Capítulo 5

Superficies

Problema 5.1 *¿Por qué punto del espacio pasa una superficie de Bézier de malla de control*

$$\left\{ \begin{array}{cccc} (0,0,-1) & (1,0,4) & (2,0,3) & (3,0,-3) \\ (0,2,2) & (1,2,5) & (2,2,6) & (3,2,3) \\ (0,4,-2) & (1,4,4) & (2,4,3) & (2,4,-3) \end{array} \right\}$$

para $u = 1/2$, $v = 1/3$?, ¿y para $u = 0$, $v = 1$?, ¿cuál es el bigrado de la superficie?

Solución:

Como la malla de control tiene tres filas y cuatro columnas, el bigrado es $(2,3)$, es decir, es de grado dos en u y tres, en v. $\square$

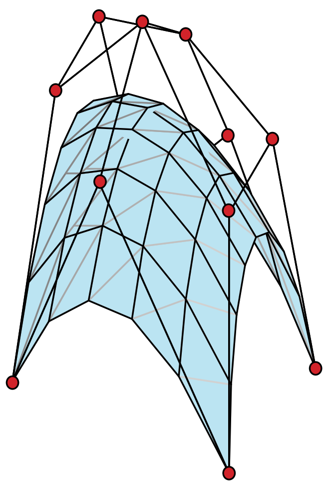

Figura 5.1: Superficie de bigrado $(2,3)$

Un punto de la superficie parametrizado por (u,v) viene dado por

$$c(u,v) = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3} c_{i,j} B_i^2(u) B_j^3(v) \ ,$$

lo que se traduce en el caso concreto,

$$c(1/2, 1/3) = (107/108, 2, 83/27) \ .$$

El caso particular $u = 0$, $v = 1$ se corresponde, sin otros cálculos, con una esquina de la malla, $c(0,1) = c_{0,3} = (3, 0, -3)$. □

Problema 5.2 *Obtener la parametrización simplificada de la superficie de la cuestión 1.*

Solución:

Para un punto general de la superficie parametrizado por (u, v), las coordenadas son

$$\begin{aligned} c^x(u,v) &= 3v - u^2v^3 \\ c^y(u,v) &= 4u \\ c^z(u,v) &= 7u^2v^3 - 6uv^3 + v^3 - 27u^2v^2 + 24uv^2 - 18v^2 + 15u^2v - 12uv \\ &+ 15v - 7u^2 + 6u - 1 \ . \ \square \end{aligned}$$

Problema 5.3 *Elevar el bigrado de la superficie de la cuestión 1 a (3,3). ¿Cuál es la nueva malla de control?*

Solución:

Para elevar el grado de la superficie una unidad en la variable u, podemos aplicar el algoritmo de elevación del grado a las columnas de la malla de control,

$$c_{i,j}^{1,0} = \left(1 - \frac{i}{m+1}\right) c_{i,j} + \frac{i}{m+1} c_{i-1,j} \ ,$$

donde en este caso $m = 2$. Obtenemos la malla de la superficie vista como si fuera de bigrado $(3, 3)$,

$$\left\{ \begin{array}{cccc} (0,0,-1) & (1,0,4) & (2,0,3) & (3,0,-3) \\ (0,4/3,1) & (1,4/3,14/3) & (2,4/3,5) & (3,4/3,1) \\ (0,8/3,2/3) & (1,8/3,14/3) & (2,8/3,5) & (8/3,8/3,1) \\ (0,4,-2) & (1,4,4) & (2,4,3) & (2,4,-3) \end{array} \right\} . \ \square$$

Problema 5.4 *Calcular una normal a la superficie de la cuestión 1 en el punto de parámetros u=1, v=1. ¿Y en u=0, v=1?*

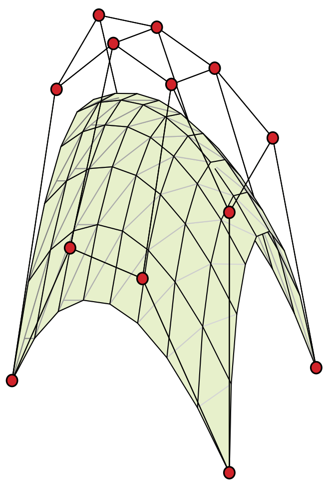

Figura 5.2: Superficie de bigrado elevado a $(3,3)$

Solución:

En el punto $c(1,1) = c_{2,3}$, son vectores tangentes a la superficie $\Delta^{1,0}c_{2,3} = c_{2,3} - c_{1,3} = (-1,2,-6)$ y $\Delta^{0,1}c_{2,3} = c_{2,3} - c_{2,2} = (0,0,-6)$. Por tanto un vector perpendicular a la superficie en dicho punto es

$$\Delta^{1,0}c_{2,3} \times \Delta^{0,1}c_{2,3} = (-12,-6,0)\ .\square$$

Del mismo modo, en el punto $c(0,1) = c_{0,3}$, un vector normal a la superficie es

$$\Delta^{1,0}c_{0,3} \times \Delta^{0,1}c_{0,3} = (c_{1,3} - c_{0,3}) \times (c_{0,3} - c_{0,2}) = (12,-6,2)\ .\square$$

Problema 5.5 *Dar la malla de control de una superficie cualquiera de modo que en $u = 0$ se una a la superficie de la cuestión 1 por su lado de $u = 1$ y formen ambas una superficie de clase C^1.*

Solución:

La curva $u = 0$ de la segunda superficie y la curva $u = 1$ de la primera son iguales, así que la primera fila de la malla de la nueva superficie tiene que coincidir con la última fila de la malla de la superficie inicial, $c_{2,j} = c'_{0,j}$, $\{(0,4,-2),(1,4,4),(2,4,3),(2,4,-3)\}$.

Si además queremos que la superficie compuesta sea de clase C^1, tendremos que fijar también la segunda fila de la malla de la superficie nueva, ya que $\Delta^{1,0}c_{2,j} = \Delta^{1,0}c'_{0,j}$. Es decir, $c'_{1,j} = 2c_{2,j} - c_{1,j}$. Con lo cual, dado que las superficies son de bigrado $(2,3)$, sólo queda una fila, la última, de la malla sin determinar,

$$\left\{ \begin{array}{cccc} (0,4,-2) & (1,4,4) & (2,4,3) & (2,4,-3) \\ (0,6,-6) & (1,6,3) & (2,6,0) & (1,6,-9) \\ a & b & c & d \end{array} \right\}. \ \square$$

Problema 5.6 *Repetir el proceso de la cuestión anterior de modo que la superficie resultante sea de clase C^2. ¿Existen varias superficies? Explicar el resultado.*

Solución:

La condición de que la superficie compuesta resultante sea de clase C^2 determina completamente la malla de control. Sólo quedaba la última fila por determinar y la condición $\Delta^{2,0}c_{2,j} = \Delta^{2,0}c'_{0,j}$ nos permite despejar $c'_{2,j} = 4c_{2,j} - 4c_{1,j} + c_{0,j}$,

$$\left\{ \begin{array}{cccc} (0,4,-2) & (1,4,4) & (2,4,3) & (2,4,-3) \\ (0,6,-6) & (1,6,3) & (2,6,0) & (1,6,-9) \\ (0,8,-17) & (1,8,0) & (2,8,-9) & (-1,8,-27) \end{array} \right\}. \ \square$$

Obviamente, esta superficie es única. Como la parametrización de la superficie es de grado dos en la variable u, al establecer sus dos derivadas, queda determinada de manera única. De hecho, todas las derivadas son iguales en ambas superficies y podríamos haber obtenido igualmente la malla de control extendiendo al intervalo $[1,2]$ la superficie original.

Problema 5.7 *Obtener la malla de control de una superficie de Bézier que verifique $c(0,0) = (0,0,0)$, $c(1,0) = (1,0,2)$, $c(0,1) = (0,1,1)$, $c(1,1) = (1,1,-1)$ y dar su parametrización simplificada.*

Solución:

Como tenemos 2×2 puntos, la superficie interpolante será de bigrado $(1,1)$. Para resolver el problema de interpolación, podemos plantear el sistema de ecuaciones lineales $B_U C B_V^t = A$,

$$\begin{array}{rcl} A & = & \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} \end{pmatrix}, \qquad B_U = \begin{pmatrix} B_0^1(0) & B_1^1(0) \\ B_0^1(1) & B_1^1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ C & = & \begin{pmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} \\ c_{1,0} & c_{1,1} \end{pmatrix}, \qquad B_V = \begin{pmatrix} B_0^1(0) & B_1^1(0) \\ B_0^1(1) & B_1^1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{array}$$

que en nuestro caso es particularmente sencillo, $C = A$. Los propios puntos nos definen la malla de control,

$$\left\{ \begin{array}{cc} (0,0,0) & (0,1,1) \\ (1,0,2) & (1,1,-1) \end{array} \right\}. \ \square$$

La parametrización de la superficie interpolante, un paraboloide hiperbólico, es

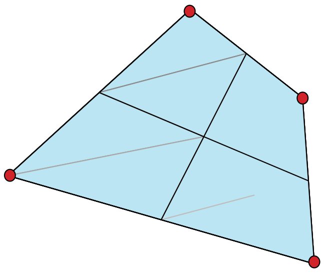

Figura 5.3: Superficie interpolante de bigrado $(1,1)$

$$c(u,v) = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} c_{i,j} B_i^1(u) B_j^1(v) = (u, v, v + 2u - 4uv)\ .\ \square$$

Problema 5.8 *Obtener la malla de control de la gráfica de la función* $f(x,y) = xy^2$.

Solución:

Claramente podemos representar la gráfica (x, y, xy^2) por una superficie de bigrado $(1,2)$. Para las dos primeras coordenadas podemos emplear las particiones equiespaciadas. La tercera coordenada es $B_1^1(x)B_2^2(y)$, con lo cual el vértice c_{12} tendrá tercera coordenada igual a la unidad y el resto de vértices de la malla la tendrán nula. Así pues, la malla es

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (0,0,0) & (0,1/2,0) & (0,1,0) \\ (1,0,0) & (1,1/2,0) & (1,1,1) \end{array} \right\}\ .\ \square$$

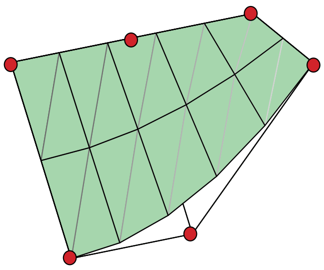

Figura 5.4: Gráfica de la función $f(x,y) = xy^2$

Problema 5.9 *Obtener una superficie de bigrado* $(1,1)$ *que aproxime los valores* $c(1/2,1/3) = (0,0,0)$, $c(0,1) = (1,-1,0)$, $c(1/4,1/3) = (2,1,0)$, $c(1,1) = (2,-1,3)$. *Calcular cuánto se separa la parametrización de la superficie aproximante* $c'(u,v)$ *de los valores de los puntos propuestos, es decir* $|c'(u_i,v_i) - c(u_i,v_i)|$. *Explicar el resultado.*

Solución:

Una superficie de bigrado $(1,1)$ se define con cuatro puntos y nos dan cuatro datos. Por tanto, no tiene nada de extraño que la superficie aproximante sea en realidad interpolante. El sistema de ecuaciones que hay que resolver es $BC = A$,

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} B_0^1(\frac{1}{2})B_0^1(\frac{1}{3}) & B_0^1(\frac{1}{2})B_1^1(\frac{1}{3}) & B_1^1(\frac{1}{2})B_0^1(\frac{1}{3}) & B_1^1(\frac{1}{2})B_1^1(\frac{1}{3}) \\ B_0^1(0)B_0^1(1) & B_0^1(0)B_1^1(1) & B_1^1(0)B_0^1(1) & B_1^1(0)B_1^1(1) \\ B_0^1(\frac{1}{4})B_0^1(\frac{1}{3}) & B_0^1(\frac{1}{4})B_1^1(\frac{1}{3}) & B_1^1(\frac{1}{4})B_0^1(\frac{1}{3}) & B_1^1(\frac{1}{4})B_1^1(\frac{1}{3}) \\ B_0^1(1)B_0^1(1) & B_0^1(1)B_1^1(1) & B_1^1(1)B_0^1(1) & B_1^1(1)B_1^1(1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/6 & 1/12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A &= \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{0,0} \\ c_{0,1} \\ c_{1,0} \\ c_{1,1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

que tiene por solución la matriz C, cuyas filas proporcionan los vértices de la malla de control,

$$\left\{ \begin{matrix} (11/2, 7/2, 0) & (1, -1, 0) \\ (-7, -5/2, -3/2) & (2, -1, 3) \end{matrix} \right\}. \ \square$$

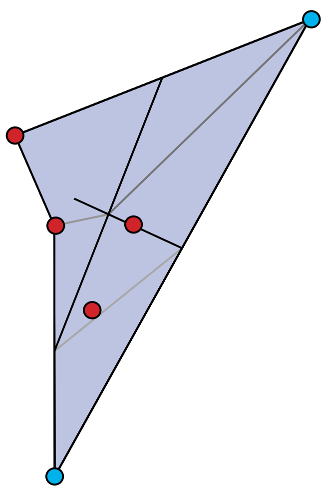

Figura 5.5: Superficie interpolante de bigrado $(1,1)$

Problema 5.10 *Restringir a los intervalos* $[1/2, 1] \times [1/3, 2/3]$ *una superficie de malla de control* $\{(0,0,0), (1,0,1); (0,1,-1), (1,1,1/2)\}$. *¿Cuál es la nueva malla de control?*

Solución:

Para restringir una parametrización utilizamos la forma polar. La malla de la superficie final estará formada por los vértices

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_{0,0} &= c[1/2;1/3] = (1/3, 1/2, -1/12)\,, \\
\tilde{c}_{0,1} &= c[1/2;2/3] = (2/3, 1/2, 1/3)\,, \\
\tilde{c}_{1,0} &= c[1;1/3] = (1/3, 1, -1/2)\,, \\
\tilde{c}_{1,1} &= c[1;2/3] = (2/3, 1, 0)\,,
\end{aligned}$$

valores para los que no se precisa la forma polar en sentido estricto, ya que como sólo tenemos que interpolar una vez por cada variable, los vértices son puntos de la superficie inicial. Por ejemplo, $\tilde{c}_{0,0} = c[1/2;1/3] = c(1/2, 1/3)$. $\square$

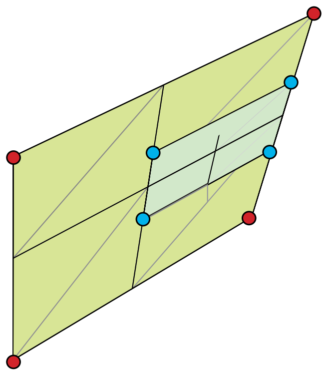

Figura 5.6: Restricción de una superficie de bigrado $(1,1)$

Problema 5.11 *Consideremos una esfera de radio R y centro en el origen. Obtener una representación racional (malla de control y pesos) que permita trazar el primer octante de la superficie.*

Solución:

Un octante de esfera se puede representar por una superficie racional de bigrado $(2,2)$, ya que está limitado por cuadrantes de circunferencia, que son curvas de Bézier racionales de grado dos.

Consideremos el octante de esfera centrada en el origen limitado por los planos XY, XZ e YZ. Si el cuadrante de circunferencia situado en el plano XY se corresponde con la curva $v = 0$, tendremos que el polígono de control $\{(R,0,0),(R,R,0),(0,R,0)\}$ y los pesos $\{1, \sqrt{2}/2, 1\}$ constituirán la primera columna de la malla de control y de la matriz de pesos de la superficie.

Del mismo modo, el cuadrante de circunferencia sobre el plano XZ, de polígono de control $\{(R,0,0),(R,0,R),(0,0,R)\}$ y pesos $\{1, \sqrt{2}/2, 1\}$, si lo asignamos a la curva $u = 0$, proporciona la primera fila de la malla de control y de la matriz de pesos de la superficie. Asignando el cuadrante sobre el plano YZ a la curva $u = 1$, obtenemos la última fila de la malla de control, $\{(0, R, 0), (0, R, R), (0, 0, R)\}$, y de la matriz de pesos de la superficie, $\{1, \sqrt{2}/2, 1\}$.

Para cerrar la superficie faltaría la curva $v = 1$, que en la esfera degenera a un punto, el polo norte. Así que la última columna de la malla de control la forma el punto $(0, 0, R)$ repetido tres veces. Como ese punto es un paralelo de la esfera, sólo que degenerado, la última columna de la matriz de pesos la constituyen los pesos de un cuadrante de circunferencia $\{1, \sqrt{2}/2, 1\}$.

Sólo nos quedan, pues, por obtener el vértice central de la malla, $c_{1,1}$, y el peso correspondiente $w_{1,1}$. Teniendo en cuenta que todas las curvas de parámetro u constante, meridianos, son cuadrantes de circunferencia, es obvio que la fila central de la malla de control debe trazar un cuadrante, para que al interpolar para cualquier valor de u se formen cuadrantes de circunferencia. Esto es posible si los vértices de la fila central de la malla están en ángulo recto, con lo cual el vértice central tiene que ser (R, R, R).

Y para respetar la proporción de los pesos, el peso central tiene que ser $\sqrt{2}/2$ veces el de sus compañeros de fila, que son también $\sqrt{2}/2$, por lo que el peso central toma el valor $1/2$.

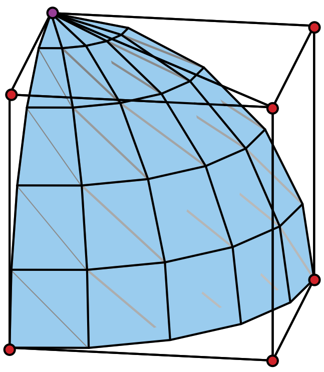

Figura 5.7: Octante de esfera como superficie de Bézier racional

Juntando todos los datos, obtenemos como malla de control del octante

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (R,0,0) & (R,0,R) & (0,0,R) \\ (R,R,0) & (R,R,R) & (0,0,R) \\ (0,R,0) & (0,R,R) & (0,0,R) \end{array} \right\},$$

y por matriz de pesos,

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \sqrt{2}/2 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & \sqrt{2}/2 & 1 \end{array} \right\}. \ \square$$