Capítulo 6

Superficies especiales

Problema 6.1 *Obtener una parametrización para una curva traslacional que se apoye en las curvas parametrizadas* $c(u) = (\cos(\pi u), u^2, \sin(2\pi u))$, $d(v) = (e^v, v^3 - v^2, v)$, $0 \leq u, v, \leq 1$.

Solución:

Ambas curvas pasan por el punto $c(0) = (1, 0, 0) = d(0)$, luego la parametrización de la superficie traslacional viene dada por

$$\begin{aligned} c(u,v) &= c(u) + d(v) - c(0) \\ &= \big(\cos(\pi u) + e^v - 1, u^2 + v^3 - v^2, \sin(2\pi u) + v\big) \ . \ \square \end{aligned}$$

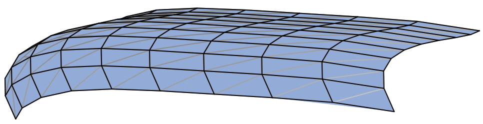

Figura 6.1: Superficie traslacional

Problema 6.2 *Obtener la malla de control de la superficie traslacional que se apoya sobre las curvas de Bézier de polígonos* $\{(1,0,1),(2,0,2),(3,0,0)\}$, $\{(1,0,1),(1,-1,0),(1,-2,2)\}$.

Solución:

La malla de control se obtiene por traslación del polígono de control de una curva a lo largo del otro,

$$c_{i,j} = c_{1_i} + d_{1_j} - a \ ,$$

donde $a = c_{1_0} = d_{1_0}$ es el punto de corte de las curvas.

En nuestro caso concreto,

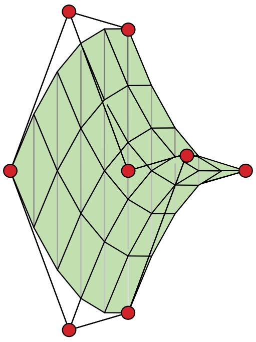

Figura 6.2: Superficie de Bézier traslacional

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (1,0,1) & (1,-1,0) & (1,-2,2) \\ (2,0,2) & (2,-1,1) & (2,-2,3) \\ (3,0,0) & (3,-1,-1) & (3,-2,1) \end{array} \right\} . \ \square$$

Problema 6.3 *Construir la parametrización de una superficie de Coons que se apoye en el cuadrilátero curvo formado por la curvas parametrizadas* $(u^2, u+1, u)$, (v, v^3+1, v), $(1, 2u^2+2, u+1)$, $(v-v^2+1, 2v^3+2, 1+v)$.

Solución:

La parametrización de la superficie de Coons se construye a partir de tres superficies regladas,

$$\begin{aligned} c_c(u,v) &= (1-v)c_1(u) + vc_2(u) \\ &= (1-v)(u^2, u+1, u) + v(1, 2u^2+2, u+1) , \\ c_d(u,v) &= (1-u)d_1(v) + ud_2(v) \\ &= (1-u)(v, v^3+1, v) + u(v-v^2+1, 2v^3+2, 1+v) , \\ c_{cd}(u,v) &= (1-v)(1-u)c_1(0) + (1-v)uc_1(1) + v(1-u)c_2(0) + vuc_2(1) , \\ c(u,v) &= c_c(u,v) + c_d(u,v) - c_{cd}(u,v) , \end{aligned}$$

de donde se infiere que la parametrización de la superficie de Coons es

$$c(u,v) = ((1-v)u^2 + (v-v^2)u + v, 2u^2v + (1-2v+v^3)u + 1 + v^3, v+u)$$

y obviamente pasa por las cuatro curvas del enunciado del problema. $\square$

Problema 6.4 *Obtener la malla de control de una superficie de Coons que se apoya sobre cuatro curvas de Bézier, cuyos polígonos respectivos vienen dados por los puntos* $\{(0,0,0), (1/2,0,2), (1,0,3), (2,0,0)\}$, $\{(0,0,0), (0,1,3), (0,3,0)\}$, $\{(0,3,0), (1/2,3,3), (1,3,1), (2,4,0)\}$, $\{(2,0,0), (2,1,2), (2,4,0)\}$.

Solución:

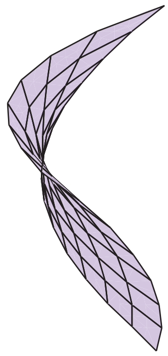

Figura 6.3: Superficie de Coons

Los vértices de la malla de control de la superficie interpolante de Coons se expresan como

$$c_{i,j} = c_{ci,j} + c_{di,j} - c_{cdi,j} \ ,$$

en función de los vértices de tres superficies regladas auxiliares,

$$\begin{aligned}
c_{ci,j} &= \frac{n-j}{n} c_{1i} + \frac{j}{n} c_{2i} \ , \\
c_{di,j} &= \frac{m-i}{m} d_{1j} + \frac{i}{m} d_{2j} \ , \\
c_{cdi,j} &= \frac{n-j}{n} \left(\frac{m-i}{m} a + \frac{i}{m} b \right) + \frac{j}{n} \left(\frac{m-i}{m} c + \frac{i}{m} d \right) \ ,
\end{aligned}$$

que en nuestro caso concreto proporcionan la malla de control

$$\left\{ \begin{array}{ccc}
(0,0,0) & (0,1,3) & (0,3,0) \\
(1/2,0,2) & (1/2,5/6,31/6) & (1/2,3,3) \\
(1,0,3) & (1,2/3,13/3) & (1,3,1) \\
(2,0,0) & (2,1,2) & (2,4,0)
\end{array} \right\} . \ \square$$

Problema 6.5 *Obtener la parametrización de una superficie reglada que se apoya sobre las curvas parametrizadas* $c_1(u) = (\sin u, \cos u, e^u)$, $c_2(u) = (u^2 + 1, u^3 - 4, u)$.

Solución:

Para obtener dicha la parametrización de dicha superficie reglada, sólo tenemos que interpolar linealmente entre puntos homólogos de las curvas,

$$\begin{aligned}
c(u,v) &= (1-v)c_1(u) + vc_2(u) \ , \\
c^x(u,v) &= (1-v)\sin u + v(u^2+1) \ , \\
c^y(u,v) &= (1-v)\cos u + v(u^3-4) \ , \\
c^z(u,v) &= (1-v)e^u + uv \ . \ \square
\end{aligned}$$

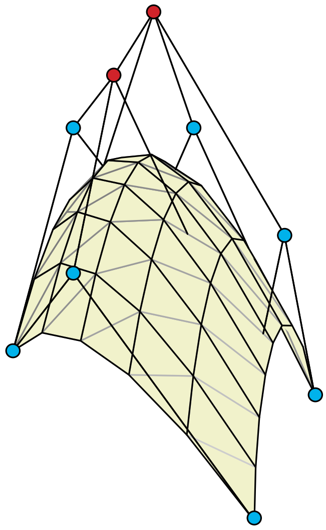

Figura 6.4: Superficie de Coons de bigrado $(3, 2)$

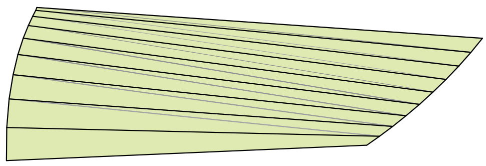

Figura 6.5: Superficie reglada

Problema 6.6 *Estudiar si es desarrollable la superficie reglada de la cuestión anterior.*

Solución:

Para que sea desarrollable, tienen que estar en un mismo plano, para todo valor de u, los vectores $c_1'(u) = (\cos u, -\sin u, e^u)$, $c_2'(u) = (2u, 3u^2, 1)$ y $c_2(u) - c_1(u) = (u^2 + 1 - \sin u, u^3 - 4 - \cos u, u - e^u)$.

Por ejemplo, para $u = 0$ estos vectores son $(1, 0, 1)$, $(0, 0, 1)$, $(1, -5, -1)$, cuyo producto mixto es 5, luego no son coplanarios y la superficie no puede ser desarrollable. $\square$

Problema 6.7 *Obtener la malla de control, los pesos y los nudos de una semiesfera.*

Solución:

Podemos generar una semiesfera rotando un cuadrante de circunferencia. Si lo situamos en el primer cuadrante del plano XZ con centro en el origen, el polígono de control será $\{(R, 0, 0), (R, 0, R), (0, 0, R)\}$, con pesos $\{1, \sqrt{2}/2, 1\}$.

Si queremos verlo como curva spline de un único tramo, el polígono y los pesos serán los mismos, pero con nudos $\{0, 0, 1, 1\}$, ya que es de grado dos.

Rotamos el polígono, de modo que coincida con los vértices de una circunferencia B-spline en el plano XY, de la cual conocemos ya su polígono B-spline, $\{a, 0, 0)$, $(a, a, 0)$, $(0, a, 0)$, $(-a, a, 0)$, $(-a, 0, 0)$, $(-a, -a, 0)$, $(0, -a, 0)$, $(a, -a, 0)$, $(a, 0, 0)\}$, sus pesos, $\{1, \sqrt{2}/2, 1, \sqrt{2}/2, 1, \sqrt{2}/2, 1, \sqrt{2}/2, 1\}$ y sus nudos $\{0, 0, 1/4, 1/4, 1/2, 1/2, 3/4, 3/4, 1, 1\}$.

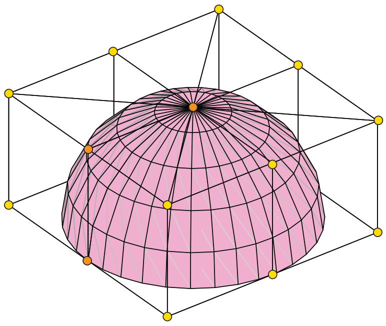

Figura 6.6: Semiesfera como superficie B-spline

Por tanto, la semiesfera tiene por malla de control,

$$\left\{\begin{array}{ccc} (R,0,0) & (R,0,R) & (0,0,R) \\ (R,R,0) & (R,R,R) & (0,0,R) \\ (0,R,0) & (0,R,R) & (0,0,R) \\ (-R,R,0) & (-R,R,R) & (0,0,R) \\ (-R,0,0) & (-R,0,R) & (0,0,R) \\ (-R,-R,0) & (-R,-R,R) & (0,0,R) \\ (0,-R,0) & (0,-R,R) & (0,0,R) \\ (R,-R,0) & (R,-R,R) & (0,0,R) \\ (R,0,0) & (R,0,R) & (0,0,R) \end{array}\right\},$$

que hemos escrito traspuesta por comodidad. La matriz de pesos correspondiente es

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1 \end{array}\right\},$$

y finalmente ya conocemos los nudos en el parámetro u $\{0, 0, 1, 1\}$ y en la v, $\{0, 0, 1/4, 1/4, 1/2, 1/2, 3/4, 3/4, 1, 1\}$. $\square$

Problema 6.8 *Obtener la malla, los pesos y los nudos de un cilindro de radio R y altura h con eje Z como superficie B-spline.*

Solución:

Como ya sabemos que una circunferencia B-spline en el plano XY, centrada en el origen, tiene por polígono B-spline, $\{a, 0, 0)$, $(a, a, 0)$, $(0, a, 0)$, $(-a, a, 0)$,

$(-a,0,0)$, $(-a,-a,0)$, $(0,-a,0)$, $(a,-a,0)$, $(a,0,0)\}$, pesos, $\{1,\ \sqrt{2}/2,\ 1,\ \sqrt{2}/2,\ 1,\ \sqrt{2}/2,\ 1,\ \sqrt{2}/2,\ 1\}$ y nudos $\{0,0,1/4,1/4,1/2,1/2,3/4,3/4,1,1\}$, un cilindro de radio R y altura h, que es una superficie reglada apoyada sobre dos circunferencias coaxiales de igual radio, está descrito por la malla de control

$$\left\{\begin{array}{cc} (R,0,0) & (R,0,h) \\ (R,R,0) & (R,R,h) \\ (0,R,0) & (0,R,h) \\ (-R,R,0) & (-R,R,h) \\ (-R,0,0) & (-R,0,h) \\ (-R,-R,0) & (-R,-R,h) \\ (0,-R,0) & (0,-R,h) \\ (R,-R,0) & (R,-R,h) \\ (R,0,0) & (R,0,h) \end{array}\right\},$$

la matriz de pesos asociados a dichos vértices

$$\left\{\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 1 \end{array}\right\},$$

con nudos $\{0,0,1/4,1/4,1/2,1/2,3/4,3/4,1,1\}$ asociados a la variable u y $\{0,1\}$ a la variable v. $\square$

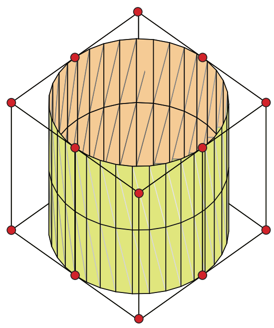

Figura 6.7: Cilindro como superficie B-spline

Problema 6.9 *Obtener la malla y los pesos de un cuadrante de cilindro de radio R y altura h con eje Z como superficie de Bézier.*

Solución:

Un cuadrante de circunferencia de radio R, con centro en el origen, situada en el plano XY tiene por polígono de control $\{(R,0,0),(R,R,0),(0,R,0)\}$ y pesos $\{1,\sqrt{2/2},1\}$.

Para construir la malla de control de un cuadrante de cilindro, sólo tenemos que duplicar dicho polígono a altura h,

$$\left\{\begin{array}{cc} (R,0,0) & (R,0,h) \\ (R,R,0) & (R,R,h) \\ (0,R,0) & (0,R,h) \end{array}\right\},$$

lo mismo que la matriz de pesos,

$$\left\{\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 1 \end{array}\right\}. \ \Box$$

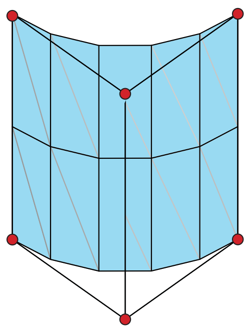

Figura 6.8: Cuadrante de cilindro como superficie de Bézier

Problema 6.10 *Obtener el polígono y los nudos de una circunferencia de radio R como curva B-spline de tres tramos.*

Solución:

Sabemos que un arco de circunferencia de 120 grados, simétrico en torno al eje Y, se puede representar por una curva de Bézier de polígono de control $\{(1,\sqrt{3}/2,1/2),(1,0,2),(1,-\sqrt{3}/2,1/2)\}$ y pesos $\{1,1/2,1\}$.

Para representar los otros dos tramos de circunferencia, sólo tenemos que rotar 120 grados el polígono de control, con los mismos pesos, $\{(1,-\sqrt{3}/2,1/2),$ $(1,-\sqrt{3},-1),$ $(1,0,-1)\}$, $\{(1,0,-1),(1,\sqrt{3},-1),(1,\sqrt{3}/2,1/2)\}$.

Podemos incluir los tres tramos en un polígono B-spline, $\{(1,\sqrt{3}/2,1/2),$ $(1,0,2),$ $(1,-\sqrt{3}/2,1/2),$ $(1,-\sqrt{3},-1),$ $(1,0,-1),$ $(1,\sqrt{3},-1),$ $(1,\sqrt{3}/2,1/2)\}$, con pesos $\{1,1/2,1,1/2,1,1/2,1\}$.

Para ello, tenemos que incluir tramos ficticios, repitiendo nudos, de modo que la curva pase por los extremos de los tramos, $\{0,0,1/3,1/3,2/3,2/3,1,1\}$. $\Box$

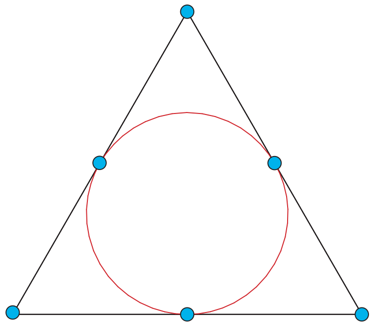

Figura 6.9: Circunferencia B-spline de tres tramos

Problema 6.11 *Consideremos un toro formado al girar en torno al eje Z una circunferencia de radio R situada en el plano XZ, con centro $(a, 0, 0)$. Obtener una representación racional, bien B-spline, bien de Bézier que permita trazar el toro.*

Solución:

Veamos el caso B-spline. Sabemos que una circunferencia centrada en $(a, 0, 0)$ de radio R en el plano XZ tiene por polígono B-spline,

$$\{(a+R,0,0),(a+R,0,R),(a,0,R),(a-R,0,R),(a-R,0,0),\\ (a-R,0,-R),(a,0,-R),(a+R,0,-R),(a+R,0,0)\}.$$

Los pesos son $\{1, \sqrt{2}/2, 1, \sqrt{2}/2, 1, \sqrt{2}/2, 1, \sqrt{2}/2, 1\}$ y la sucesión de nudos, $\{0, 0, 1/4, 1/4, 1/2, 1/2, 3/4, 3/4, 1, 1\}$.

Sólo tenemos que rotar el polígono para obtener la malla B-spline,

$$c_{0,0} = (a+R,0,0),\ c_{0,1} = (a+R,a+R,0),\ c_{0,2} = (0,a+R,0),$$

$$c_{0,3} = (-a-R,a+R,0),\ c_{0,4} = (-a-R,0,0),\ c_{0,5} = (-a-R,-a-R,0),$$

$$c_{0,6} = (0,-a-R,0),\ c_{0,7} = (a+R,-a-R,0),\ c_{0,8} = (a+R,0,0);$$

$$c_{1,0} = (a+R,0,R),\ c_{1,1} = (a+R,a+R,R),\ c_{1,2} = (0,a+R,R),$$

$$c_{1,3} = (-a-R,a+R,R),\ c_{1,4} = (-a-R,0,R),\ c_{1,5} = (-a-R,-a-R,R),$$

$$c_{1,6} = (0,-a-R,R),\ c_{1,7} = (a+R,-a-R,R),\ c_{1,8} = (a+R,0,R);$$

$$c_{2,0} = (a,0,R),\ c_{2,1} = (a,a,R),\ c_{2,2} = (0,a,R),$$

$$c_{2,3} = (-a,a,R),\ c_{2,4} = (-a,0,R),\ c_{2,5} = (-a,-a,R),$$

$$c_{2,6} = (0,-a,R),\ c_{2,7} = (a,-a,R),\ c_{2,8} = (a,0,R);$$

$$c_{3,0} = (a-R,0,R),\ c_{3,1} = (a-R,a-R,R),\ c_{3,2} = (0,a-R,R),$$

$$c_{3,3} = (-a+R,a-R,R),\ c_{3,4} = (-a+R,0,R),\ c_{3,5} = (-a+R,-a+R,R),$$

$$c_{3,6} = (0,-a+R,R),\ c_{3,7} = (a-R,-a+R,R),\ c_{3,8} = (a-R,0,R);$$

$$c_{4,0}=(a-R,0,0),\ c_{4,1}=(a-R,a-R,0),\ c_{4,2}=(0,a-R,0),$$
$$c_{4,3}=(-a+R,a-R,0),\ c_{4,4}=(-a+R,0,0),\ c_{4,5}=(-a+R,-a+R,0),$$
$$c_{4,6}=(0,-a+R,0),\ c_{4,7}=(a-R,-a+R,0),\ c_{4,8}=(a-R,0,0);$$
$$c_{5,0}=(a-R,0,-R),\ c_{5,1}=(a-R,a-R,-R),\ c_{5,2}=(0,a-R,-R),$$
$$c_{5,3}=(-a+R,a-R,-R),\ c_{5,4}=(-a+R,0,-R),\ c_{5,5}=(-a+R,-a+R,-R),$$
$$c_{5,6}=(0,-a+R,-R),\ c_{5,7}=(a-R,-a+R,-R),\ c_{5,8}=(a-R,0,-R);$$
$$c_{6,0}=(a,0,-R),\ c_{6,1}=(a,a,-R),\ c_{6,2}=(0,a,-R),$$
$$c_{6,3}=(-a,a,-R),\ c_{6,4}=(-a,0,-R),\ c_{6,5}=(-a,-a,-R),$$
$$c_{6,6}=(0,-a,-R),\ c_{6,7}=(a,-a,-R),\ c_{6,8}=(a,0,-R);$$
$$c_{7,0}=(a+R,0,-R),\ c_{7,1}=(a+R,a+R,-R),\ c_{7,2}=(0,a+R,-R),$$
$$c_{7,3}=(-a-R,a+R,-R),\ c_{7,4}=(-a-R,0,-R),\ c_{7,5}=(-a-R,-a-R,-R),$$
$$c_{7,6}=(0,-a-R,-R),\ c_{7,7}=(a+R,-a-R,-R),\ c_{7,8}=(a+R,0,-R);$$
$$c_{8,0}=(a+R,0,0),\ c_{8,1}=(a+R,a+R,0),\ c_{8,2}=(0,a+R,0),$$
$$c_{8,3}=(-a-R,a+R,0),\ c_{8,4}=(-a-R,0,0),\ c_{8,5}=(-a-R,-a-R,0),$$
$$c_{8,6}=(0,-a-R,0),\ c_{8,7}=(a+R,-a-R,0),\ c_{8,8}=(a+R,0,0).$$

Y lo mismo con los pesos,

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1 \\
\sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\
1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1 \\
\sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\
1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1 \\
\sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\
1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1 \\
\sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\
1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 1
\end{array}\right\}.$$

La sucesión de nudos en u es $\{0,0,1/4,1/4,1/2,1/2,3/4,3/4,1,1\}$, lo mismo que la sucesión de nudos en v. □

Si queremos obtener la malla de control de un octante de toro, sólo tenemos que girar un cuarto de vuelta un cuarto de circunferencia, de polígono

$$\{(a+R,0,0),(a+R,0,R),(a,0,R)\},$$

y pesos, $\{1,\sqrt{2}/2,1\}$. El resultado es la malla de control,

$$\left\{\begin{array}{ccc}
(a+R,0,0) & (a+R,a+R,0) & (0,a+R,0) \\
(a+R,0,R) & (a+R,a+R,R) & (0,a+R,R) \\
(a,0,R) & (a,a,R) & (0,a,R)
\end{array}\right\}$$

y la matriz de pesos,

$$\left\{\begin{array}{ccc}
1 & \sqrt{2}/2 & 1 \\
\sqrt{2}/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\
1 & \sqrt{2}/2 & 1
\end{array}\right\}.$$

Para el resto de octantes se procede de manera similar. Todos ellos se obtienen de submatrices del caso del toro completo. □