramo de curva cúbica, es decir, cuatro vértices, de los cuales conocemos dos, el primero y el último, $d_0 = a_0 = (0,0)$, $d_3 = a_1 = (1,1)$. Los nudos son los correspondientes al intervalo que nos dan como dato, $\{0,0,0,1,1,1\}$.

Nos faltan los vértices intermedios, que, como no quedan datos que interpolar, habrá que obtenerlos por las condiciones en los extremos de la curva.

No es posible interpolar con tangentes de Bessel, ya que estas requieren tres puntos para poder trazar una parábola. $\square$

La condiciones naturales, para sólo dos puntos, $N = 1$,

$$\begin{aligned}
0 &= (\Delta u_0 + \Delta u_1)d_0 - (2\Delta u_0 + \Delta u_1)d_1 + \Delta u_0 d_2 \ , \\
0 &= (\Delta u_0 + \Delta u_{-1})d_3 - (2\Delta u_0 + \Delta u_{-1})d_2 + \Delta u_0 d_1 \ ,
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que la única diferencia no nula es $\Delta u_0 = 1$, proporcionan los vértices $d_1 = (1/3, 1/3)$, $d_2 = (2/3, 2/3)$. $\square$

Este resultado es bastante lógico, ya que la curva que interpola naturalmente entre dos puntos es un segmento, y los vértices que hemos obtenido están alineados.

Problema 4.8 *Obtener el polígono B-spline y los nudos de la curva spline parabólica cerrada C^1 que interpola los puntos $\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$ para los valores $\{0,1/3,2/3,1\}$ del parámetro.*

Solución:

Interpolamos entre los tres puntos con tres tramos parabólicos. Los nudos de la curva B-spline son $\{0,1/3,2/3,1\}$.

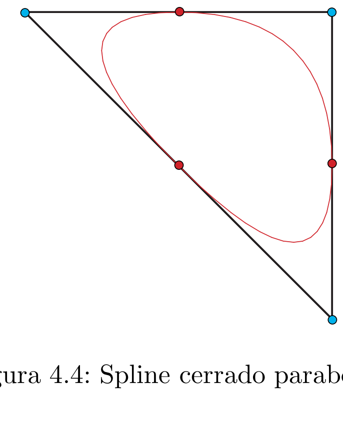

Figura 4.4: Spline cerrado parabólico

Falta calcular los tres vértices del polígono B-spline cerrado, para $N = 2$, teniendo en cuenta que los nudos están equiespaciados,

$$\begin{pmatrix} (\Delta u_2+\Delta u_0)a_0 \\ (\Delta u_0+\Delta u_1)a_1 \\ (\Delta u_1+\Delta u_2)a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta u_0 & \Delta u_2 & 0 \\ 0 & \Delta u_1 & \Delta u_0 \\ \Delta u_1 & 0 & \Delta u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} .$$

La solución del sistema de ecuaciones proporciona el polígono B-spline,

$$d_0 = (1,-1)\ , \quad d_1 = (-1,1)\ , \quad d_2 = (1,1)\ . \ \square$$

Problema 4.9 *¿Cuánto vale en $u = 1/3$ la función nodal $N_0^2(u)$ para los nudos $\{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$, ¿y en 2/3?*

Solución:

Hacemos uso de la recursividad de las funciones nodales,

$$\begin{aligned} N_i^n(u) &= \frac{u-u_{i-1}}{u_{i+n-1}-u_{i-1}}\, N_i^{n-1}(u) + \frac{u_{i+n}-u}{u_{i+n}-u_i}\, N_{i+1}^{n-1}(u)\ , \\ N_i^0(u) &= \begin{cases} 1 & u \in [u_{i-1}, u_i) \\ 0 & u \notin [u_{i-1}, u_i) \end{cases} \ , \end{aligned}$$

que en nuestro caso concreto proporciona, teniendo en cuenta que el término en u_{-1} se puede tomar como la unidad,

$$\begin{aligned} N_0^2(u) &= N_0^1(u) + \frac{u_2-u}{u_2-u_0}\, N_1^1(u)\ , \\ N_0^1(u) &= \frac{u_1-u}{u_1-u_0}\, N_1^0(u) = \begin{cases} \dfrac{u_1-u}{u_1-u_0} & u \in [u_0,u_1) \\ \\ 0 & u \notin [u_0,u_1) \end{cases} \ , \\ N_1^1(u) &= \frac{u-u_0}{u_1-u_0}\, N_1^0(u) + \frac{u_2-u}{u_2-u_1}\, N_2^0(u) = \begin{cases} \dfrac{u-u_0}{u_1-u_0} & u \in [u_0,u_1) \\ \\ \dfrac{u_2-u}{u_2-u_1} & u \in [u_1,u_2) \\ \\ 0 & u \notin [u_0,u_2) \end{cases} \ , \\ N_0^2(u) &= \begin{cases} 1-8u^2 & u \in [0,1/4) \\ \\ 2(2u-1)^2 & u \in [1/4,1/2) \\ \\ 0 & u \notin [0,1/2) \end{cases} \ , \end{aligned}$$

obtenemos los valores $N_0^2(1/3) = 2/9$, $N_0^2(2/3) = 0$. $\square$

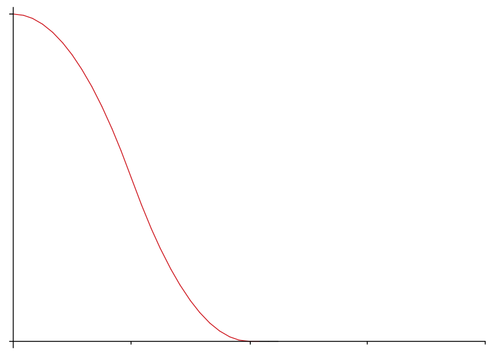

Figura 4.5: Gráfica de $N_0^2(u)$

Problema 4.10 *¿Cuál es el soporte de la función nodal $N_0^2(u)$ para los nudos $\{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$?*

Solución:

Para una función nodal genérica, $N_i^n(u)$, el soporte es $[u_{i-1}, u_{i+n}]$. En nuestro caso, obtenemos $[u_{-1}, u_2]$. Como el nudo u_{-1} no existe, el soporte es $[0, 1/2]$. $\square$