TEMA Nº 16: CONCEPTOS BÁSICOS DEL ANALISIS DE REGRESIÓN. RELACIÓN ALTURAS-DIÁMETROS EN LAS MASAS.

POLITÉCNICA

ANALISIS DE REGRESIÓN

Para el cálculo de gran número de parámetros de masa forestal es imprescindible la utilización de la técnica estadística de los ajustes de regresión

Mediante esta podemos establecer relaciones funcionales entre dos variables, viendo como evoluciona una en función de otra.

Esto habitualmente se utiliza, para evaluar la evolución de valores de variables difíciles de medir mediante la de variables fáciles de medir.

Vamos a ***recordar*** los conceptos básicos, necesarios para realizar ajustes de regresión y para poder interpretar su fiabilidad.

OBJETO DEL ANALISIS DE REGRESIÓN

Pretende estimar la relación entre variables interdependientes, de tal manera que conocida una o varias, (variables independientes o predictoras), podamos estimar la (variable dependiente).

Y viendo como evoluciona una o unas (v.i), prever como evoluciona la otra (v.d.)

Variables interdependientes son las que tienen algún grado de asociación entre ellas, lo cual nos puede servir para deducir valores de una en función de los de la otra.

Generalmente nos interesará deducir los valores de la variable mas difícil de medir en función de los de la variable fácil de medir.

POLITÉCNICA

OBJETO DEL ANALISIS DE REGRESIÓN

Pretende estimar la relación entre variables interdependientes, de tal manera que conocida una o varias, (variables independientes o predictoras), podamos estimar la (variable dependiente).

Y viendo como evoluciona una o unas (v.i), prever como evoluciona la otra (v.d.)

ANALISIS DE REGRESIÓN simple

Función estadística

$$Y = f(x)$$

variable dependiente

variable independiente o predictora

ANALISIS DE REGRESIÓN MÚLTIPLE

$$y = f\,(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ..)$$

Función estadística

variable dependiente

variables independientes

En el campo forestal con mucha frecuencia:

Variable independiente o predictora de referencia el "dn"

Variables dependientes frecuentes: altura, volumen, crecimientos, diámetros de copa, espesores de corteza,……

ANALISIS DE REGRESIÓN

$$Y = f(x)$$

$$Y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots)$$

La funciones obtenidas por ajuste de regresión nos explican el cambio de una variable en función de otra, pero no de forma exhaustiva como las funciones matemáticas ordinarias

Podemos asegurar el valor de una variable dependiente en función de otra predictora dentro de unos ciertos límites y con una cierta probabilidad

Recordatorio de los conceptos estadísticos más utilizados

"Función de Distribución" o "Distribucion de frecuencias" de valores de una variable

dn (cm.)	Nº pies/Ha.
d_1	N_{15}
d_2	N_{20}
d_3	N_{25}
d_4	N_{30}
d_5	N_{35}
d_6	N_{40}
d_7	N_{45}
d_8	N_{50}

POLITÉCNICA

Población

N elementos

Media : $\mu = \dfrac{\sum n_i \cdot x_i}{\sum n_i (N)}$

Varianza :

$$\sigma_x{}^2 = \frac{\sum n_i \cdot (x_i - \mu)^2}{N}$$

Desviación típica :

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum n_i \cdot (x_i - \mu)^2}{N}}$$

Muestra

n elementos

Estimador de la media : $\overline{x} = \dfrac{\sum n_i \cdot x_i}{\sum n_i (n)}$

Estimador de la varianza :

$$s_{\overline{x}}{}^2 = \frac{\sum n_i \cdot (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$

Estimador Desviación típica :

$$s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\sum n_i \cdot (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

Función de Distribución de dos variables:

Nº	dn (cm.)	h (m.)
N_{15}	d_1	h_1
N_{20}	d_2	h_2
N_{25}	d_3	h_3
N_{30}	d_4	h_4
N_{35}	d_5	h_5
N_{40}	d_6	h_6
N_{45}	d_7	h_7
N_{50}	d_8	h_8

POLITÉCNICA

Población

N elementos

Media : $\nu = \dfrac{\sum n_i \cdot y_i}{N}$

Varianza :

$$\sigma_x{}^2 = \frac{\sum n_i \cdot (y_i - \nu)^2}{N}$$

Covarianza :

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum n_i \cdot (x_i - \mu)(y_i - \nu)}{N}$$

Muestra

n elementos

Estimador de la media : $\bar{y} = \dfrac{\sum n_i \cdot y_i}{\sum n_i (n)}$

Estimador de la varianza :

$$s_{\bar{y}}{}^2 = \frac{\sum n_i \cdot (y_i - \bar{y})^2}{n-1}$$

Estimador de la covarianza :

$$s_{xy} = \frac{\sum n_i \cdot (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}$$

Población | **Muestra**

N elementos | **n** elementos

Covarianza :

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum n_i \cdot (x_i - \mu)(y_i - \nu)}{N}$$

Estimador de la covarianza :

$$s_{xy} = \frac{\sum n_i \cdot (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}$$

Miden el grado de asociación entre dos variables, pero difícil de interpretar dependen de las unidades y magnitudes de las variables

Coeficiente de correlación (ρ):

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

Valores entre +1 y -1

fáciles de interpretar

Estimador de (ρ):

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

Coeficiente de determinación (ρ²):

$$\rho^2 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2}$$

Valores entre 0 y 1

Fáciles de interpretar

Estimador de (ρ²):

$$r^2 = \frac{s_{xy}^2}{s_x^2 \cdot s_y^2}$$

POLITÉCNICA

MODOS DE ESTABLECER LA RELACIÓN DE REGRESIÓN

Para establecer la relación de regresión entre dos variables, tomaremos una muestra de valores de ambas variables en el área para la cual queremos obtener la relación. Obtendremos así una muestra formada por pares de valores (x_i, y_i)

Las relaciones de regresión entre las variables muestreadas las podemos establecer por dos procedimientos:

MÉTODO GRÁFICO

MÉTODO ANALÍTICO

METODO GRÁFICO DE AJUSTE REGRESIÓN

Pasos a seguir para realizar un ajuste de regresión entre dos variables interdependientes

1. Tomamos una muestra de valores de "x" y de "y" en el área para el cual queremos establecer el ajuste
2. El método gráfico de ajuste, se basa en la representación en un sistema de coordenadas de los pares de valores (x_i, y_i) muestreados de las dos variables entre las que queremos establecer la relación de regresión, eligiendo el eje de abcisas para la variable independiente o predictora (x_i) y el eje de ordenadas para la variable dependiente (y_i).

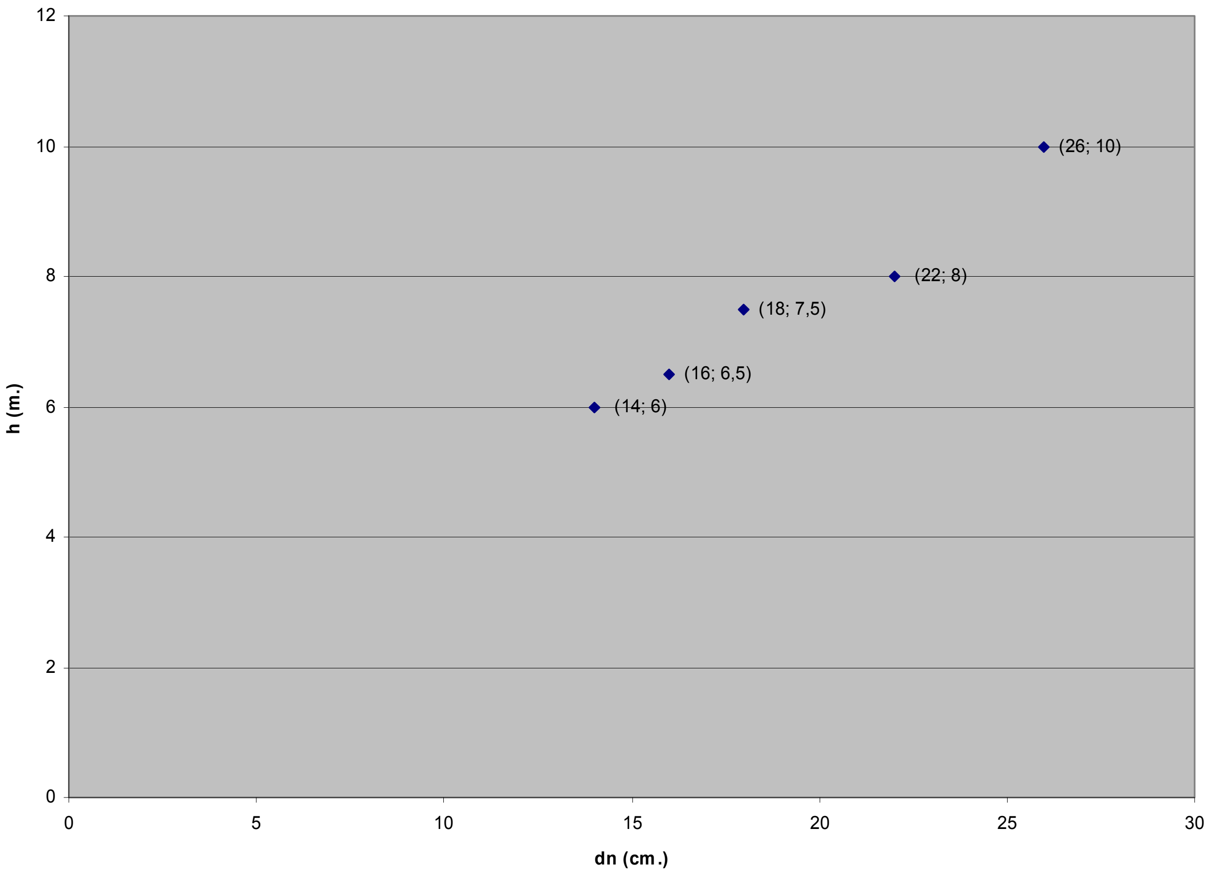
Cada pareja de valores (x,y), representa un punto en el plano, y el conjunto de todos ellos una "nube de puntos".

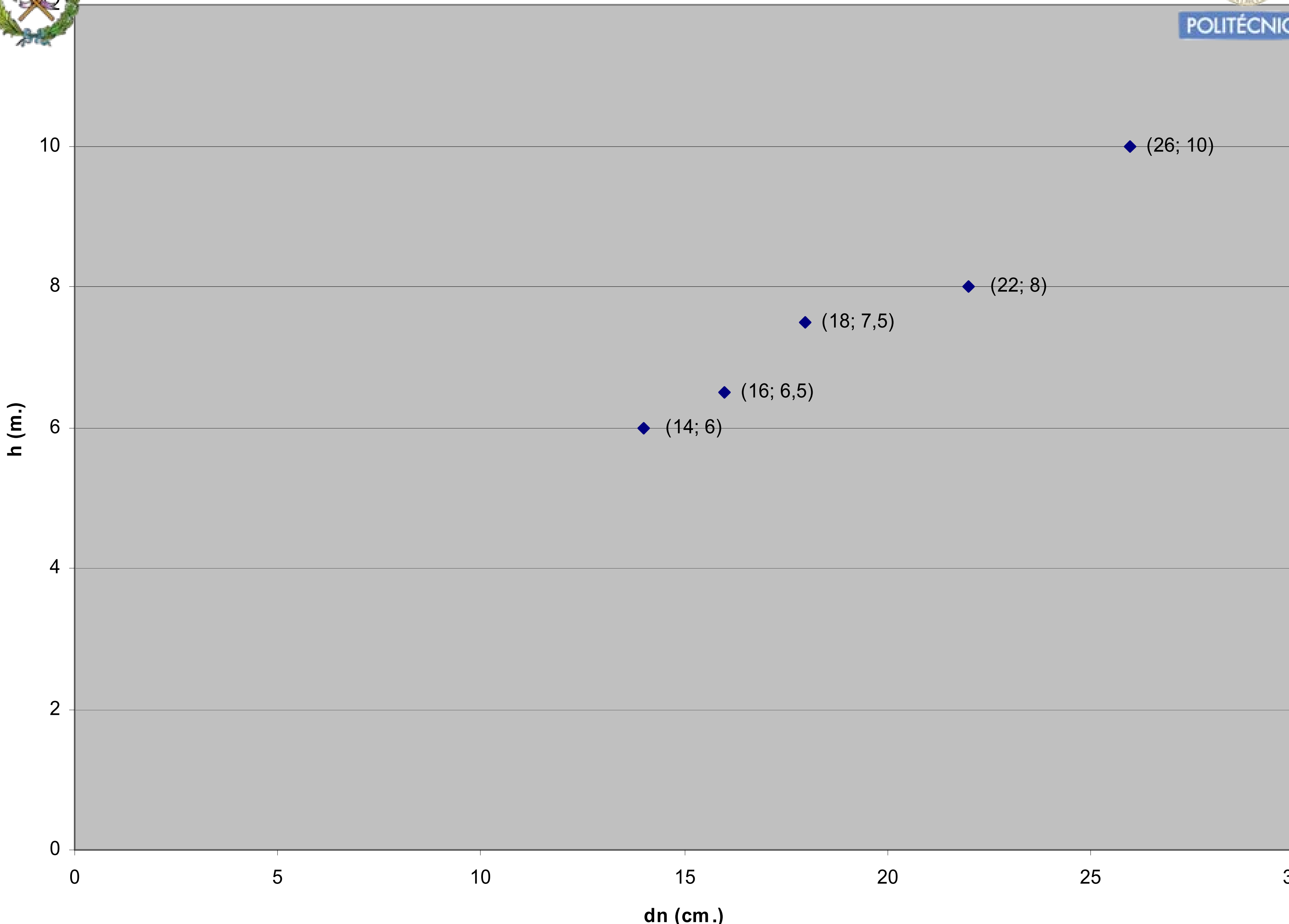
arbol nº	dn (cm.)	h (m.)	arbol nº	dn (cm.)	h (m.)
1	14	6	23	23	8
2	16	6,5	24	29	14
3	18	7,5	25	22	8,5
4	22	8	26	41	18
5	26	10	27	47	19,5
6	28	13	28	33	14
7	30	13	29	37	15,5
8	21	7,5	30	40	18
9	34	14	31	25	10
10	40	17	32	17	8
11	42	18	33	30	15
12	46	18,5	34	34	15
13	32	13	35	21	8,5
14	34	15	36	19	8,5
15	36	14,5	37	26	11
16	38	16	38	27	12
17	39	17	39	28	12,5
18	23	8,5	40	31	14
19	24	9	41	25	10
20	33	14	42	25	11
21	49	20	43	21	10
22	16	7	44	29	11,5

Si en un rodal tomamos datos de alturas y dn de 44 árboles.

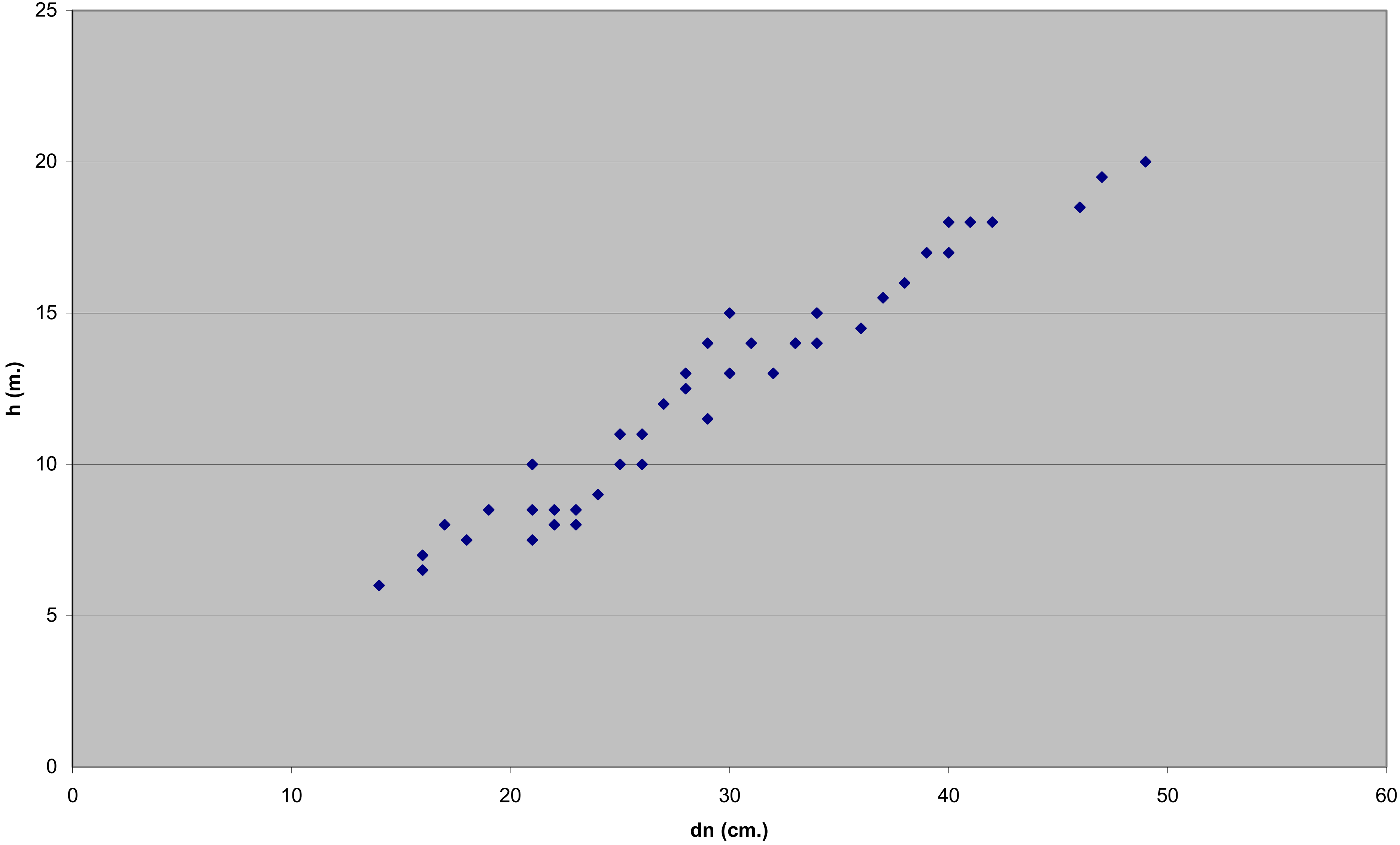
El dn y la h de cada árbol un punto

Los datos de los cinco primeros árboles, cinco puntos

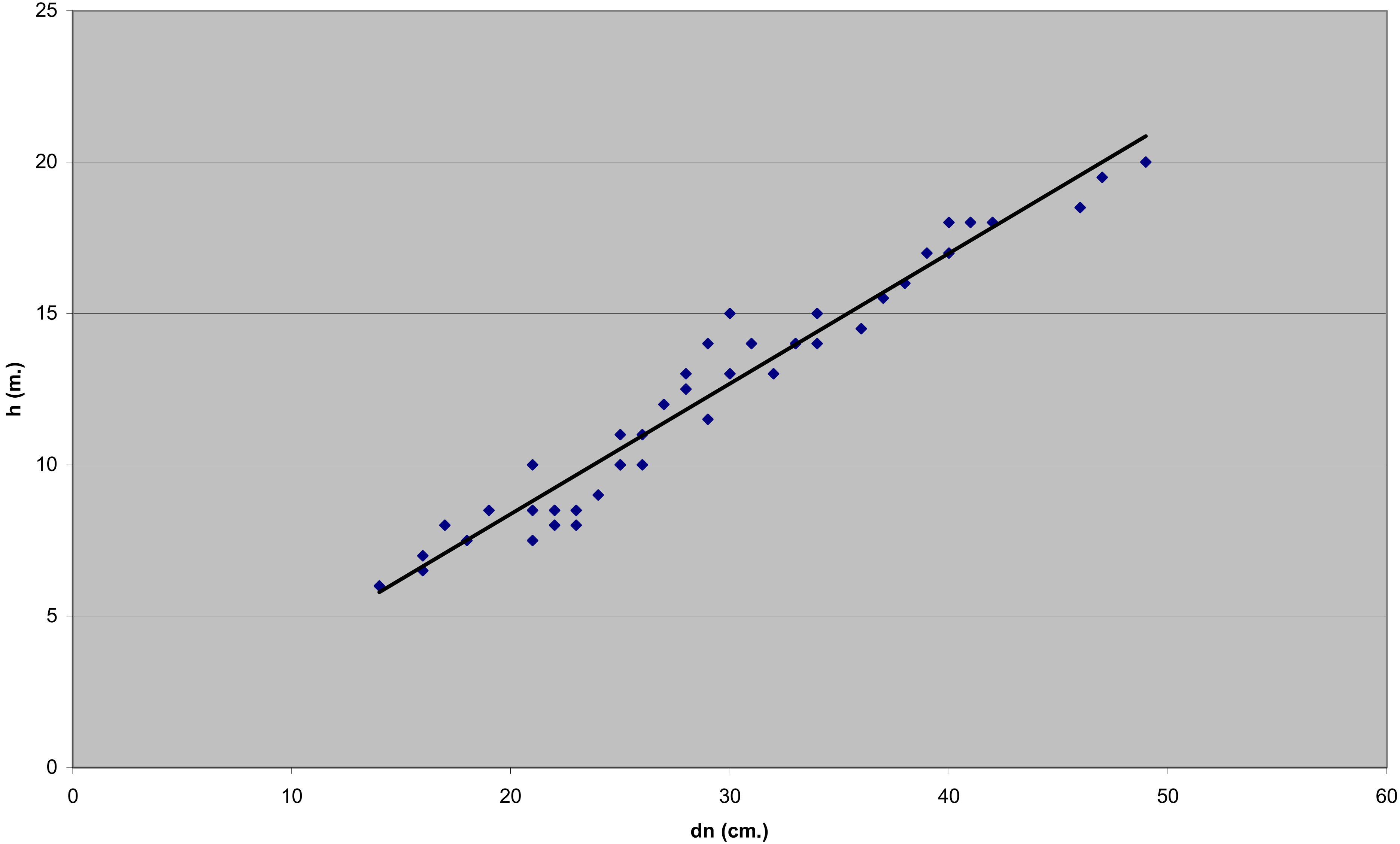


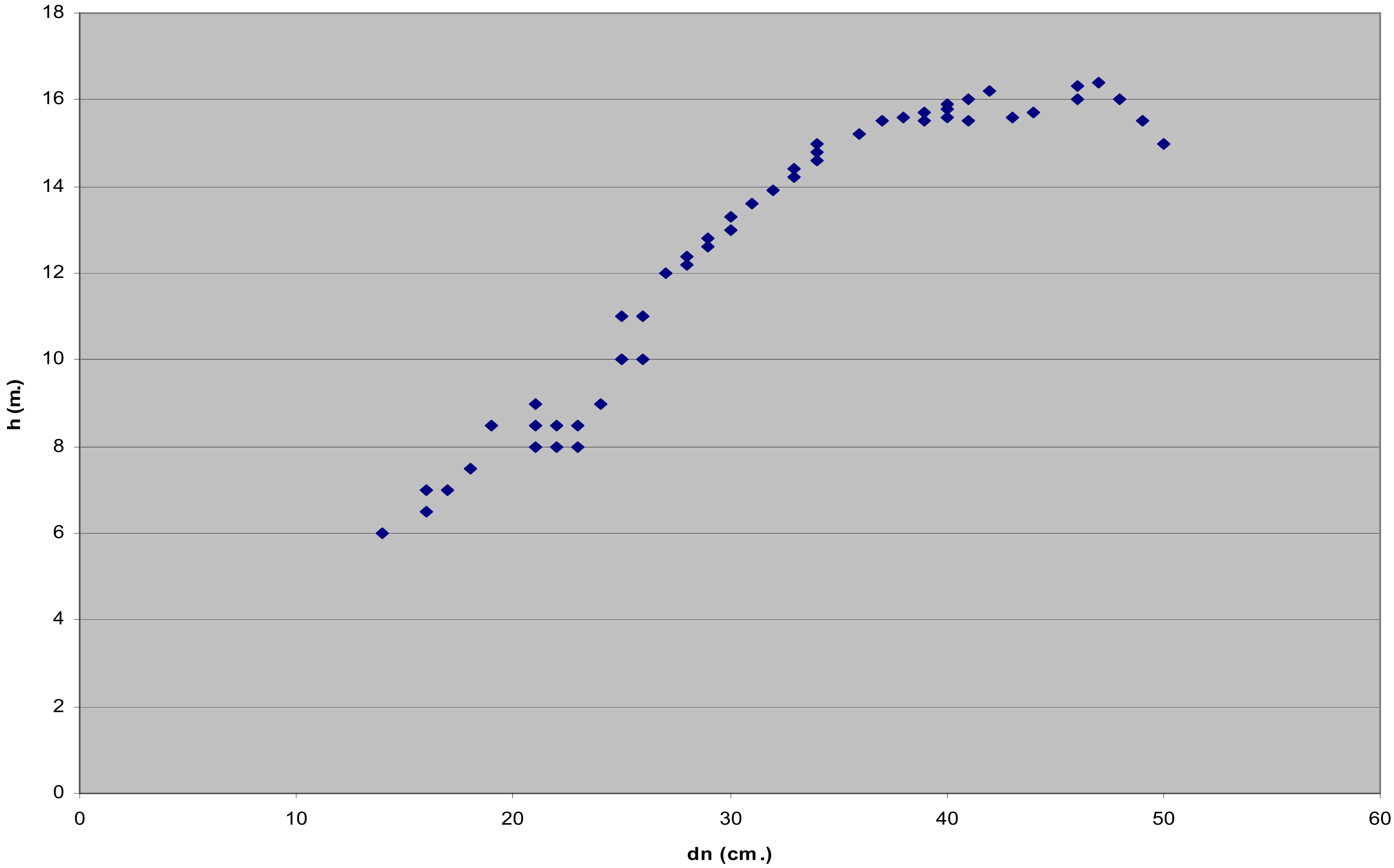

(26; 10)
(22; 8)
(18; 7,5)
(16; 6,5)
(14; 6)
h (m.)
10
8
6
4
2
0
0
5
10
15
20
25
dn (cm.)

Los datos de todos los árboles, (los 44), una nube de puntos que marcan una tendencia.

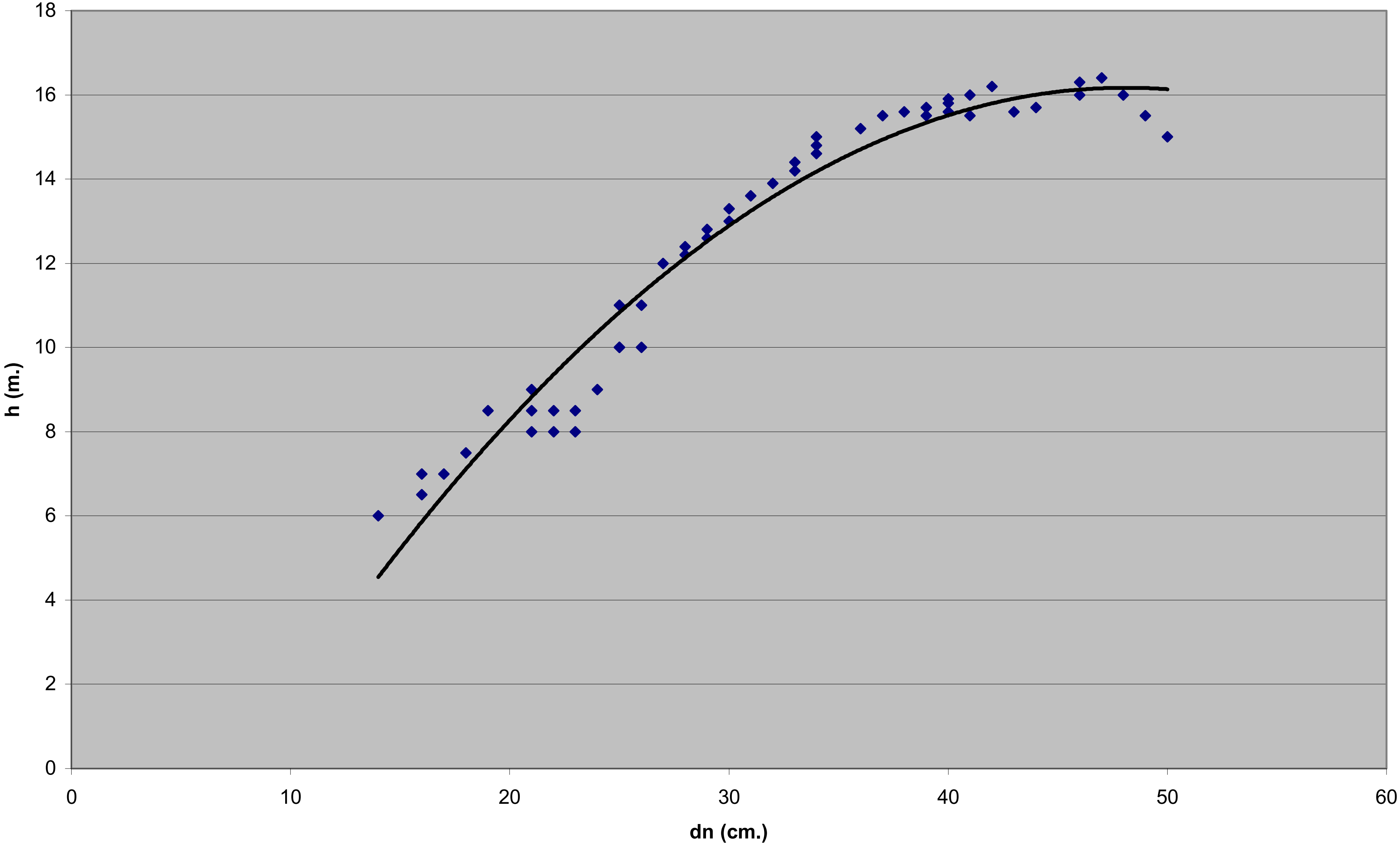


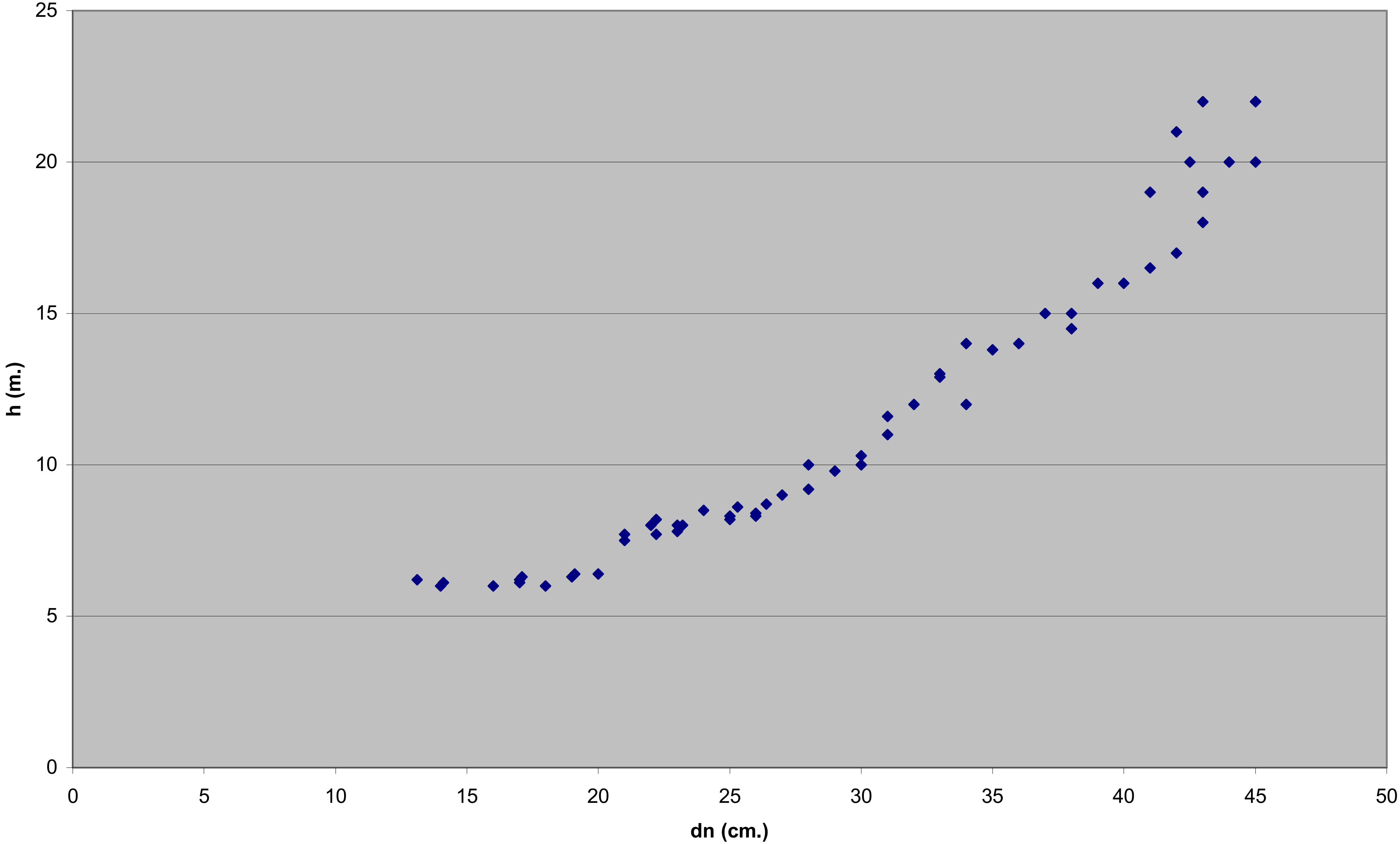
En este caso una línea recta.



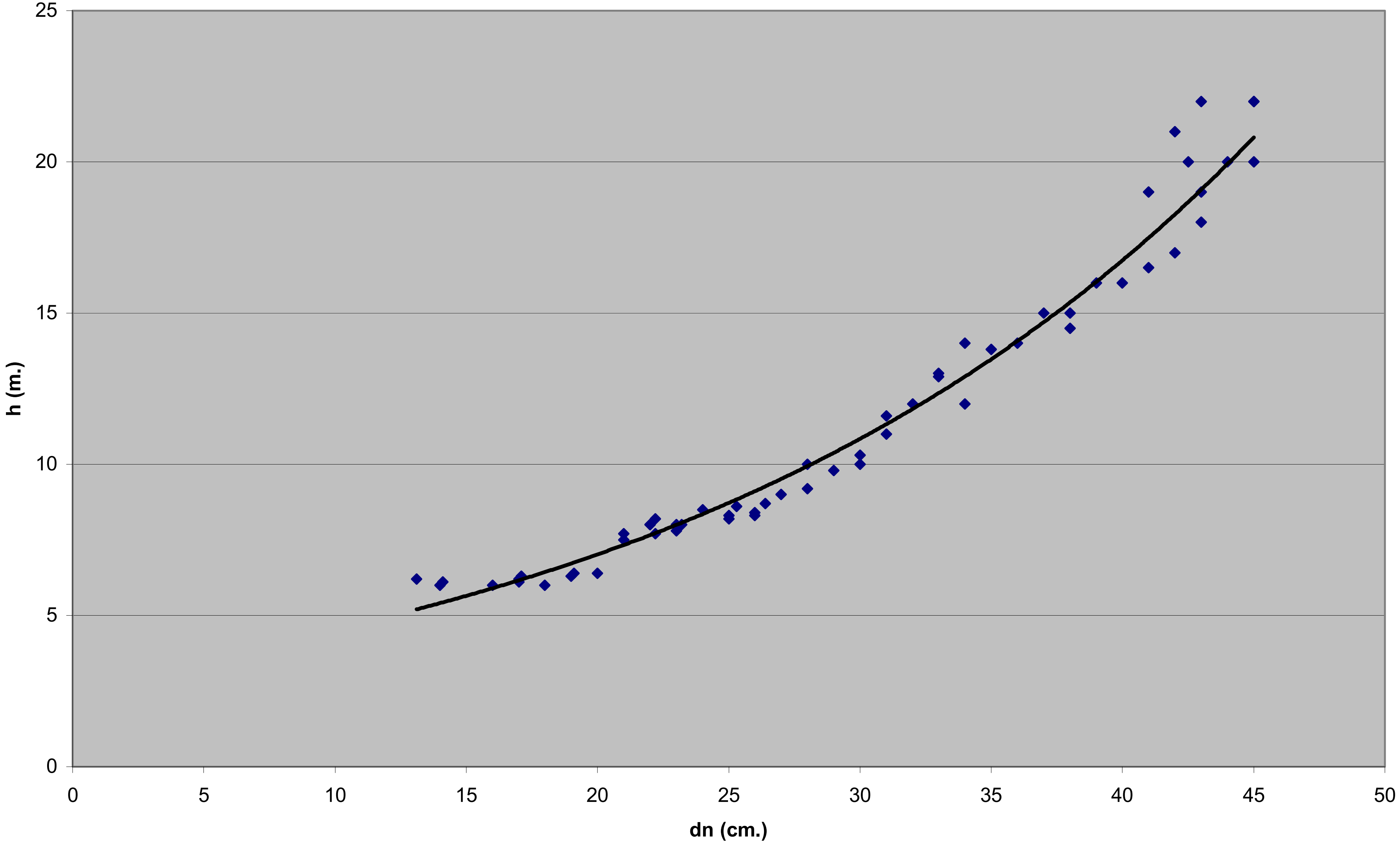

h (m.)
dn (cm.)
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
0
10
20
30
40
50
60

En este caso una función polinómica.

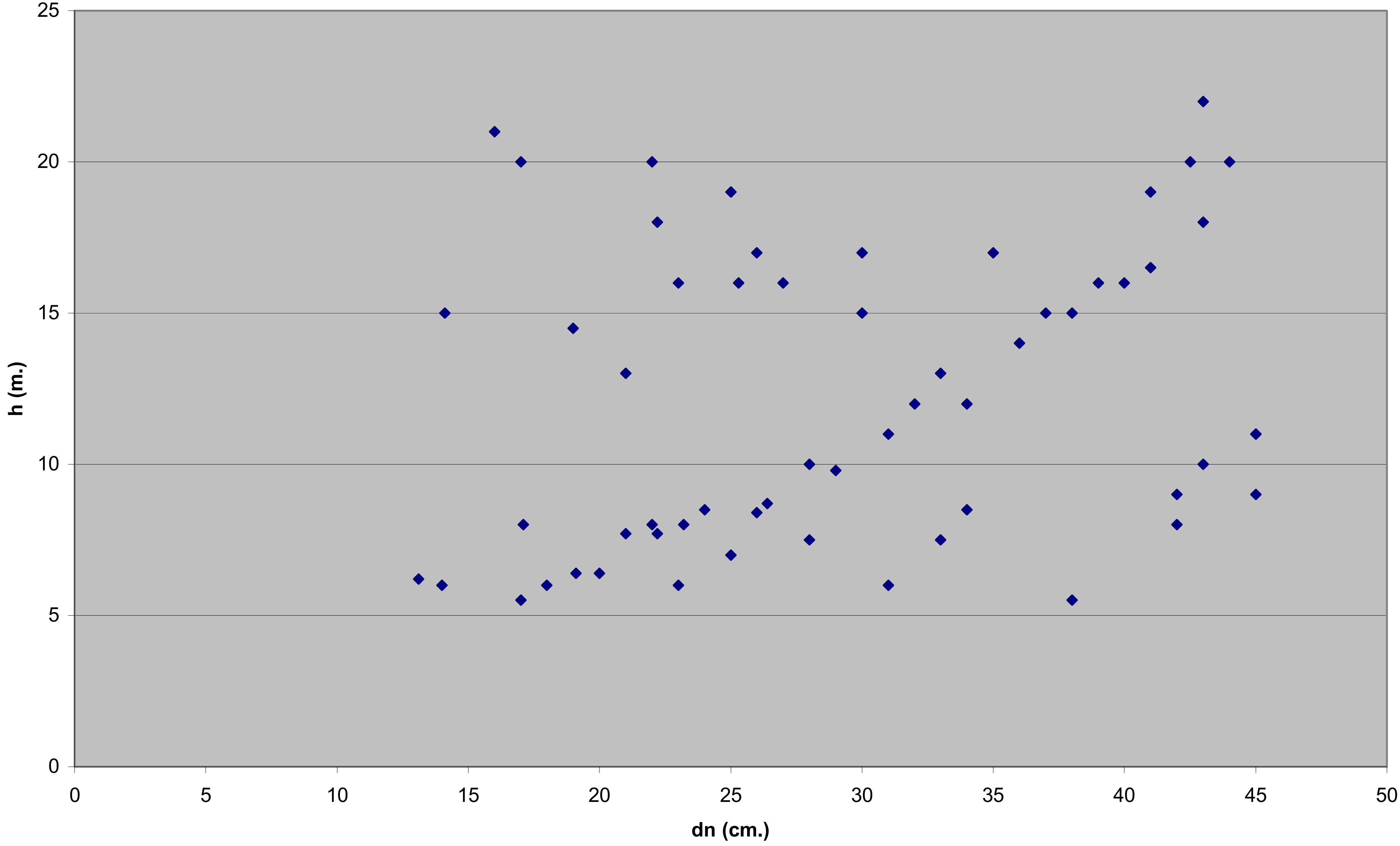



25
20
15
10
5
0
h (m.)
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
dn (cm.)

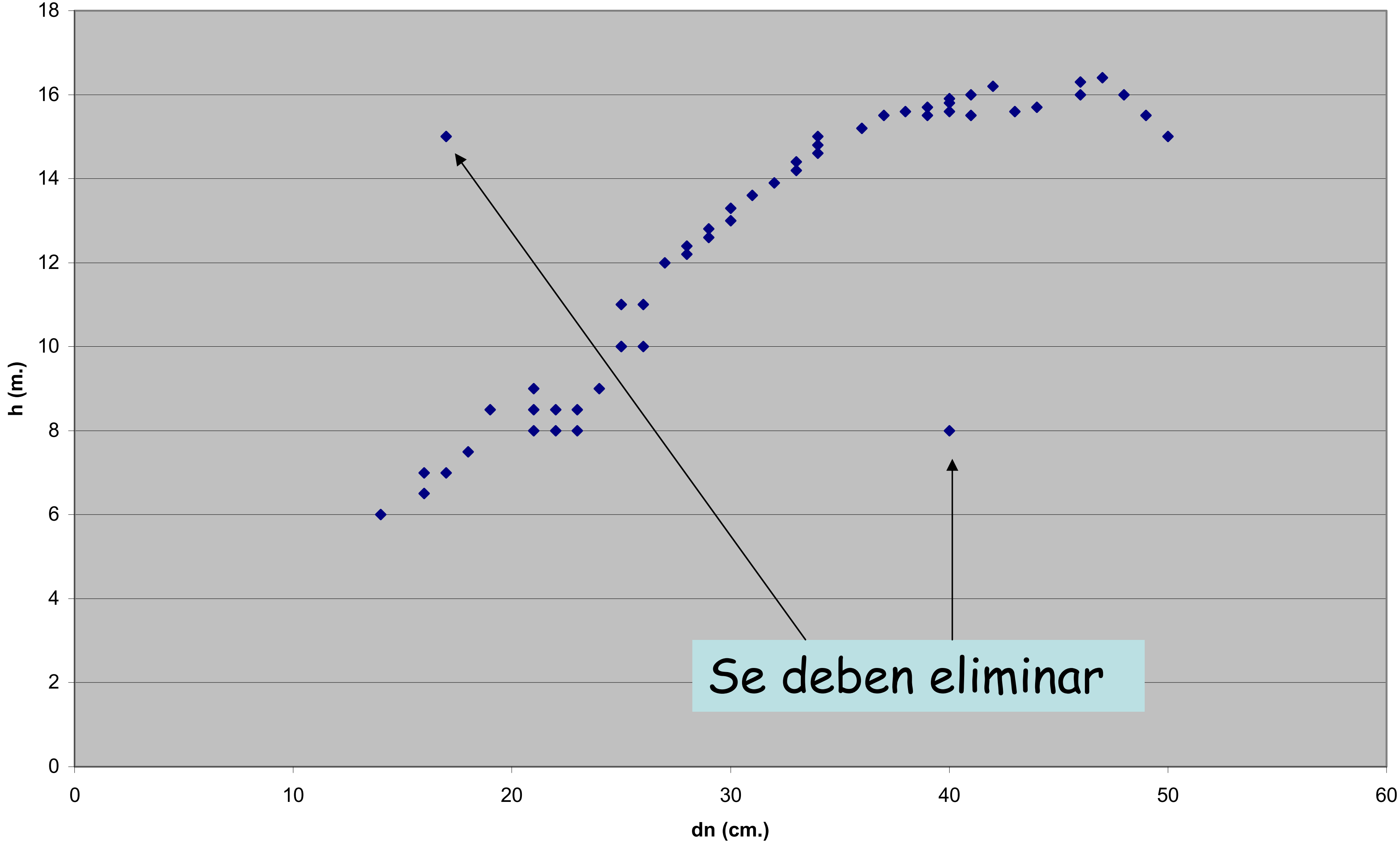
En este caso una función exponencial.



En este caso los puntos dispersos no hay tendencia de la nube de puntos, no variables interdependientes. Ajuste no válido.



En ocasiones se observan "puntos aberrantes" (error al pasar datos – casos excepcionales no representativos).



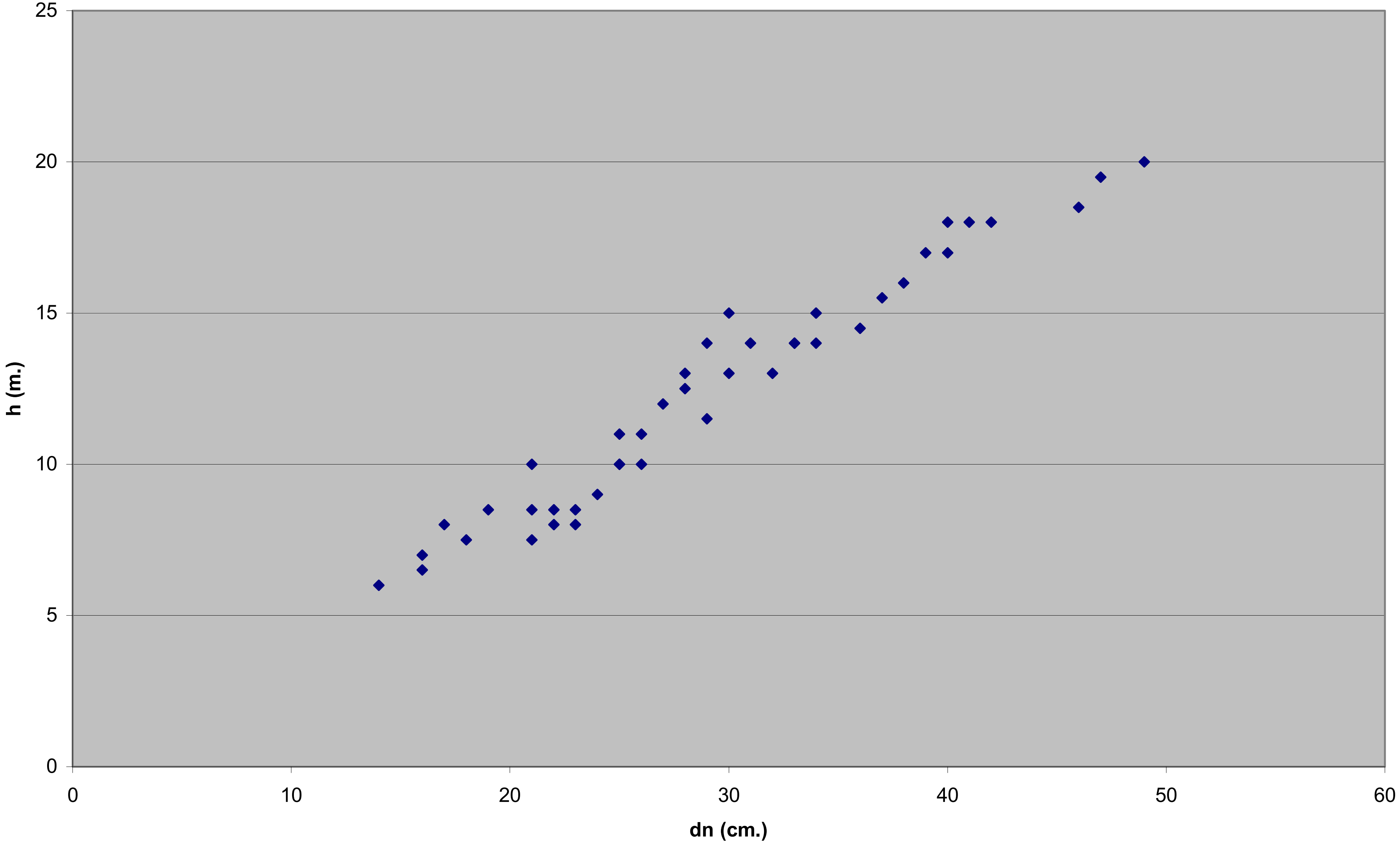
METODO GRÁFICO DE AJUSTE DE LA REGRESIÓN

1. Tomamos una muestra de valores de x y de y en el área para el cual queremos establecer el ajuste

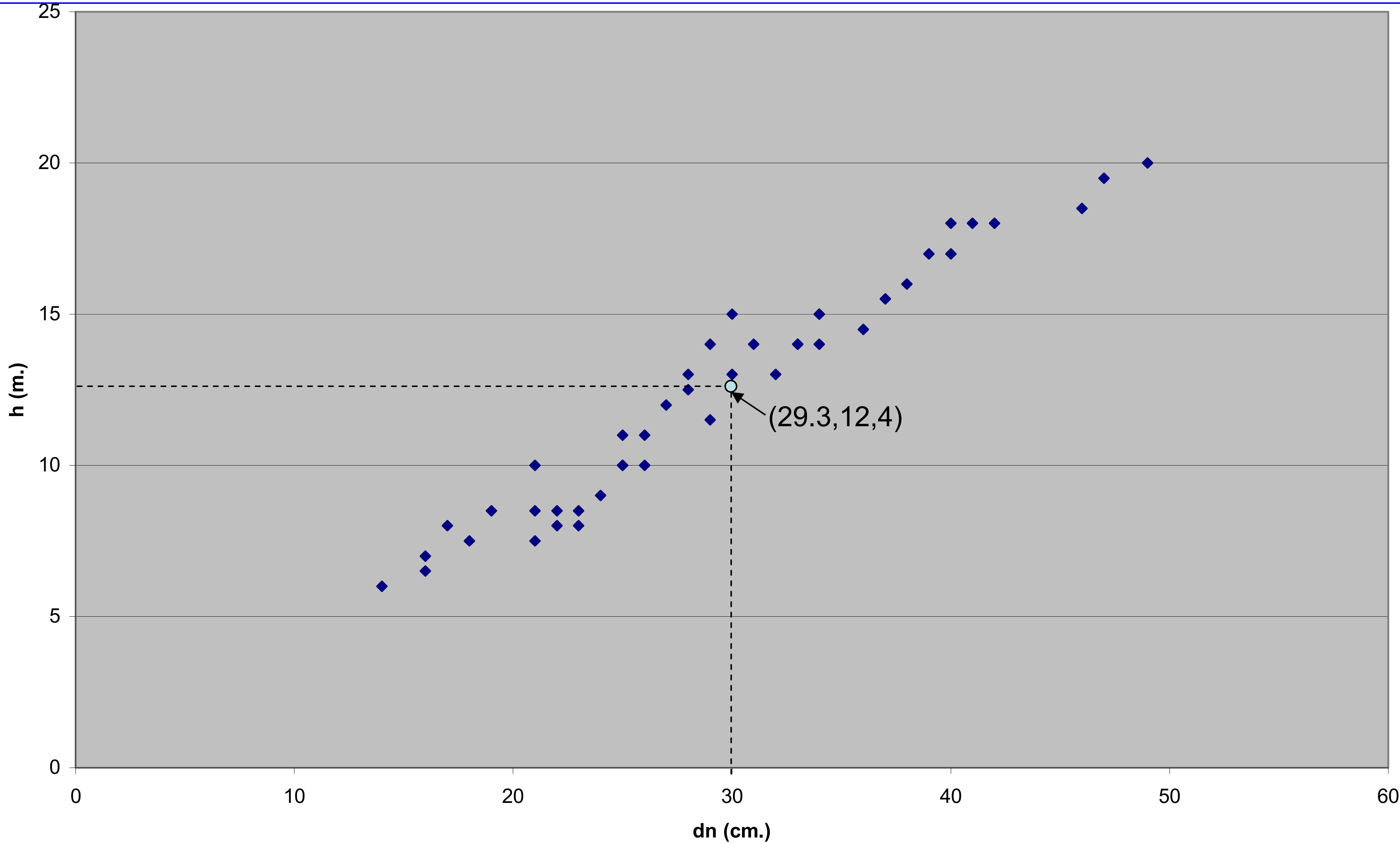
2. El método gráfico de ajuste, se basa en la representación en un sistema de coordenadas de los pares de valores (x_i, y_i) muestreados de las dos variables entre las que queremos establecer la relación de regresión, eligiendo el eje de abcisas para la variable independiente o predictora (x_i) y el eje de ordenadas para la variable dependiente (y_i). Cada pareja de valores (x,y), representa un punto en el plano, y el conjunto de todos ellos una nube de puntos

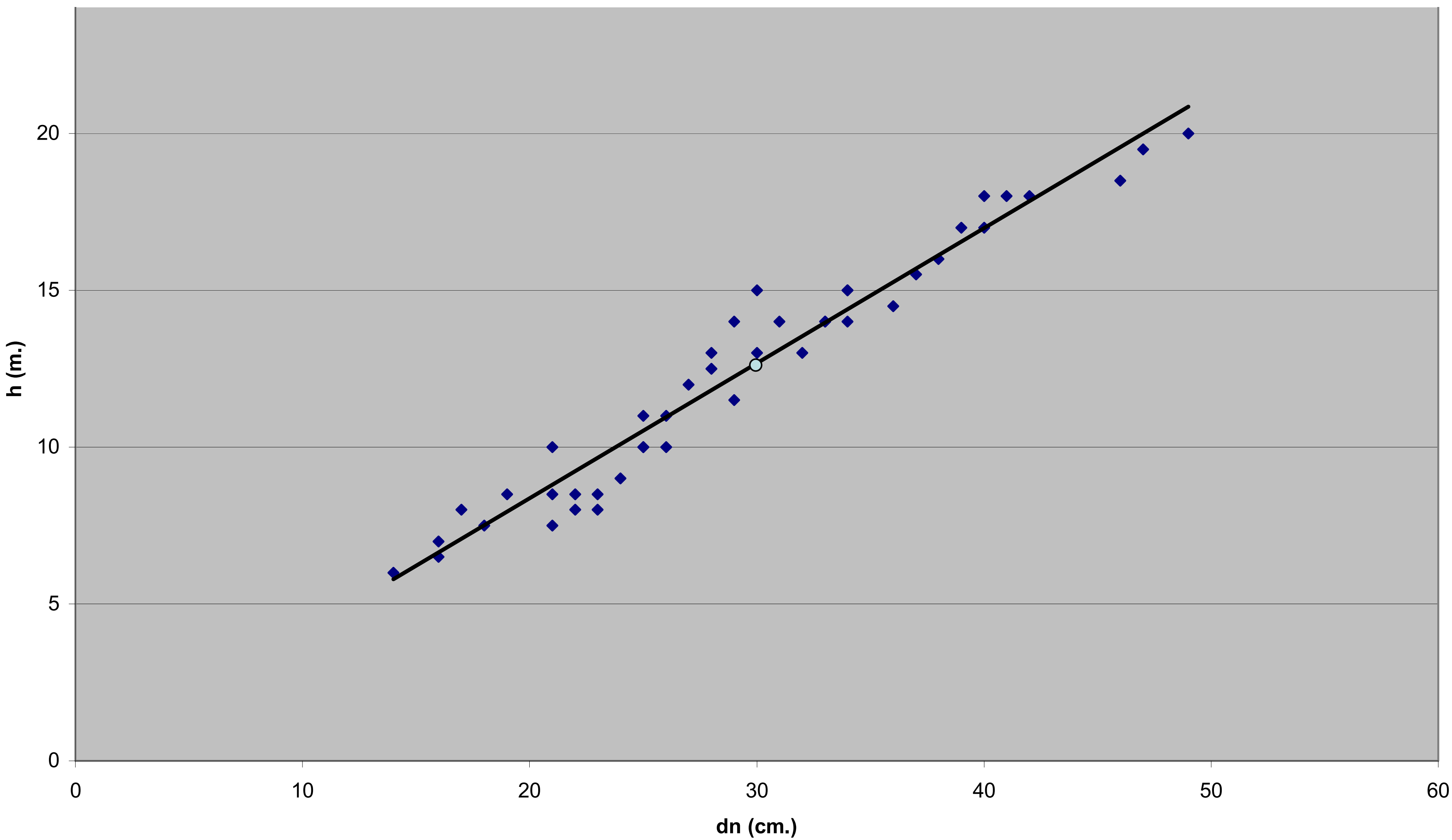
3. A partir del "centro de gravedad" de la nube de puntos procuramos trazar una "línea recta" que deje el "mismo número de puntos a un lado y a otro de la misma"

nube de puntos



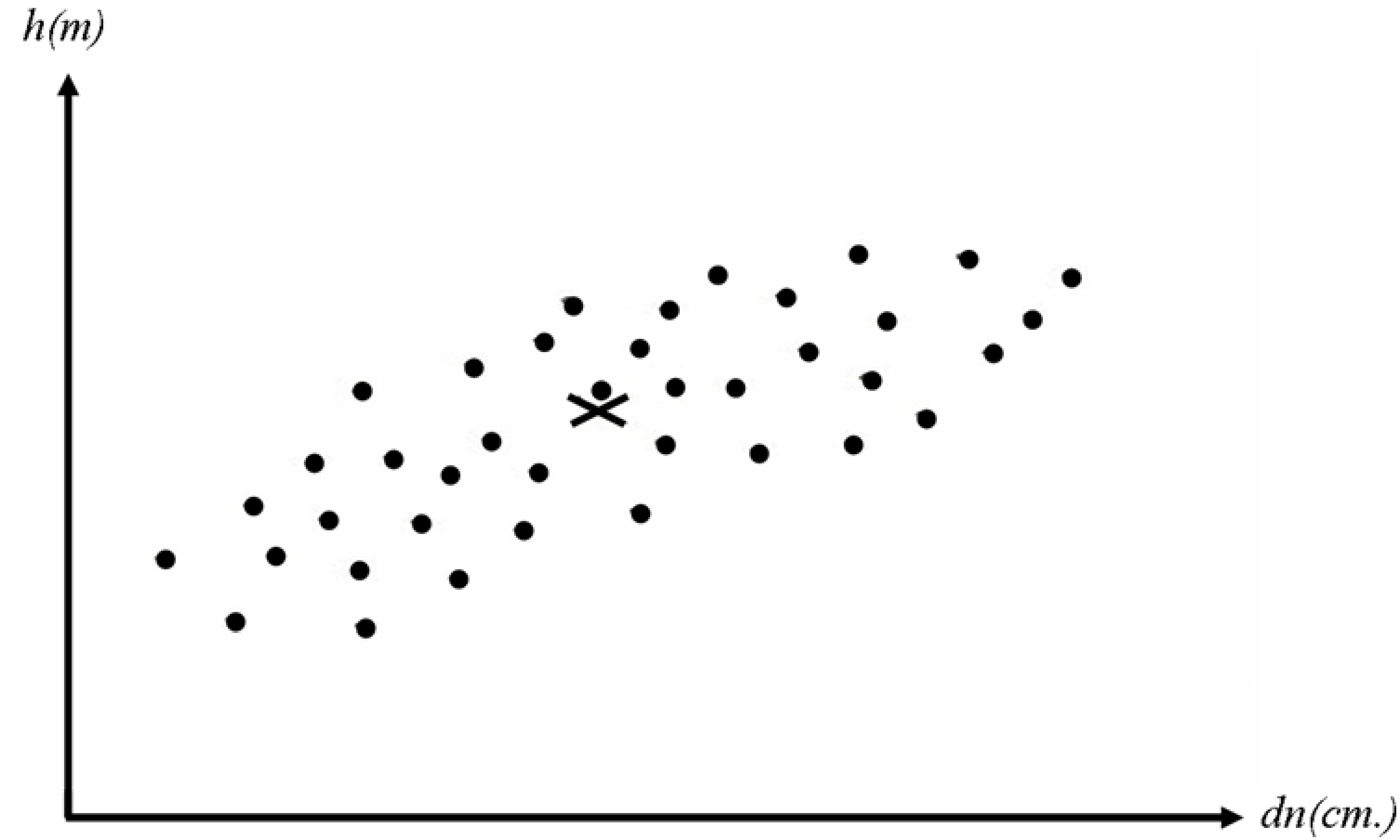
A partir del centro de gravedad de la nube de puntos procuramos trazar una línea recta que deje el mismo número de puntos a un lado y a otro de misma




h (m.)
dn (cm.)
0
5
10
15
20
0
10
20
30
40
50
60

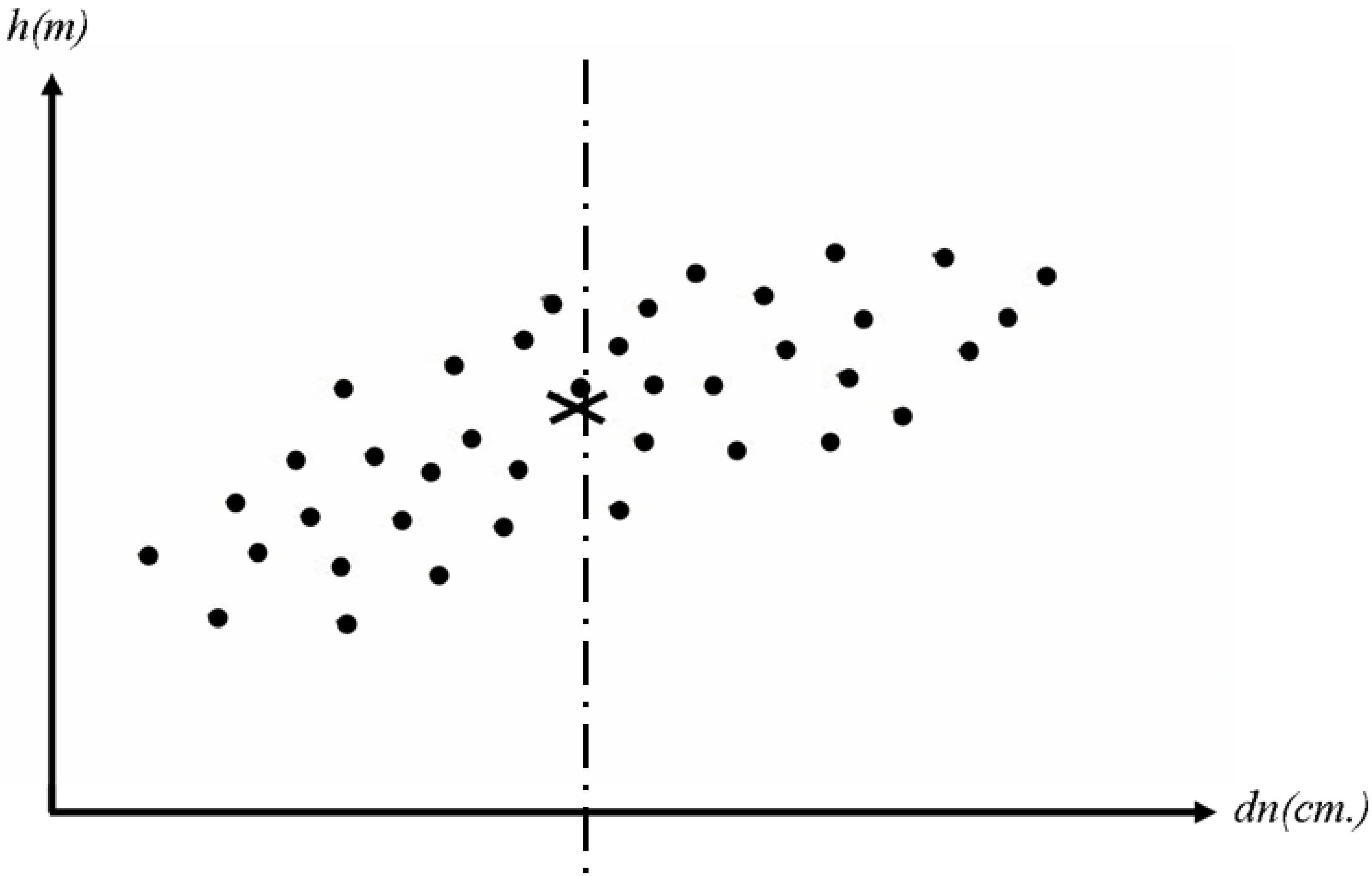
METODO GRÁFICO DE AJUSTE DE LA REGRESIÓN

Podemos perfeccionar el método gráfico de ajuste, dividiendo la nube de puntos en dos o más mitades.



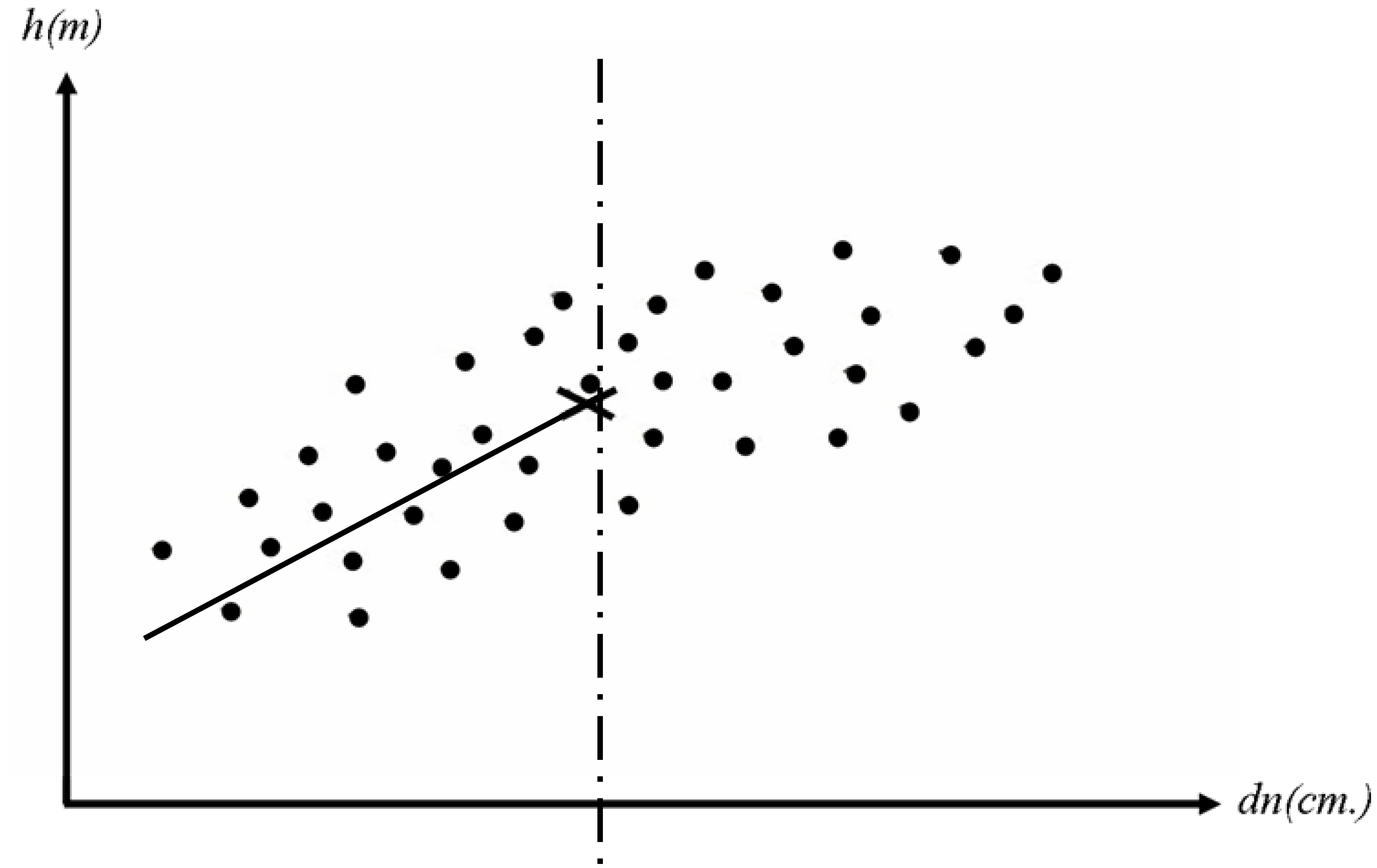
METODO GRÁFICO DE AJUSTE DE LA REGRESIÓN

Podemos perfeccionar el método gráfico de ajuste, dividiendo la nube de puntos en dos o más mitades.



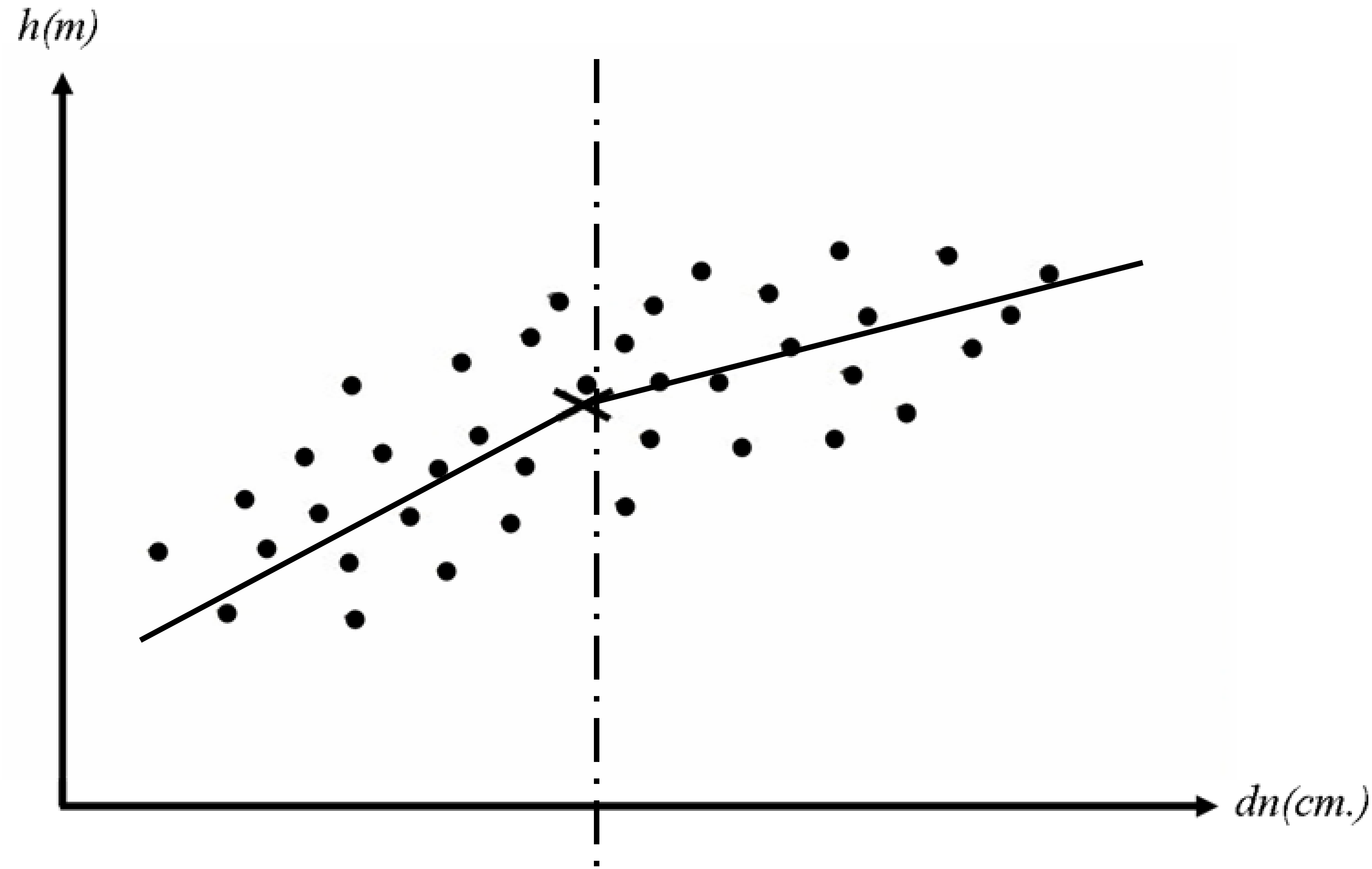
METODO GRÁFICO DE AJUSTE DE LA REGRESIÓN

Podemos perfeccionar el método gráfico de ajuste, dividiendo la nube de puntos en dos o más mitades.



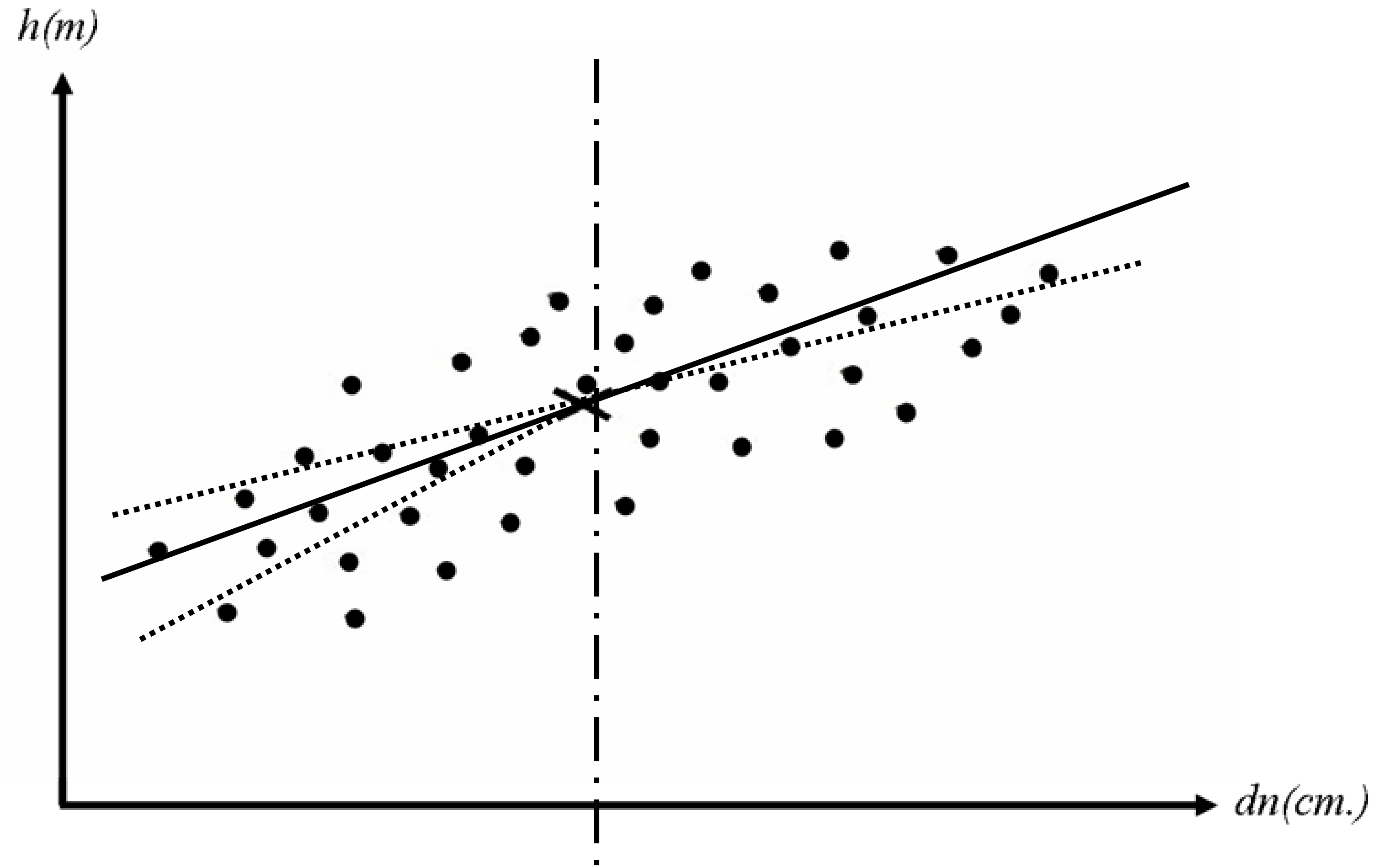
METODO GRÁFICO DE AJUSTE DE LA REGRESIÓN

Podemos perfeccionar el método gráfico de ajuste, dividiendo la nube de puntos en dos o más mitades.



METODO GRÁFICO DE AJUSTE DE LA REGRESIÓN

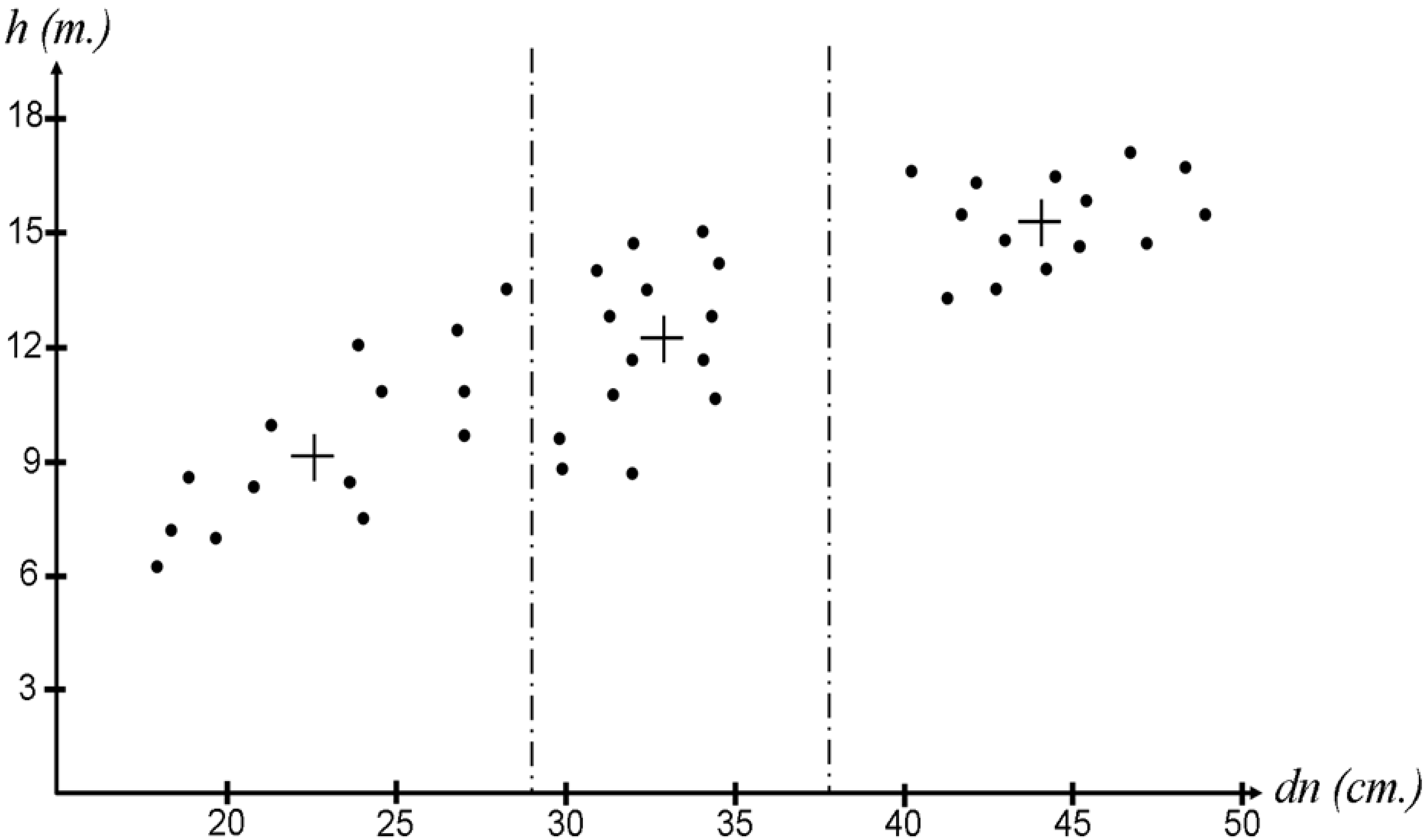
La bisectriz del ángulo resultante será la recta de regresión.

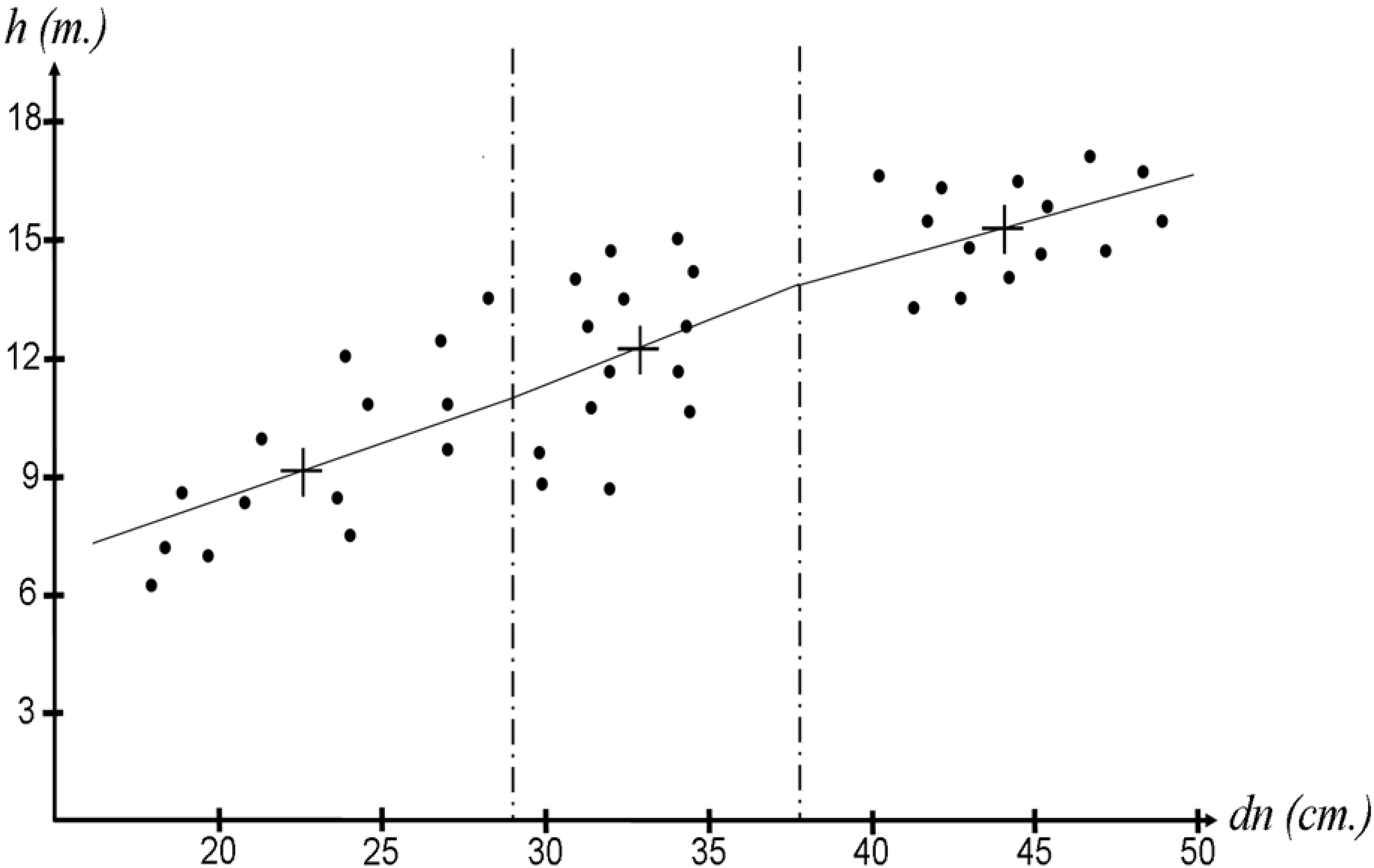


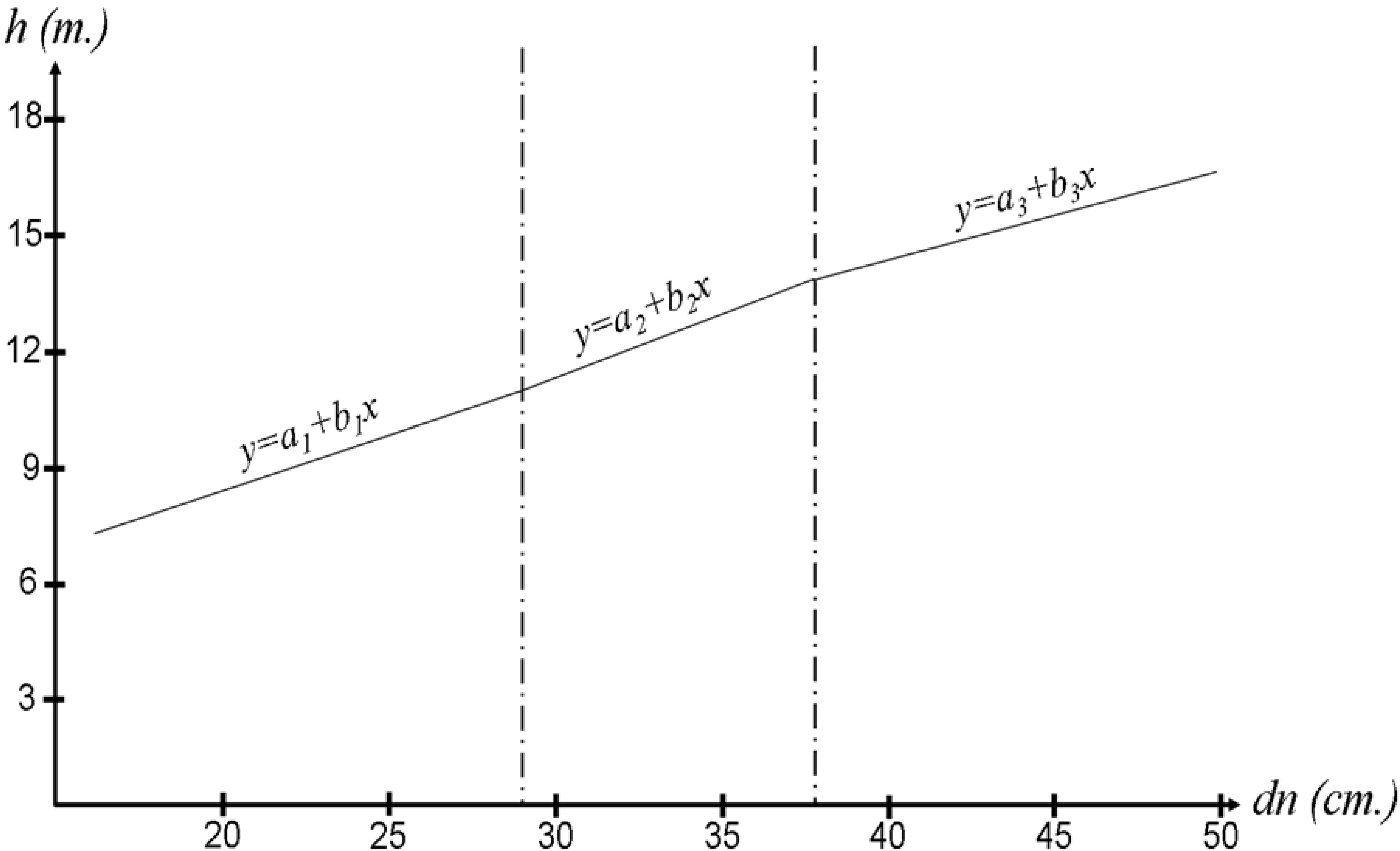
METODO GRÁFICO DE AJUSTE DE LA REGRESIÓN

Cuando la nube de puntos tenga una tendencia irregular y discontinua que impida el ajuste de una única curva o recta a los datos disponibles, se puede realizar un ajuste por partes.

El procedimiento es dividir el campo de los datos en varias partes y ajustar la recta en cada una de las partes, procurando que exista una continuidad entre ellas y que no se produzcan bruscas variaciones entre las mismas.


h (m.)
18
15
12
9
6
3
20
25
30
35
40
45
50
dn (cm.)


h (m.)
18
15
12
9
6
3
20
25
30
35
40
45
50
dn (cm.)



h (m.)
18
15
12
9
6
3
20
25
30
35
40
45
50
dn (cm.)
$y=a_1+b_1x$
$y=a_2+b_2x$
$y=a_3+b_3x$

METODO ANALÍTICO DE AJUSTE REGRESIÓN

Método de ajuste de los mínimos cuadrados

Recordatorio del modelo de ajuste más sencillo: una recta

Población

$$y = \alpha + \beta \cdot x$$

Estimamos la ecuación de regresión con una muestra de valores de la población (x_i, y_i)

Muestra

$$y = a + b \cdot x$$

$$\boxed{y = a + b \cdot x}$$

Variable dependiente

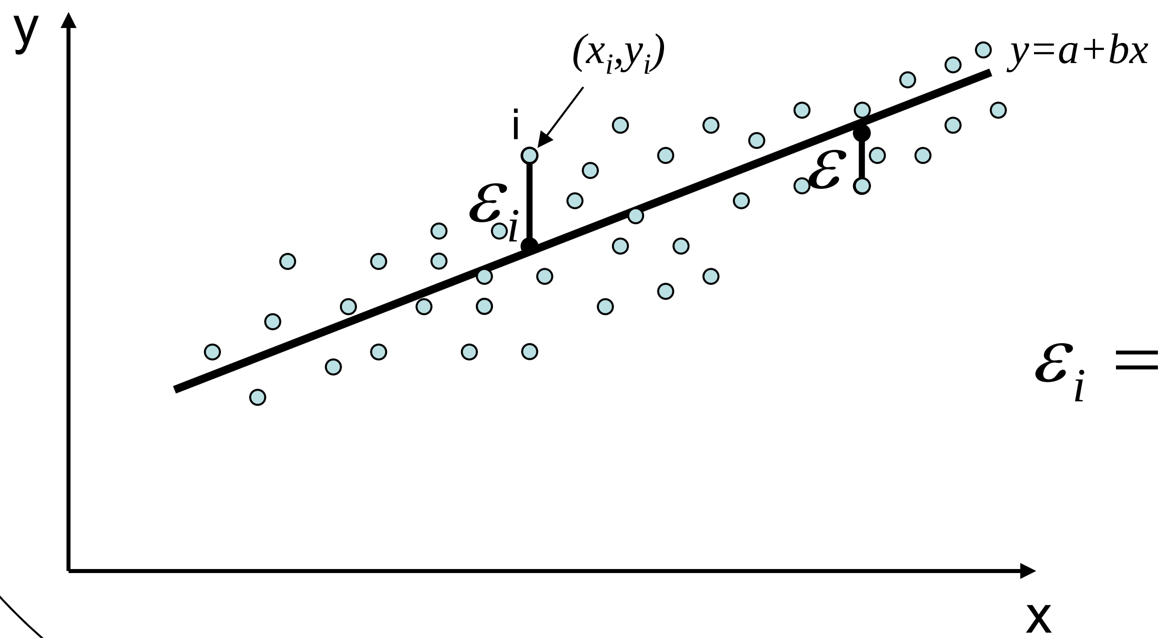
Variable independiente o predictora

constante

pendiente

a y b Coeficientes de regresión que hemos de hallar

En el método de ajuste de los mínimos cuadrados consiste en buscar los coeficientes a y b de la recta y = a+bx que hacen **mínima la suma de los cuadrados de las desviaciones residuales** de las ordenadas de los diferentes puntos de la muestra respecto a las ordenadas dadas por la hipotética recta de regresión.



$$\varepsilon_i = y_i - (a + b \cdot x_i)$$

$$\sum n_i \cdot \varepsilon_i^2 = \sum n_i \left[y_i - (a + b \cdot x_i) \right]^2$$

$$\boxed{\sum n_i \cdot \varepsilon_i^2 = \sum n_i \left[y_i - \left(a + b \cdot x_i \right) \right]^2} \quad (1)$$

El que esta expresión sea mínima dependerá de que lo sean a y b.

Derivando esta expresión respecto a a, e igualando a cero, y haciendo lo mismo respecto a b, obtendremos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas a y b, que nos darán los valores de a y b que hacen mínimos los cuadrados de las desviaciones residuales.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial(1)}{\partial a} = -2 \cdot \sum \left[y_i - (a + b \times x_i) \right] = 0 \\ \dfrac{\partial(1)}{\partial b} = -2x_i \cdot \sum \left[y_i - (a + b \times x_i) \right] = 0 \end{array}\right|$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, obtengo los valores de los coeficientes de regresión de la recta a y b.

Determinaremos que:

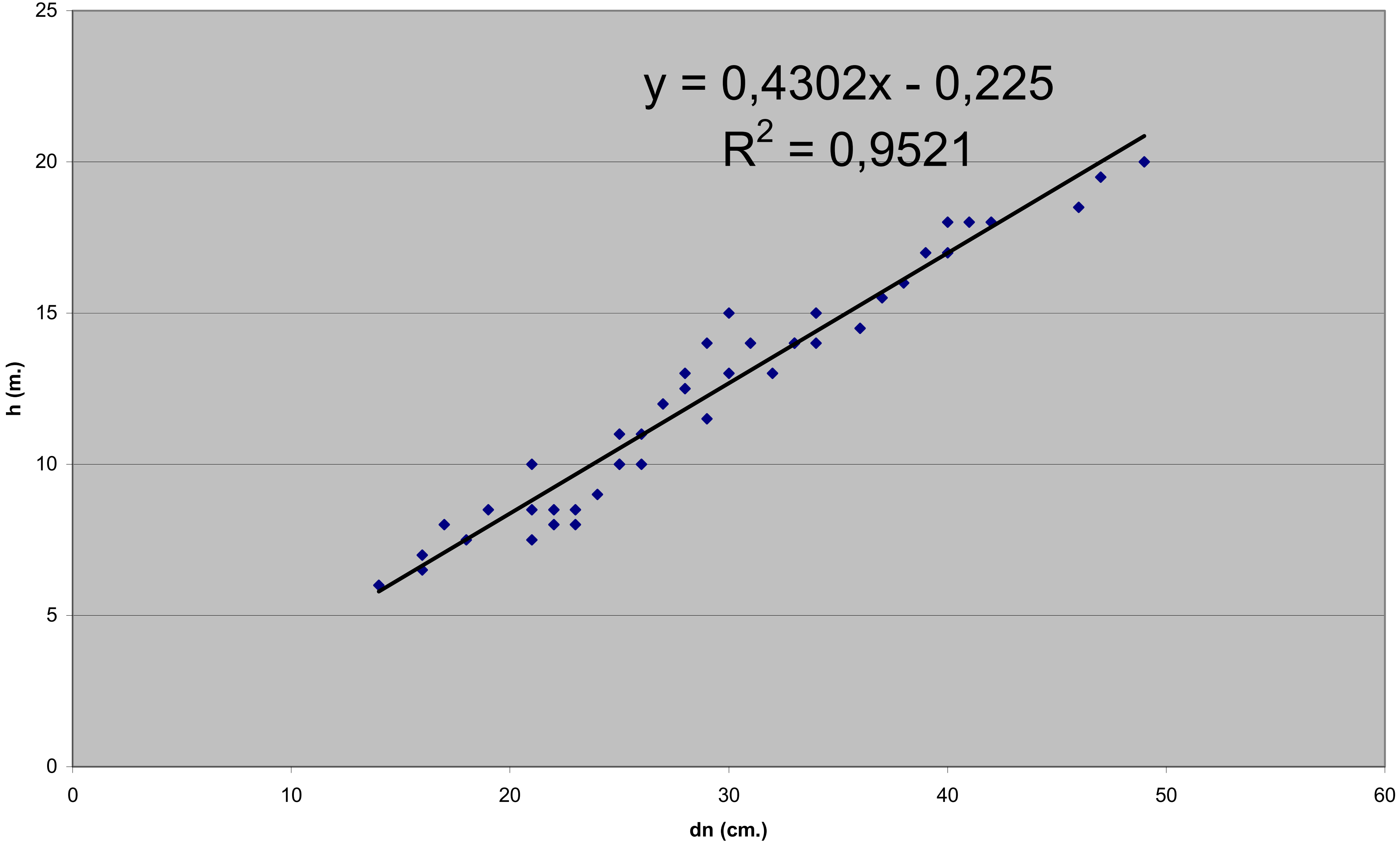
$$\boxed{b = \frac{S_{xy}}{S_x^2}}$$

Y que "**a**" *pasa por el centro de gravedad de la nube de puntos* $\left(\frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}, \frac{\sum n_i y_i}{\sum n_i} \right)$

$$\boxed{\overline{y} = a + b\overline{x} \Rightarrow a = \overline{y} - b\overline{x} = \frac{\sum n_i y_i}{\sum n_i} - \frac{S_{xy}}{S_x^2} \cdot \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}}$$

Podemos así determinar de manera sencilla, los coeficientes de regresión de la recta que mejor se ajusta a la nube de puntos de las dos variables de las que hemos tomado una muestra de valores

$$\boxed{y = a + b \cdot x}$$



y = 0,4302x - 0,225
R2 = 0,9521
h (m.)
dn (cm.)
0
5
10
15
20
25
0
10
20
30
40
50
60

Obtenida la recta que mejor se ajusta a la nube de puntos, hemos de comprobar si la recta obtenida explica de manera suficientemente fiable la evolución de y en función de x

Esto nos los va a explicar el coeficiente de determinación r^2

En funciones matemáticas se cumple:

$$y = a + b \cdot x$$

$$y = 8 + 2 \cdot x$$

$$x = a_{1} + b_{1} \cdot y$$

$$x = -4 + \frac{1}{2} \cdot y$$

$$b \cdot b_{1} = 1$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Obtenida la recta que mejor se ajusta a la nube de puntos, hemos de comprobar si la recta obtenida explica de manera suficientemente fiable la evolución de y en función de x

Esto nos los va a explicar el coeficiente de determinación r^2

En funciones matemáticas se cumple:

$$\boxed{y = a + b \cdot x}$$

$$\boxed{y = 8 + 2 \cdot x}$$

$$\boxed{x = a_1 + b_1 \cdot y}$$

$$\boxed{x = -4 + \frac{1}{2} \cdot y}$$

$$\boxed{b \cdot b_1 = 1}$$

$$\boxed{2 \cdot \frac{1}{2} = 1}$$

Buscando el ajuste $\boxed{y = a + b \cdot x}$ → $\boxed{b = \dfrac{S_{xy}}{S_x^2}}$

Si hubiéramos buscado $\boxed{x = a_1 + b_1 \cdot y}$ → $\boxed{b_1 = \dfrac{S_{xy}}{S_y^2}}$

$$\boxed{b \cdot b_1 = \frac{S_{xy}}{S_x^2} \cdot \frac{S_{xy}}{S_y^2} = r^2 = \text{coef. de determinación}}$$

Si r^2 =1 la recta regresión, comparable con una función matemática explica la totalidad de la variación de **x** en función de **y** , y al revés.

<u>Por ello cuando en un ajuste el coeficiente de determinación, que puede tomar valores entre 0 y 1, más próximo está a 1 mejor será el ajuste.</u>

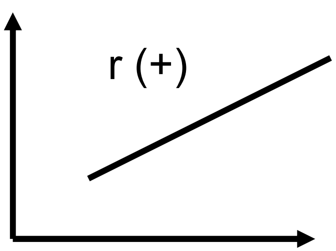
POLITÉCNICA

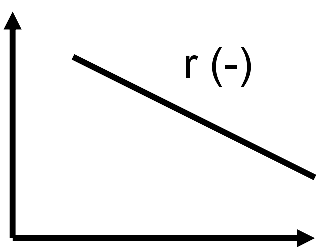
$$\text{El coef. de determinación } r^2 = \frac{S_{xy}^2}{S_x^2 \cdot S_y^2}$$

Con valores entre 0 y 1, nos explica en que porcentaje la función de regresión obtenida $y = f(x)$ nos explica la variación de y en función de x

$$\text{El coef. de correlación } r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$$

Basado en la Covarianza y con valores entre -1 y +1, nos explica la bondad del ajuste y el sentido de la evolución de la variable **y** en función de **x**





Consideraciones sobre los ajustes de regresión:

•Para establecer ajustes entre variables de una población, como mínimo muestra de valores de al menos 30 elementos, bien distribuidos.

•En los inventarios forestales en cada parcela árboles muestra (dn, h, dcopa, Δdn, ec,….) con ellos deduciremos datos para el total de la masa.

•Importante que en la muestra representado todo el rango dimensional de las variables que queramos ajustar, favorecer presencia de las dimensiones menos abundantes.

•Hasta los años 1960 - 1970 para hacer ajustes o ver la tendencia del mismo se utilizaba el método gráfico

•Hoy programas informáticos estadísticos de fácil acceso, nos facilitan la labor "Statgraphics" y "SPSS" los más conocidos y completos

•Excel opciones interesantes para ajustes

Todo lo comentado para ajuste de dos variables, válido para cualquier ajuste complejo y multivariable.

En el caso de los ajustes de regresión múltiple: $y=a_0+a_1 \cdot x_1+a_2 \cdot x_2+a_3 \cdot x_3+\ldots$.

La referencia es el r^2 ajustado

EJERCICIO

En la toma de datos de campo, para la realización de un inventario forestal de una masa de Pinus pinea en el Valle del Tietar, se han obtenido los siguientes datos reflejados de diámetro normal (dn), altura total (h), edad , y peso de leñas gruesas, de 32 árboles muestra.

Establecer los distintos ajustes de regresión, mediante rectas, entre las variables consideradas, utilizando como variable independiente o predictora el dn, por el método de ajuste de los mínimos cuadrados. Determinar la bondad del ajuste en función de los coeficientes de correlación y determinación obtenidos del mismo.

ARBOL Nº	dn (cmts.)	h (mts.)	Edad (años)	leñas gruesas (kgs.)	ARBOL Nº	dn (cmts.)	h (mts.)	Edad (años)	leñas gruesas (kgs.)
1	20	7,5	30	50	17	29	10,5	50	50
2	20	7,5	39	40	19	31	10	49	100
3	19	7	30	40	19	32	11	47	150
4	22	8	35	60	20	29	10,5	48	50
5	20	7,5	30	50	21	37	11,5	59	250
6	22	8	30	60	22	39	12	48	300
7	20	7,5	30	50	23	35	11	47	250
8	27	11	47	60	24	35	11	47	250
9	26	7,5	44	100	25	35	11	51	200
10	23	8	39	60	26	32	11	48	150
11	24	8,5	32	40	27	36	12	67	200
12	24	8,5	32	80	28	40	12	52	300
13	27	11	49	100	29	39	12	51	300
14	27	11	47	100	30	39	12	51	300
15	24	8,5	31	60	31	40	12	52	250
16	30	11	31	200	32	42	14	54	300

dn (cm.) (x)	h (m.) (y)	n_i
19	7	1
20	7,5	4
22	8	2
23	8	1
24	8,5	3
26	7,5	1
27	11	3
29	10,5	2
30	11	1
31	10	1
32	11	2
35	11	3
36	12	1
37	11,5	1
39	12	3
40	12	2
42	14	1
		32

$$\bar{X} = dn_{medio} = \frac{945}{32} = 29,53 \text{ cm.}$$

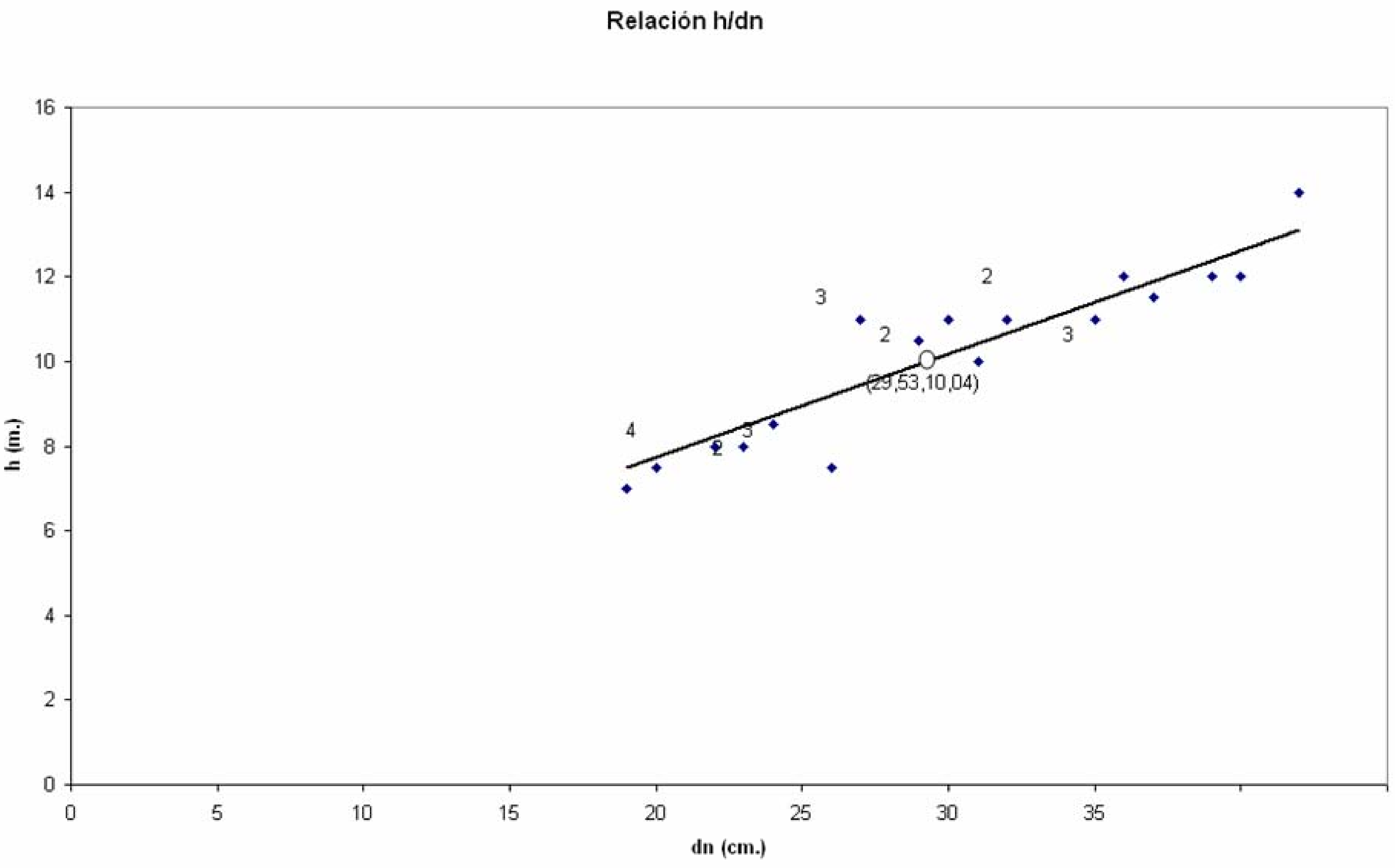
$$\bar{Y} = h_{media} = \frac{321,5}{32} = 10,046 \text{ m.}$$

dn(cm.) (x)	h (m.) (y)	n_i	$\sum n_i x_i$	$\sum n_i y_i$
19	7	1	19	7
20	7,5	4	80	30
22	8	2	44	16
23	8	1	23	8
24	8,5	3	72	25,5
26	7,5	1	26	7,5
27	11	3	81	33
29	10,5	2	58	21
30	11	1	30	11
31	10	1	31	10
32	11	2	64	22
35	11	3	105	33
36	12	1	36	12
37	11,5	1	37	11,5
39	12	3	117	36
40	12	2	80	24
42	14	1	42	14
		32	945	321,5

dn(cm.) (x)	h (m.) (y)	n_i	$\sum n_i x_i$	$\sum n_i y_i$	$\sum n_i(x_i-x_m)^2$	$\sum n_i(y_i-y_m)^2$
19	7	1	19	7	110,88	9,28
20	7,5	4	80	30	363,28	25,95
22	8	2	44	16	113,40	8,38
23	8	1	23	8	42,64	4,19
24	8,5	3	72	25,5	91,74	7,18
26	7,5	1	26	7,5	12,46	6,49
27	11	3	81	33	19,20	2,73
29	10,5	2	58	21	0,56	0,41
30	11	1	30	11	0,22	0,91
31	10	1	31	10	2,16	0,00
32	11	2	64	22	12,20	1,82
35	11	3	105	33	89,76	2,73
36	12	1	36	12	41,86	3,81
37	11,5	1	37	11,5	55,80	2,11
39	12	3	117	36	269,04	11,44
40	12	2	80	24	219,24	7,63
42	14	1	42	14	155,50	15,63
		32	945	321,5	1599,97	110,68

dn(cm.) (x)	h (m.) (y)	n_i	$\sum n_i x_i$	$\sum n_i y_i$	$\sum n_i(x_i-x_m)^2$	$\sum n_i(y_i-y_m)^2$	$\sum n_i(x_i-x_m)(y_i-y_m)$
19	7	1	19	7	110,88	9,28	32,09
20	7,5	4	80	30	363,28	25,95	97,09
22	8	2	44	16	113,40	8,38	30,83
23	8	1	23	8	42,64	4,19	13,37
24	8,5	3	72	25,5	91,74	7,18	25,66
26	7,5	1	26	7,5	12,46	6,49	8,99
27	11	3	81	33	19,20	2,73	-7,23
29	10,5	2	58	21	0,56	0,41	-0,48
30	11	1	30	11	0,22	0,91	0,45
31	10	1	31	10	2,16	0,00	-0,07
32	11	2	64	22	12,20	1,82	4,71
35	11	3	105	33	89,76	2,73	15,64
36	12	1	36	12	41,86	3,81	12,64
37	11,5	1	37	11,5	55,80	2,11	10,85
39	12	3	117	36	269,04	11,44	55,49
40	12	2	80	24	219,24	7,63	40,90
42	14	1	42	14	155,50	15,63	49,30
		32	945	321,5	1599,97	110,68	390,21

Ajuste lineal por el método gráfico h/dn:



POLITÉCNICA

1º Relación alturas / diámetros

$$y = a + b \cdot x \Rightarrow h(m.) = a + b \cdot dn(cm.)$$

Con los datos de la F.D. de las dos variables de la muestra de 32 árboles tengo:

$$\bar{X} = dn_{medio} = \frac{945}{32} = 29{,}53 \text{ cm.} \qquad \bar{Y} = h_{media} = \frac{321{,}5}{32} = 10{,}046 \text{ m.}$$

$$\mathbf{b} = \frac{S_{xy}}{S_x^2} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{n-1}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}{n-1}} = \frac{\dfrac{390{,}21}{31}}{\dfrac{1599{,}97}{31}} = \mathbf{0{,}2435\ m/cm.}$$

$$\bar{Y} = a + b\bar{X} \Rightarrow 10{,}046 \text{ m.} = a + 0{,}2435 \text{ m./cm.} \cdot 29{,}53 \text{ cm.}$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} = 10{,}046 \text{ m.} - 7{,}1905 \text{ m.} = \mathbf{2{,}8555}$$

$$\boxed{y = 2{,}855 + 0{,}2435 \cdot dn \Rightarrow \mathbf{h(m.) = 2.855\ m. + 0{,}2435\ m./cm. \cdot dn(cm.)}}$$

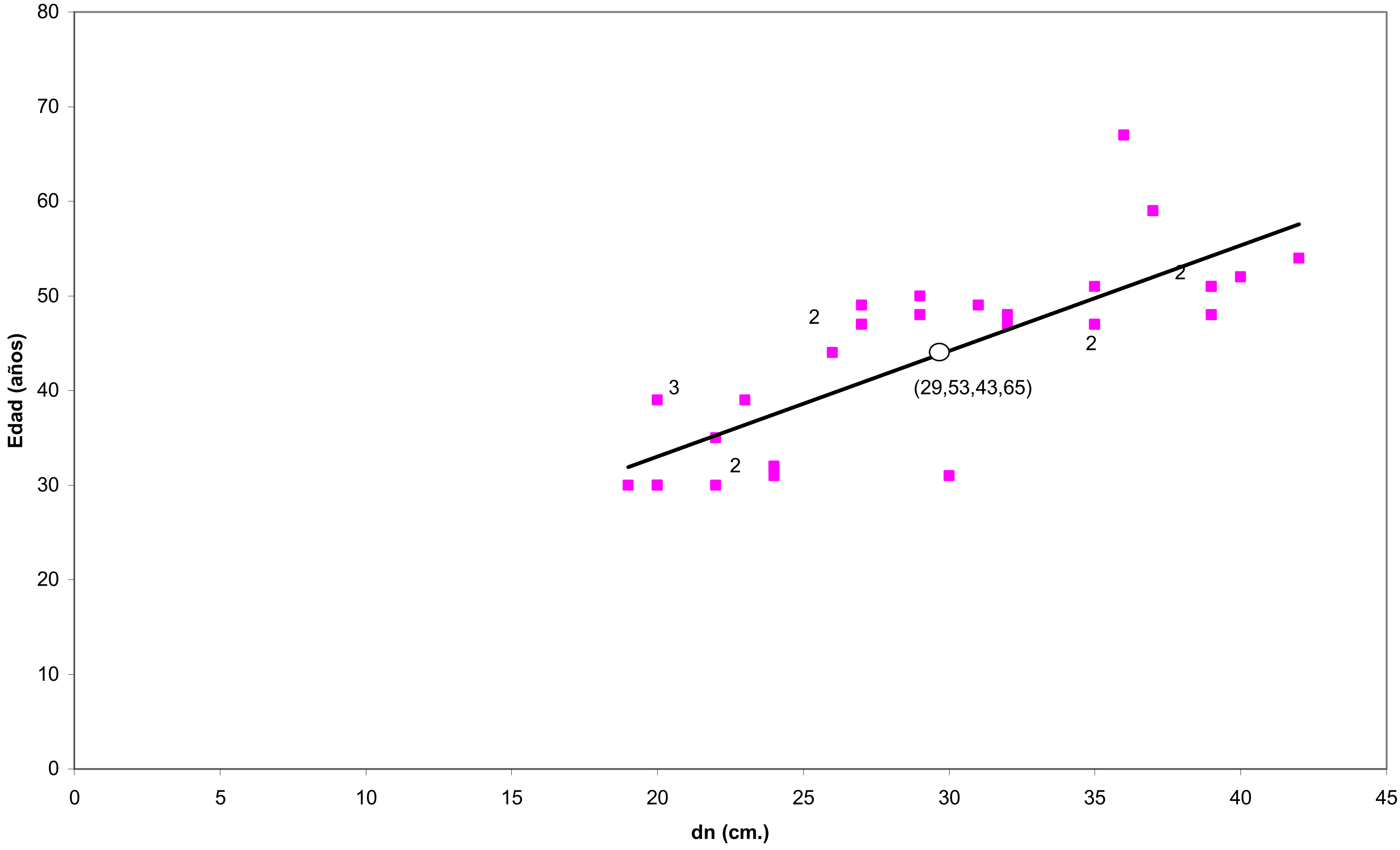
1º Relación alturas / diámetros

El "coeficiente de determinación" estimado r^2, será:

$$\mathbf{r^2} = \frac{s_{xy}^{\;2}}{s_x^{\;2} \cdot s_y^{\;2}} = \frac{390{,}21^2\ m^2 \cdot cm^2}{1599{,}97 \cdot 110{,}68\ m^2 \cdot cm^2} = \mathbf{0{,}857}$$

Podemos estimar, que en el rango de datos obtenidos, la ecuación obtenida explica la evolución de las alturas de los árboles en función de la de sus diámetros normales en el 85,7% de los casos.

Ajuste lineal por el método gráfico Edades / dn:



2º Relación Edades / diámetros

$$y = a + b \cdot x \Rightarrow \text{Edad (años)} = a + b \cdot \text{dn (cm.)}$$

$$y = 10{,}694 + 1{,}116 \cdot \text{dn} \Rightarrow \mathbf{Edad(años) = 10{,}694 + 1{,}116 \cdot dn(cm.)}$$

El "coeficiente de determinación" estimado r^2, será:

$$\mathbf{r^2} = \frac{s_{xy}{}^2}{s_x{}^2 \cdot s_y{}^2} = \frac{1785{,}84^2 \ \text{años}^2 \cdot \text{cm}^2}{1599{,}97 \cdot 3041{,}22 \ \text{años}^2 \cdot \text{cm}^2} = \mathbf{0{,}655}$$

3º Relación Cantidad de leñas / diámetros

$$y = a + b \cdot x \Rightarrow \text{Leñas (Kg.)} = a + b \cdot \text{dn(cm.)}$$

$$y = 234{,}38 + 12{,}752 \cdot x \Rightarrow \mathbf{Leñas(Kg.) = -234{,}38 + 12{,}752 \cdot dn(cm.)}$$

$$\mathbf{r^2} = \frac{{s_{xy}}^2}{{s_x}^2 \cdot {s_y}^2} = \frac{20402{,}81^2 \ \text{Kg}^2 \cdot \text{cm}^2}{1599{,}97 \cdot 299746{,}88 \ \text{Kg}^2 \cdot \text{cm}^2} = \mathbf{0{,}868}$$

POLITÉCNICA

Ejemplo de la utilización de la hoja de cálculo "excel" para la realización de ajustes de regresión

Mediante este programa de Microsoft Office, que está al alcance de cualquier usuario a nivel básico del ordenador, se pueden realizar de manera sencilla ajustes de regresión entre dos variables, bastante completos, obteniendo la nube de puntos, el ajuste gráfico, la función del ajuste analítico, y los valores del coeficiente de determinación del ajuste realizado.

Los pasos a seguir para realizar el ajuste serían los siguientes:

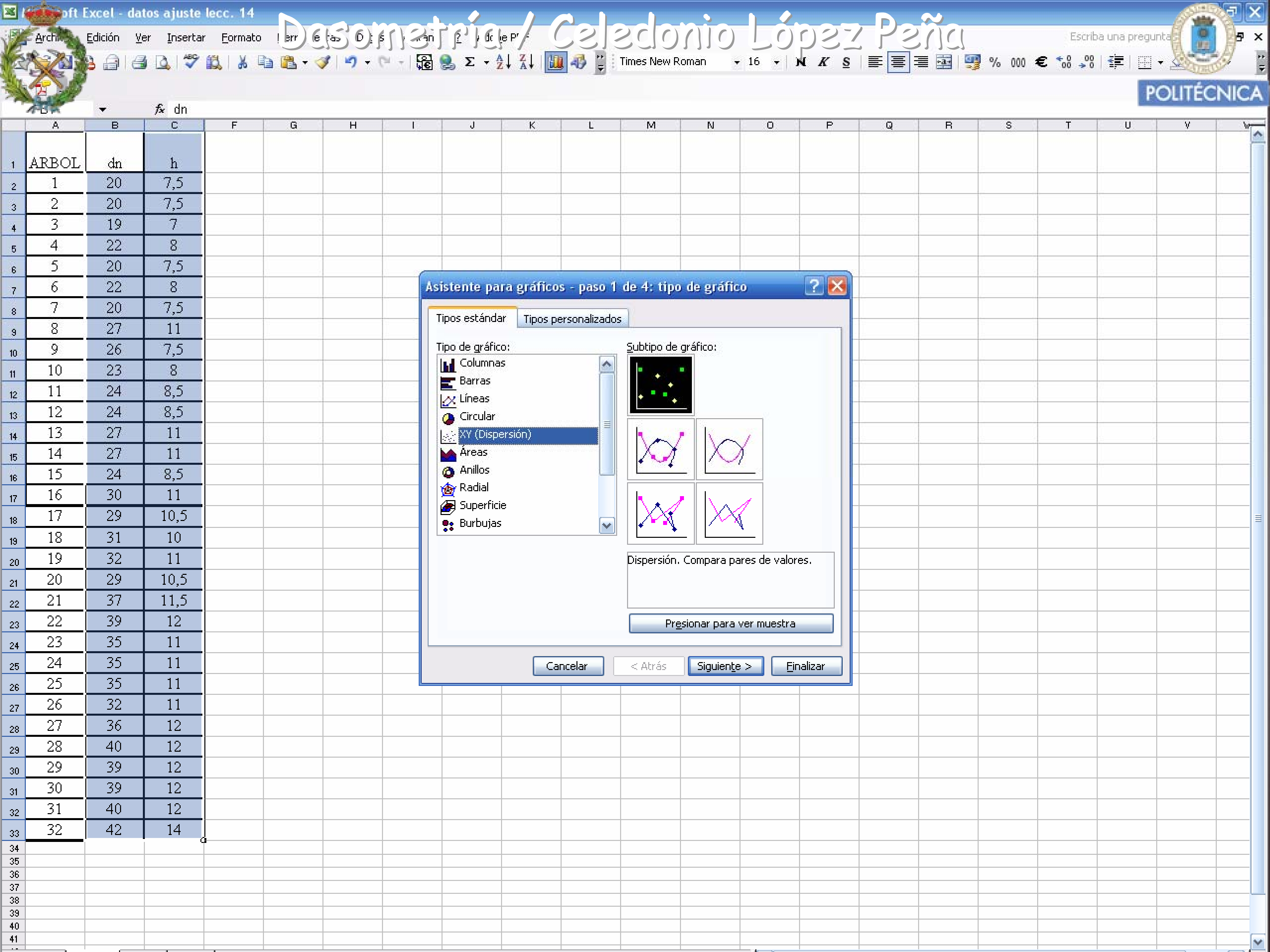
1. Introducir en dos columnas los datos de las dos variables que queremos ajustar. La columna con la variable predictora la colocaremos a nuestra izquierda

Ejercicio de ajuste

ARBOL	dn	h
1	20	7,5
2	20	7,5
3	19	7
4	22	8
5	20	7,5
6	22	8
7	20	7,5
8	27	11
9	26	7,5
10	23	8
11	24	8,5
12	24	8,5
13	27	11
14	27	11
15	24	8,5
16	30	11
17	29	10,5
18	31	10
19	32	11
20	29	10,5
21	37	11,5
22	39	12
23	35	11
24	35	11
25	35	11
26	32	11
27	36	12
28	40	12
29	39	12
30	39	12
31	40	12
32	42	14

1. Introducir en dos columnas los datos de las dos variables que queremos ajustar la columna con la variable predictora la colocaremos a nuestra derecha
2. Realizamos un gráfico de dispersión. Este paso es imprescindible, pues se debe tener el grafico con la nube de puntos (dn,h), para proceder al ajuste

Dasometría / Celedonio López Peña



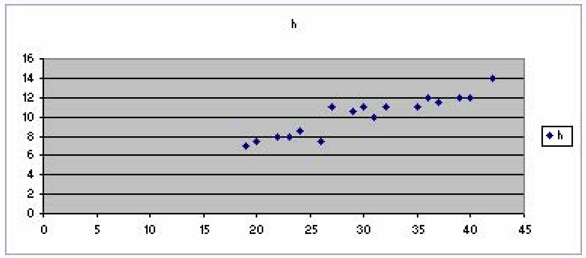
ARBOL	dn	h
1	20	7,5
2	20	7,5
3	19	7
4	22	8
5	20	7,5
6	22	8
7	20	7,5
8	27	11
9	26	7,5
10	23	8
11	24	8,5
12	24	8,5
13	27	11
14	27	11
15	24	8,5
16	30	11
17	29	10,5
18	31	10
19	32	11
20	29	10,5
21	37	11,5
22	39	12
23	35	11
24	35	11
25	35	11
26	32	11
27	36	12
28	40	12
29	39	12
30	39	12
31	40	12
32	42	14

oft Excel - datos ajuste lecc. 14

ARBOL	dn	h
1	20	7,5
2	20	7,5
3	19	7
4	22	8
5	20	7,5
6	22	8
7	20	7,5
8	27	11
9	26	7,5
10	23	8
11	24	8,5
12	24	8,5
13	27	11
14	27	11
15	24	8,5
16	30	11
17	29	10,5
18	31	10
19	32	11
20	29	10,5
21	37	11,5
22	39	12
23	35	11
24	35	11
25	35	11
26	32	11
27	36	12
28	40	12
29	39	12
30	39	12
31	40	12
32	42	14

Asistente para gráficos - paso 2 de 4: datos de origen

Rango de datos | Serie



Rango de datos: =datos!$B$1:$C$33

Series en: Filas / Columnas

Cancelar | < Atrás | Siguiente > | Finalizar

POLITÉCNICA

Microsoft Excel - datos ajuste lecc. 14

ARBOL	dn	h
1	20	7,5
2	20	7,5
3	19	7
4	22	8
5	20	7,5
6	22	8
7	20	7,5
8	27	11
9	26	7,5
10	23	8
11	24	8,5
12	24	8,5
13	27	11
14	27	11
15	24	8,5
16	30	11
17	29	10,5
18	31	10
19	32	11
20	29	10,5
21	37	11,5
22	39	12
23	35	11
24	35	11
25	35	11
26	32	11
27	36	12
28	40	12
29	39	12
30	39	12
31	40	12
32	42	14

Asistente para gráficos - paso 3 de 4: opciones de gráfico

Títulos | Eje | Líneas de división | Leyenda | Rótulos de datos

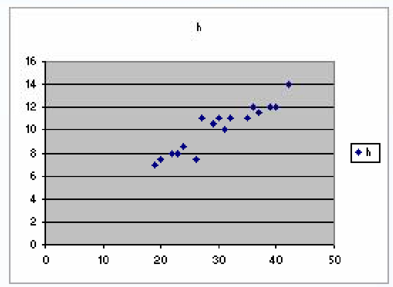
Título del gráfico: h

Eje de valores (X):

Eje de valores (Y):

Segundo eje de categorías (X):

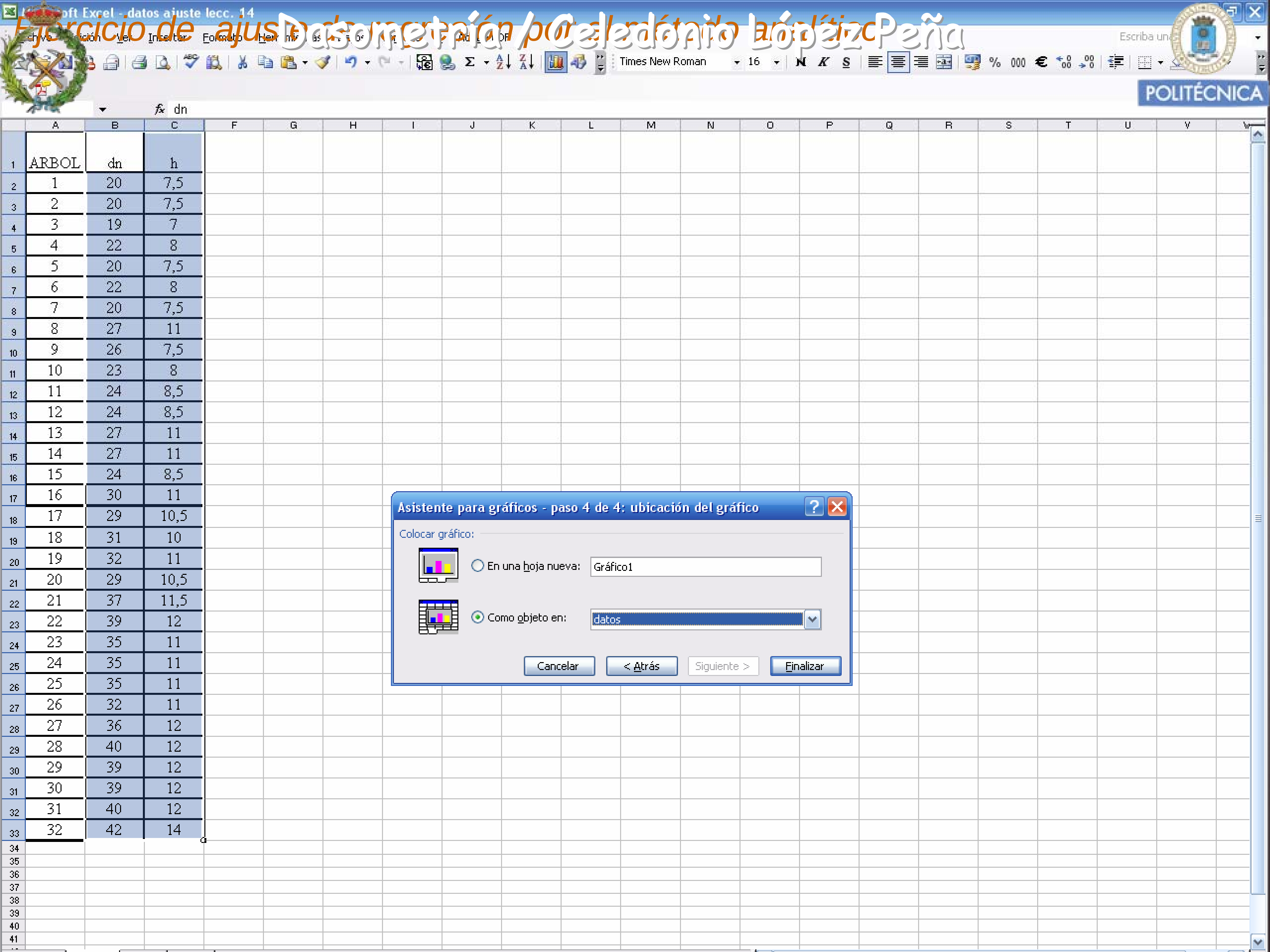
Segundo eje de valores (Y):



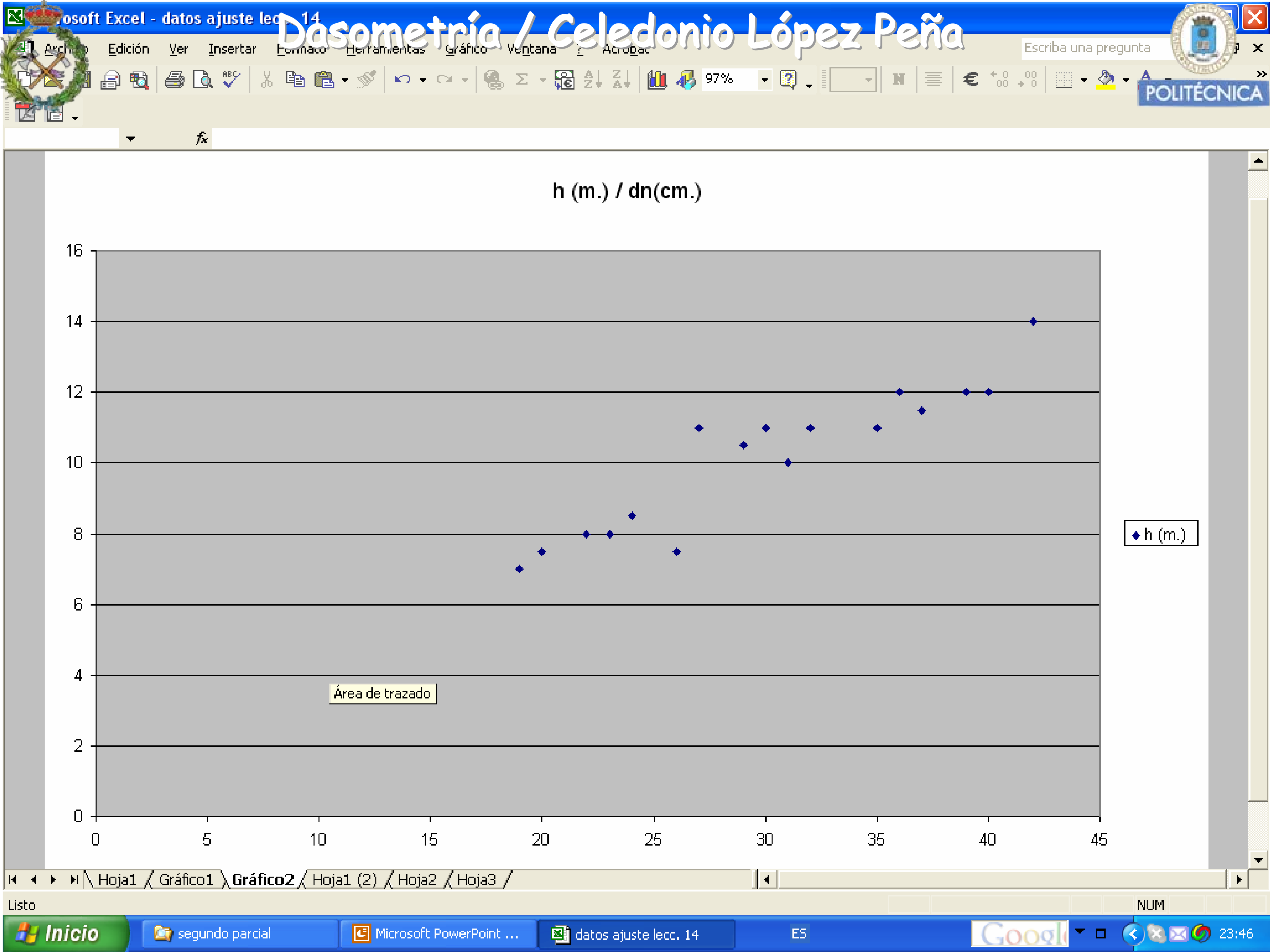
Cancelar | < Atrás | Siguiente > | Finalizar

datos / Hoja2 / Hoja3

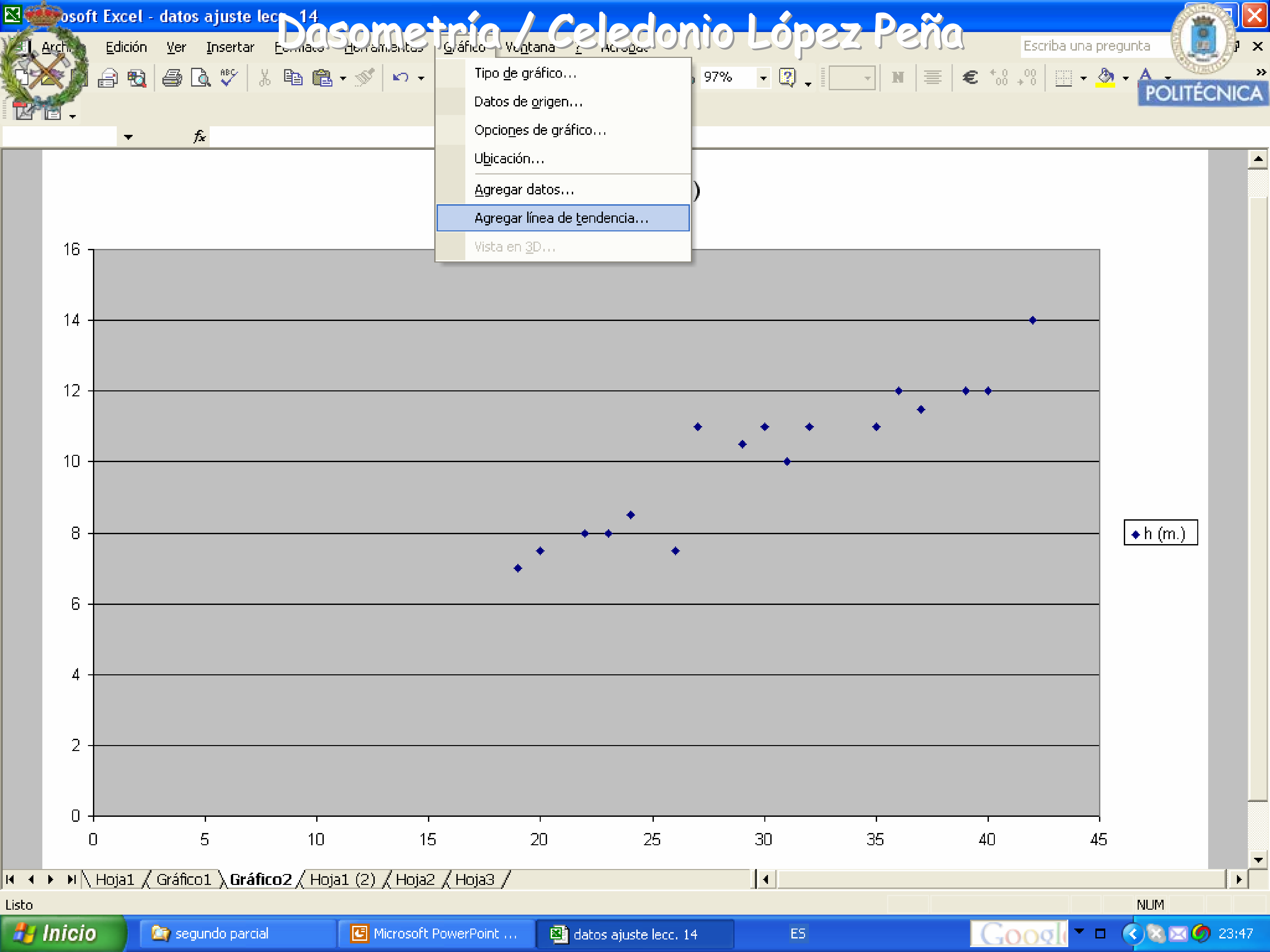
Listo Suma=1266,5 NUM



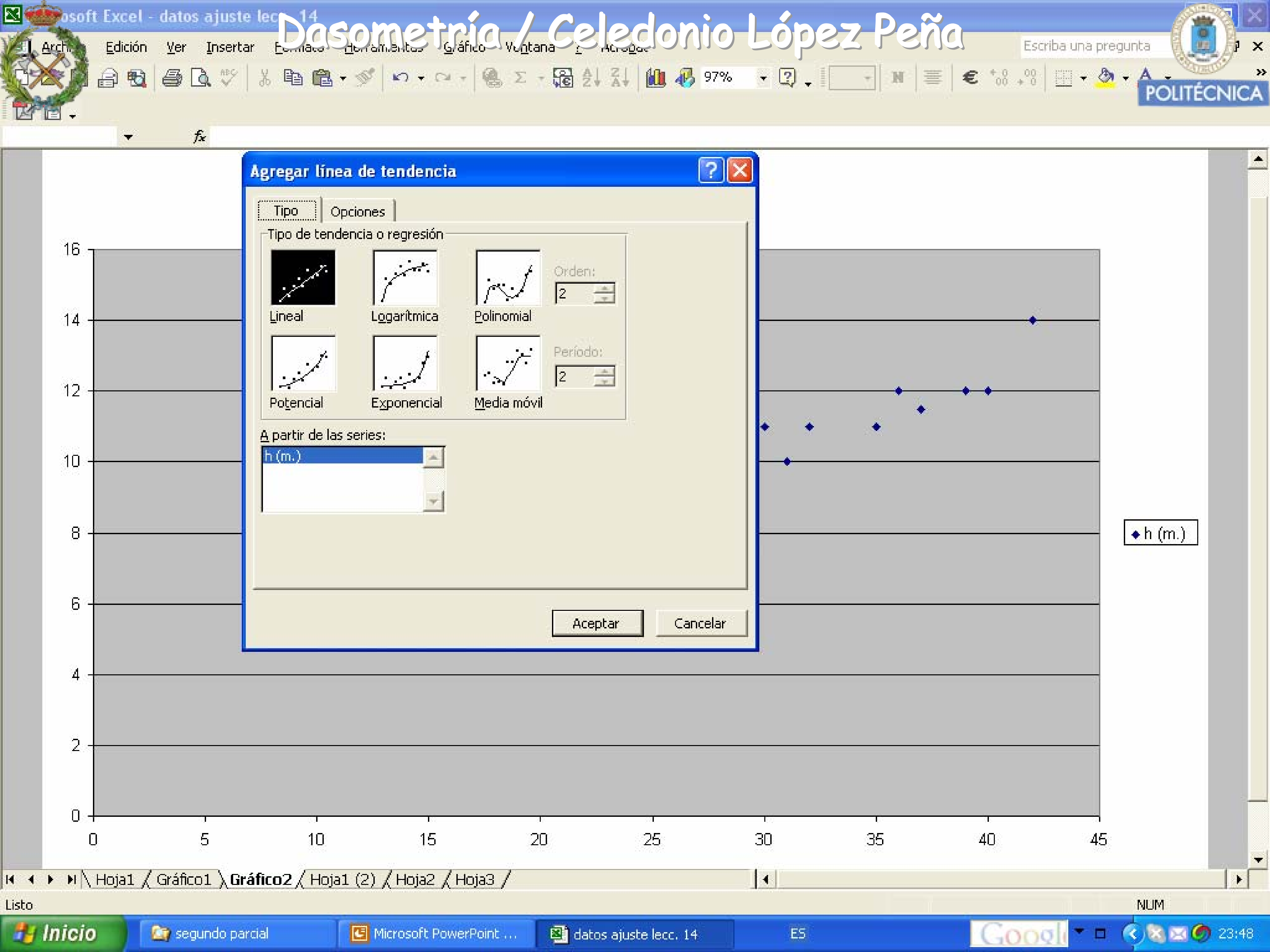
ARBOL	dn	h
1	20	7,5
2	20	7,5
3	19	7
4	22	8
5	20	7,5
6	22	8
7	20	7,5
8	27	11
9	26	7,5
10	23	8
11	24	8,5
12	24	8,5
13	27	11
14	27	11
15	24	8,5
16	30	11
17	29	10,5
18	31	10
19	32	11
20	29	10,5
21	37	11,5
22	39	12
23	35	11
24	35	11
25	35	11
26	32	11
27	36	12
28	40	12
29	39	12
30	39	12
31	40	12
32	42	14


Microsoft Excel - datos ajuste lecc. 14
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Gráfico Ventana ? Acrobat
Escriba una pregunta
97%
h (m.) / dn(cm.)
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45
h (m.)
Área de trazado
Hoja1 Gráfico1 Gráfico2 Hoja1 (2) Hoja2 Hoja3
Listo
NUM
Inicio
segundo parcial
Microsoft PowerPoint ...
datos ajuste lecc. 14
ES
23:46

1. Introducir en dos columnas los datos de las dos variables que queremos ajustar la columna con la variable predictora la colocaremos a nuestra derecha
2. Realizamos un gráfico de dispersión. Este paso es imprescindible, pues se debe tener el grafico con la nube de puntos (dn,h), para proceder al ajuste
3. Desplegamos el menú "gráfico" y seleccionamos "agregar línea de tendencia"


Microsoft Excel - datos ajuste lecc. 14
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Gráfico Ventana ? Acrobat
Escriba una pregunta
POLITÉCNICA
97%
Tipo de gráfico...
Datos de origen...
Opciones de gráfico...
Ubicación...
Agregar datos...
Agregar línea de tendencia...
Vista en 3D...
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45
h (m.)
Hoja1 Gráfico1 Gráfico2 Hoja1 (2) Hoja2 Hoja3
Listo
NUM
Inicio
segundo parcial
Microsoft PowerPoint ...
datos ajuste lecc. 14
ES
23:47

1. Introducir en dos columnas los datos de las dos variables que queremos ajustar la columna con la variable predictora la colocaremos a nuestra derecha
2. Realizamos un gráfico de dispersión. Este paso es imprescindible, pues se debe tener el grafico con la nube de puntos (dn,h), para proceder al ajuste
3. Desplegamos el menú "gráfico" y seleccionamos "agregar línea de tendencia", eligiendo el tipo de función de ajuste que deseemos.

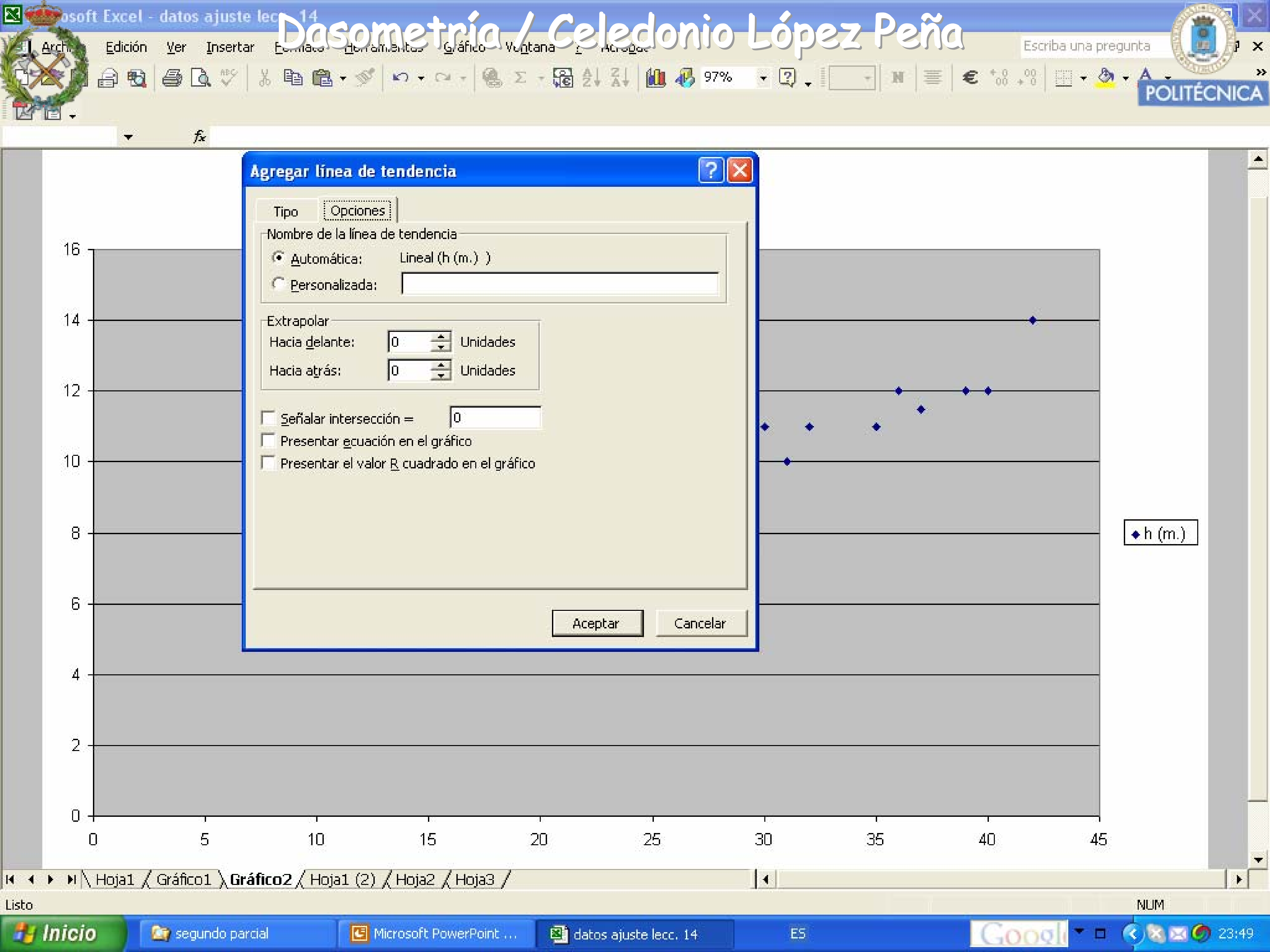

Microsoft Excel - datos ajuste lecc. 14
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Gráfico Ventana ? Acrobat
Escriba una pregunta
97%
POLITÉCNICA
Agregar línea de tendencia
Tipo
Opciones
Tipo de tendencia o regresión
Lineal
Logarítmica
Polinomial
Orden:
2
Potencial
Exponencial
Media móvil
Período:
2
A partir de las series:
h (m.)
Aceptar
Cancelar
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
h (m.)
Hoja1 Gráfico1 Gráfico2 Hoja1 (2) Hoja2 Hoja3
Listo
NUM
Inicio
segundo parcial
Microsoft PowerPoint ...
datos ajuste lecc. 14
ES
23:48

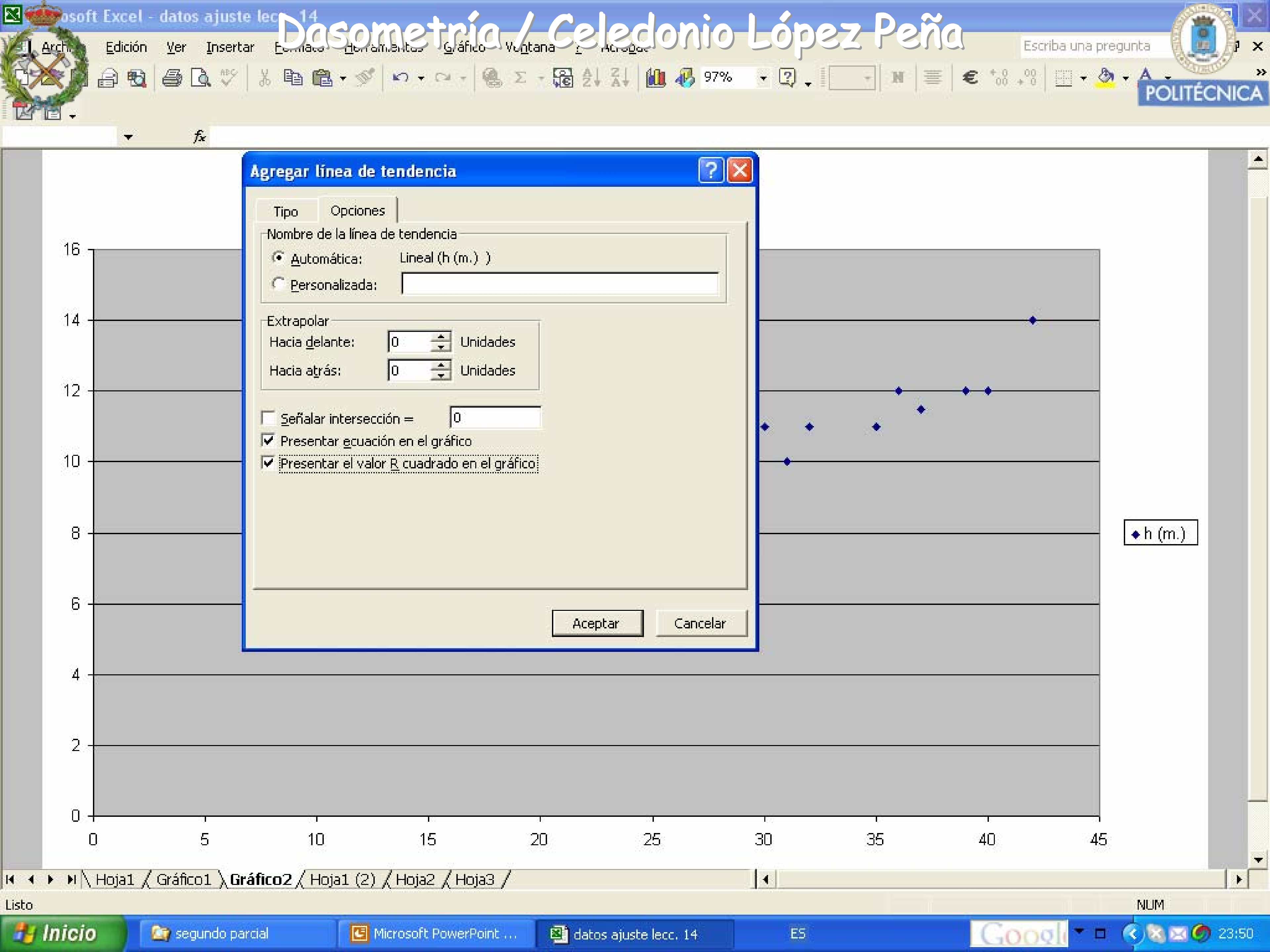
1. Introducir en dos columnas los datos de las dos variables que queremos ajustar la columna con la variable predictora la colocaremos a nuestra derecha

2. Realizamos un gráfico de dispersión. Este paso es imprescindible, pues se debe tener el grafico con la nube de puntos (dn,h), para proceder al ajuste

3. Desplegamos el menú "gráfico" y seleccionamos "agregar línea de tendencia", eligiendo el tipo de función que deseemos

4. En "opciones" marcamos "agregar linea de tendencia" y "presentar r^2 en el gráfico"


Dasometría / Celedonio López Peña
POLITÉCNICA
Agregar línea de tendencia
Tipo
Opciones
Nombre de la línea de tendencia
Automática: Lineal (h (m.))
Personalizada:
Extrapolar
Hacia delante: 0 Unidades
Hacia atrás: 0 Unidades
Señalar intersección = 0
Presentar ecuación en el gráfico
Presentar el valor R cuadrado en el gráfico
Aceptar
Cancelar
h (m.)
Hoja1 Gráfico1 Gráfico2 Hoja1 (2) Hoja2 Hoja3
Listo
NUM
Inicio
segundo parcial
Microsoft PowerPoint ...
datos ajuste lecc. 14
23:49



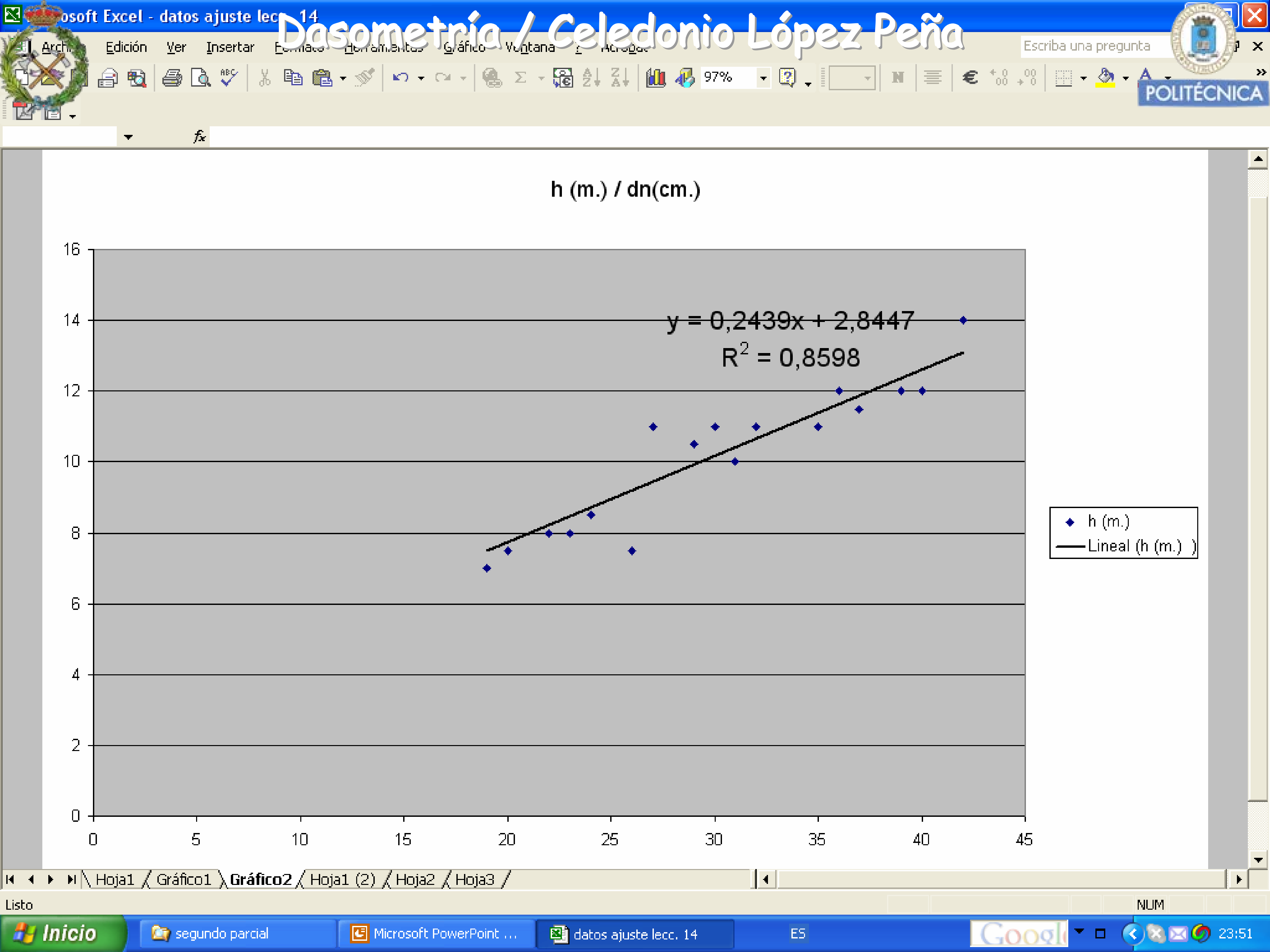
Microsoft Excel - datos ajuste lecc. 14
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Gráfico Ventana ? Acrobat
Escriba una pregunta
97%
POLITÉCNICA
Agregar línea de tendencia
Tipo
Opciones
Nombre de la línea de tendencia
Automática: Lineal (h (m.))
Personalizada:
Extrapolar
Hacia delante: 0 Unidades
Hacia atrás: 0 Unidades
Señalar intersección = 0
Presentar ecuación en el gráfico
Presentar el valor R cuadrado en el gráfico
Aceptar
Cancelar
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45
h (m.)
Hoja1 Gráfico1 Gráfico2 Hoja1 (2) Hoja2 Hoja3
Listo
NUM
Inicio
segundo parcial
Microsoft PowerPoint ...
datos ajuste lecc. 14
ES
23:50

1. Introducir en dos columnas los datos de las dos variables que queremos ajustar la columna con la variable predictora la colocaremos a nuestra derecha
2. Realizamos un gráfico de dispersión. Este paso es imprescindible, pues se debe tener el grafico con la nube de puntos (dn,h), para proceder al ajuste
3. Desplegamos el menú "gráfico" y seleccionamos "agregar línea de tendencia", eligiendo el tipo de función que deseemos
4. En "opciones" marcamos "agregar linea de tendencia" y "presentar r^2 en el gráfico"
5. Aparecerá la función de ajuste elegida de manera gráfica y analítica con el coeficiente de determinación correspondiente.

Ejemplo de la utilización de la hoja de cálculo "excel" para la realización de ajustes de regresión

1. Introducir en dos columnas los datos de las dos variables que queremos ajustar la columna con la variable predictora la colocaremos a nuestra derecha
2. Realizamos un gráfico de dispersión. Este paso es imprescindible, pues se debe tener el grafico con la nube de puntos (dn,h), para proceder al ajuste
3. Desplegamos el menú "gráfico" y seleccionamos "agregar línea de tendencia", eligiendo el tipo de función que deseemos
4. En "opciones" marcamos "agregar linea de tendencia" y "presentar r^2 en el gráfico"
5. Aparecerá <u>la función de ajuste elegida de manera gráfica y analítica con el coeficiente de determinación correspondiente</u>.

Dasometría / Celedonio López Peña



Programas estadísticos –El STATGRAPHICS

Vista la posibilidad que nos proporciona la hoja de calculo excel para realizar ajustes de regresión, lo habitual cuando se requieren análisis estadísticos avanzados es utilizar programas específicos diseñados para el estudio estadístico.

Tras la realización de cualquier análisis estadístico. Estos programas nos presentan los resultados, los analizan con profusión y nos informan sobre la fiabilidad de las predicciones facilitando enormemente la toma de decisiones.

Uno de los más utilizados es el programa STATGRAPHICS. Vamos a ver, con los datos del ejercício que estamos manejando, cual sería la manera de presentar y analizar la información de este programa estadístico.

Dasometría / Celedonio López Peña

POLITÉCNICA

STATGRAPHICS Plus - StatFolio sin Nombre - [<sin nombre>]

Archivo Edición Gráficos Descripción Comparación Dependencia Avanzado Capacidades Ver Ventana Ayuda

	arbol nº	dn en cm	h en m	edad años	leñas kg	Col_6	Col_7	Col_8	Col_9
1	1	20	7,5	30	50				
2	2	20	7,5	39	40				
3	3	19	7	30	40				
4	4	22	8	35	60				
5	5	20	7,5	30	50				
6	6	22	8	30	60				
7	7	20	7,5	30	50				
8	8	27	11	47	60				
9	9	26	7,5	44	100				
10	10	23	8	39	60				
11	11	24	8,5	32	40				
12	12	24	8,5	32	80				
13	13	27	11	49	100				
14	14	27	11	47	100				
15	15	24	8,5	31	60				
16	16	30	11	31	200				
17	17	29	10,5	50	50				
18	18	31	10	49	100				
19	19	32	11	47	150				
20	20	29	10,5	48	50				
21	21	37	11,5	59	250				
22	22	39	12	48	300				
23	23	35	11	47	250				
24	24	35	11	47	250				
25	25	35	11	51	200				
26	26	32	11	48	150				
27	27	36	12	67	200				
28	28	40	12	52	300				
29	29	39	12	51	300				
30	30	39	12	51	300				

Listo NUM

Inicio | Clase 15ª (reg... | STATGRAPHIC... | segundo parcial | Microsoft Excel... | ES | 13:28

Dasometría / Celedonio López Peña

POLITÉCNICA

GRAPHICS Plus - StatFolio sin Nombre - [<sin nombre>]

Archivo Edición Gráficos Descripción ... Dependencia Avanzado ... Ayuda

- Regresión Simple...
- Regresión Polinomial...
- Transformaciones Box-Cox...
- Regresión Múltiple...

	arbol nº	dn en cm			leñas kg	Col_6	Col_7	Col_8	Col_9
1	1	20	7,5		50				
2	2	20	7,5	39	40				
3	3	19	7	30	40				
4	4	22	8	35	60				
5	5	20	7,5	30	50				
6	6	22	8	30	60				
7	7	20	7,5	30	50				
8	8	27	11	47	60				
9	9	26	7,5	44	100				
10	10	23	8	39	60				
11	11	24	8,5	32	40				
12	12	24	8,5	32	80				
13	13	27	11	49	100				
14	14	27	11	47	100				
15	15	24	8,5	31	60				
16	16	30	11	31	200				
17	17	29	10,5	50	50				
18	18	31	10	49	100				
19	19	32	11	47	150				
20	20	29	10,5	48	50				
21	21	37	11,5	59	250				
22	22	39	12	48	300				
23	23	35	11	47	250				
24	24	35	11	47	250				
25	25	35	11	51	200				
26	26	32	11	48	150				
27	27	36	12	67	200				
28	28	40	12	52	300				
29	29	39	12	51	300				
30	30	39	12	51	300				

Ajustar modelo con una variable independiente

NUM

Inicio | Clase 15ª (reg... | STATGRAPHIC... | segundo parcial | Microsoft Excel... | ES | 13:30

Dasometría / Celedonio López Peña

POLITÉCNICA

	arbol nº	dn en cm	h en m	edad años	leñas kg	Col_6	Col_7	Col_8	Col_9
1	1	20	7,5	30	50				
2	2	20	7,5	39	40				
3	3	19	7	30	40				
4	4	22	8	35	60				
5	5	20	7,5	30	50				
6	6	22	8	30	60				
7	7	20	7,5						
8	8	27	11						
9	9	26	7,5						
10	10	23	8						
11	11	24	8,5						
12	12	24	8,5						
13	13	27	11						
14	14	27	11						
15	15	24	8,5						
16	16	30	11						
17	17	29	10,5						
18	18	31	10						
19	19	32	11						
20	20	29	10,5						
21	21	37	11,5						
22	22	39	12	48	300				
23	23	35	11	47	250				
24	24	35	11	47	250				
25	25	35	11	51	200				
26	26	32	11	48	150				
27	27	36	12	67	200				
28	28	40	12	52	300				
29	29	39	12	51	300				
30	30	39	12	51	300				

Regresión Simple - Entrada de Datos

arbol nº
dn en cm
edad años
h en m
leñas kg

Y: h en m

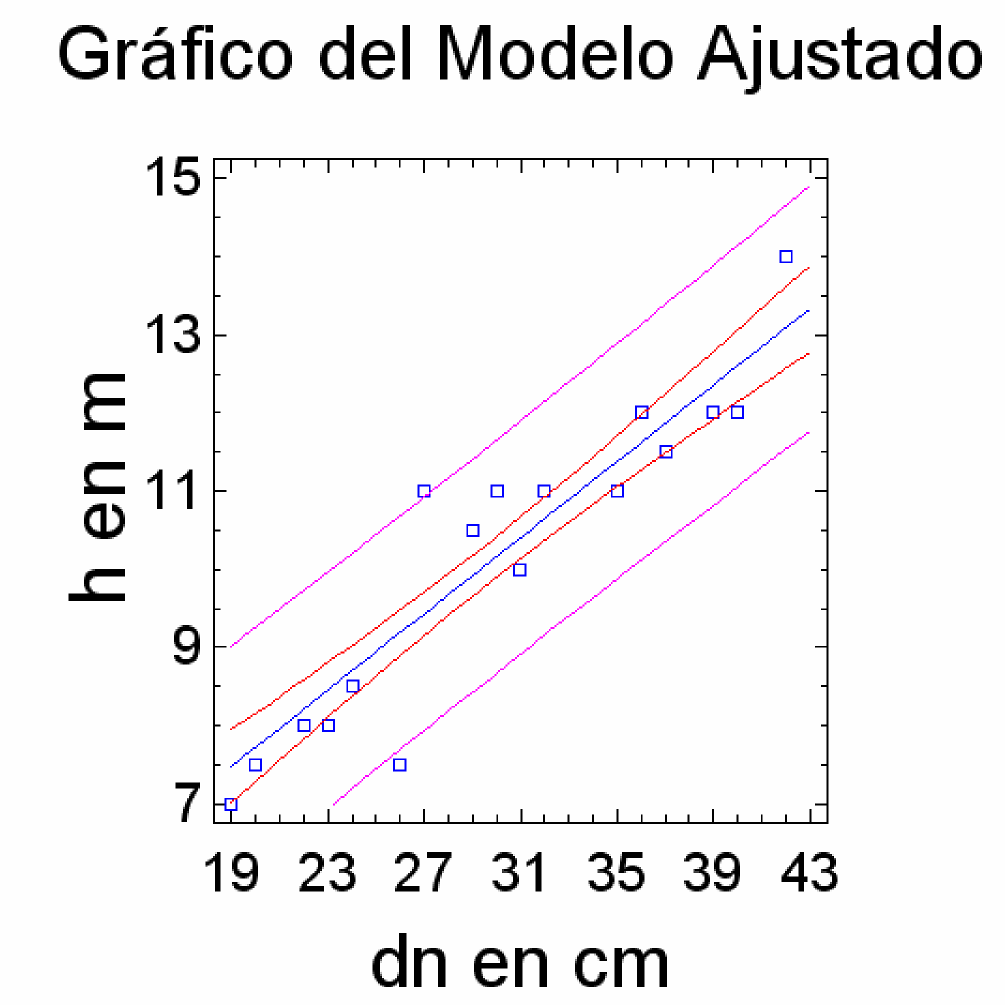
X: dn en cm

(Selección:)

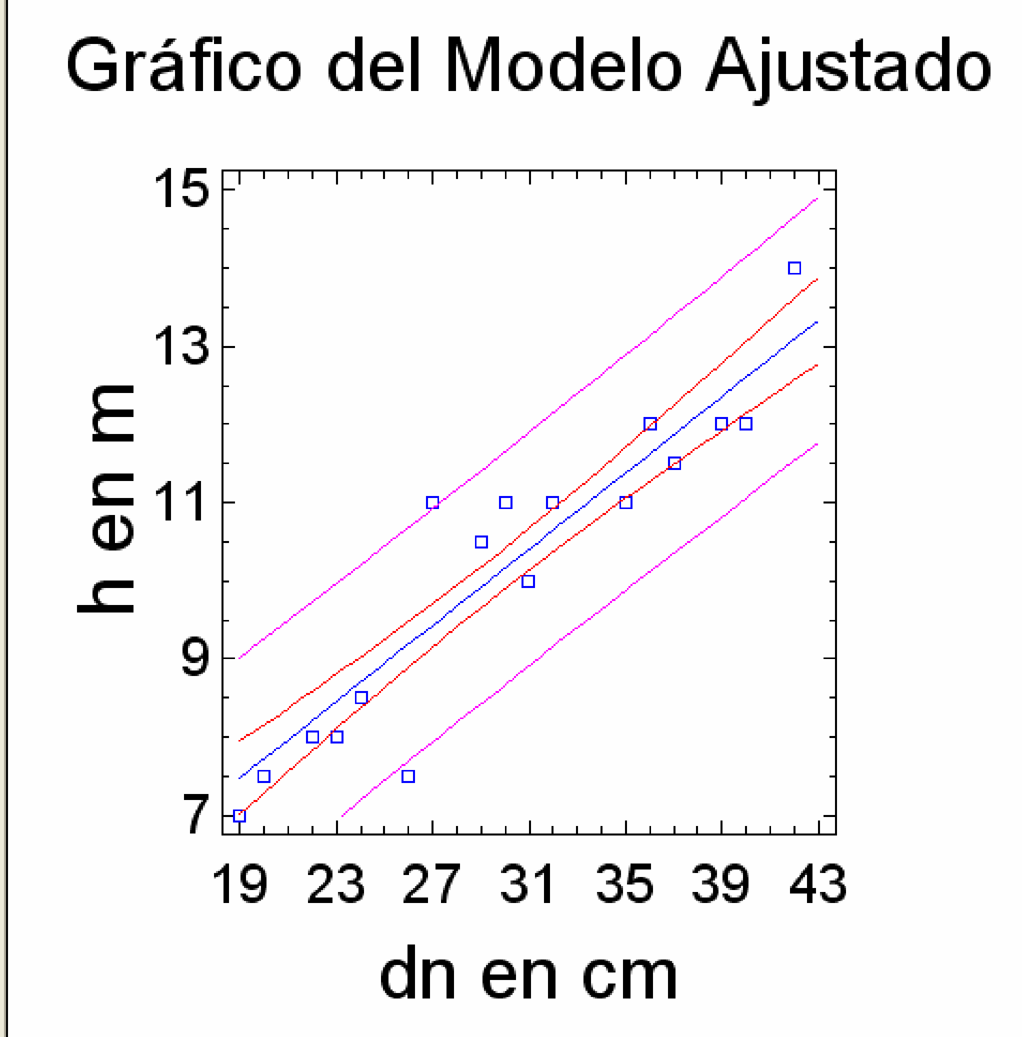
☑ Ordenar

Aceptar | Cancelar | Borrar | Transformar... | Ayuda

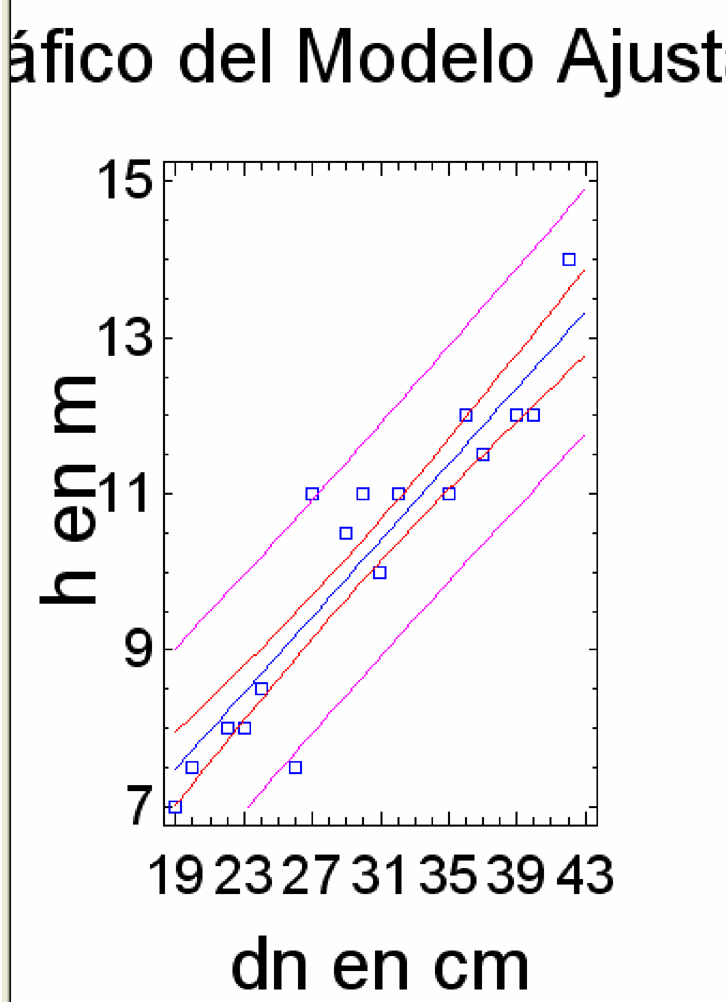
```
Análisis de Regresión - Modelo Lineal Y = a + b*X
-----------------------------------------------------------------------------
Variable dependiente: h en m
Variable independiente: dn en cm
-----------------------------------------------------------------------------
                                          Error         Estadístico
Parámetro       Estimación              estándar             T
-----------------------------------------------------------------------------
Ordenada          2,84474              0,545965           5,21048
Pendiente        0,243882             0,0179795           13,5644
-----------------------------------------------------------------------------


                           Análisis de la Varianza
-----------------------------------------------------------------------------
Fuente              Suma de cuadrados      GL   Cuadrado medi
-----------------------------------------------------------------------------
Modelo                        95,1634       1         95,1634
Residuo                       15,5163      30        0,517209
-----------------------------------------------------------------------------
Total (Corr.)                  110,68      31

Coeficiente de Correlación = 0,927259
R-cuadrado = 85,9809 porcentaje
R-cuadrado (ajustado para g.l.) = 85,5136 porcentaje
Error estándar de est. = 0,719173
Error absoluto medio = 0,544085
Estadístico de Durbin-Watson = 1,89036 (P=0,3111)
Autocorrelación residual en Lag 1 = 0,0264114

El StatAdvisor
--------------
   La salida muestra los resultados del ajuste al model
describir la relación entre h en m y dn en cm.  La ecua
ajustado es

   h en m = 2,84474 + 0,243882*dn en cm
```



```
------------------------------------------------------------------
Total (Corr.)              110,68     31

Coeficiente de Correlación = 0,927259
R-cuadrado = 85,9809 porcentaje
R-cuadrado (ajustado para g.l.) = 85,5136 porcentaje
Error estándar de est. = 0,719173
Error absoluto medio = 0,544085
Estadístico de Durbin-Watson = 1,89036 (P=0,3111)
Autocorrelación residual en Lag 1 = 0,0264114

El StatAdvisor
--------------
   La salida muestra los resultados del ajuste al model
describir la relación entre h en m y dn en cm.  La ecua
ajustado es

   h en m = 2,84474 + 0,243882*dn en cm

Dado que el p-valor en la tabla ANOVA es inferior a 0.0
relación estadísticamente significativa entre h en m y
un nivel de confianza del 99%.

   El estadístico R-cuadrado indica que el modelo expli
de la variabilidad en h en m.  El coeficiente de correl
a 0,927259, indicando una relación relativamente fuerte
variables.  El error estándar de la estimación muestra
típica de los residuos que es 0,719173.  Este valor pue
construir límites de la predicción para las nuevas obse
seleccionando la opción Predicciones del menú del texto

   El error absoluto medio (MAE) de 0,544085 es el valo
residuos.  El estadístico Durbin-Watson (DW) examina lo
determinar si hay alguna correlación significativa basa
en el que se han introducido los datos en el fichero.
p-valor es superior a 0.05, no hay indicio de autocorre
en los residuos.
```



```
----------------------------------------------------------------------------
Total (Corr.)              110,68      31

Coeficiente de Correlación = 0,927259
R-cuadrado = 85,9809 porcentaje
R-cuadrado (ajustado para g.l.) = 85,5136 porcentaje
Error estándar de est. = 0,719173
Error absoluto medio = 0,544085
Estadístico de Durbin-Watson = 1,89036 (P=0,3111)
Autocorrelación residual en Lag 1 = 0,0264114

El StatAdvisor
--------------
   La salida muestra los resultados del ajuste al modelo lineal para
describir la relación entre h en m y dn en cm.  La ecuación del modelo
ajustado es

   h en m = 2,84474 + 0,243882*dn en cm

Dado que el p-valor en la tabla ANOVA es inferior a 0.01, existe
relación estadísticamente significativa entre h en m y dn en cm para
un nivel de confianza del 99%.

   El estadístico R-cuadrado indica que el modelo explica un 85,9809%
de la variabilidad en h en m.  El coeficiente de correlación es igual
a 0,927259, indicando una relación relativamente fuerte entre las
variables.  El error estándar de la estimación muestra la desviación
típica de los residuos que es 0,719173.  Este valor puede usarse para
construir límites de la predicción para las nuevas observaciones
seleccionando la opción Predicciones del menú del texto.

   El error absoluto medio (MAE) de 0,544085 es el valor medio de los
residuos.  El estadístico Durbin-Watson (DW) examina los residuos para
determinar si hay alguna correlación significativa basada en el orden
en el que se han introducido los datos en el fichero.  Dado que el
p-valor es superior a 0.05, no hay indicio de autocorrelación serial
en los residuos.
```



Dasometría / Celedonio López Peña

STATGRAPHICS Plus - regre14ª.sgp - [Regresión simple - Col_2 frente a Col_1]

Archivo Edición Gráficos Descripción Comparación Dependencia Avanzado SnapStats!! Ver Ventana Ayuda

POLITÉCNICA

Etiq.: Fila:

Análisis de Regresión - Modelo Lineal Y = a + b*X

Variable dependiente: Col_2
Variable independiente: Col_1

Parámetro	Estimación	Error estándar	Estadístico T	P-Valor

Análisis de Varianza con Falta de ajuste

Fuente	Suma de cuadrados	GL	Cuadrado medio	Cociente-F	P-Valor
Modelo	95,1634	1	95,1634	183,99	0,0000
Residuo	15,5163	30	0,517209		

Valores predichos

X	Predicho Y	95,00% Límites de Predicción Inferior	95,00% Límites de Predicción Superior	95,00% Límites de Confianza Inferior	95,00% Límites de Confianza Superior
19,0	7,4785	5,93766	9,01933	7,01272	7,94427

Comparación de Modelos Alternativos

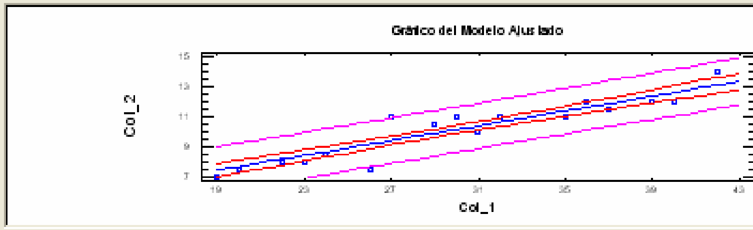
Modelo	Correlación	R-cuadrado
curva-S	-0,9401	88,38%
Doble inverso	0,9393	88,23%
Logarítmico-X	0,9360	87,61%

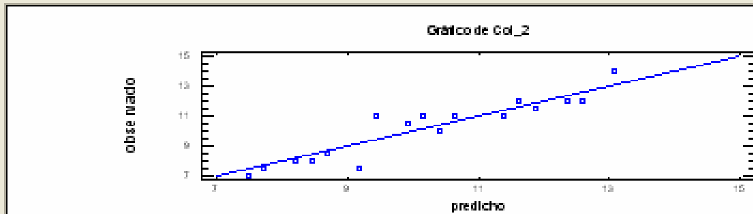
Residuos Atípicos

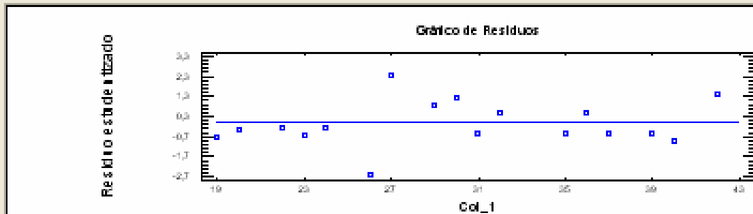
Fila	X	Y	Y Predicha	Residuo	Residuo Estudentizado
8	27,0	11,0	9,42955	1,57045	2,39
9	26,0	7,5	9,18567	-1,68567	-2,61

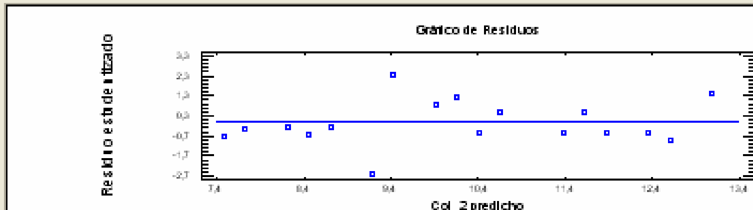
Puntos Influyentes

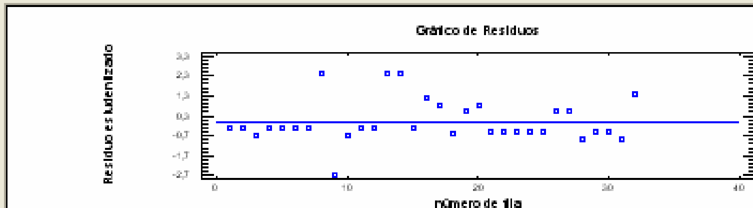
Fila	X	Y	Y Predicha	Residuo Estudentizado	Influencia











Utilice el botón alternativo para seleccionar opciones

NUM

Inicio segundo parcial STATGRAPHICS Plus ... Microsoft PowerPoint ... ES 16:24

Relación h/dn en las masas *h= f(dn)*

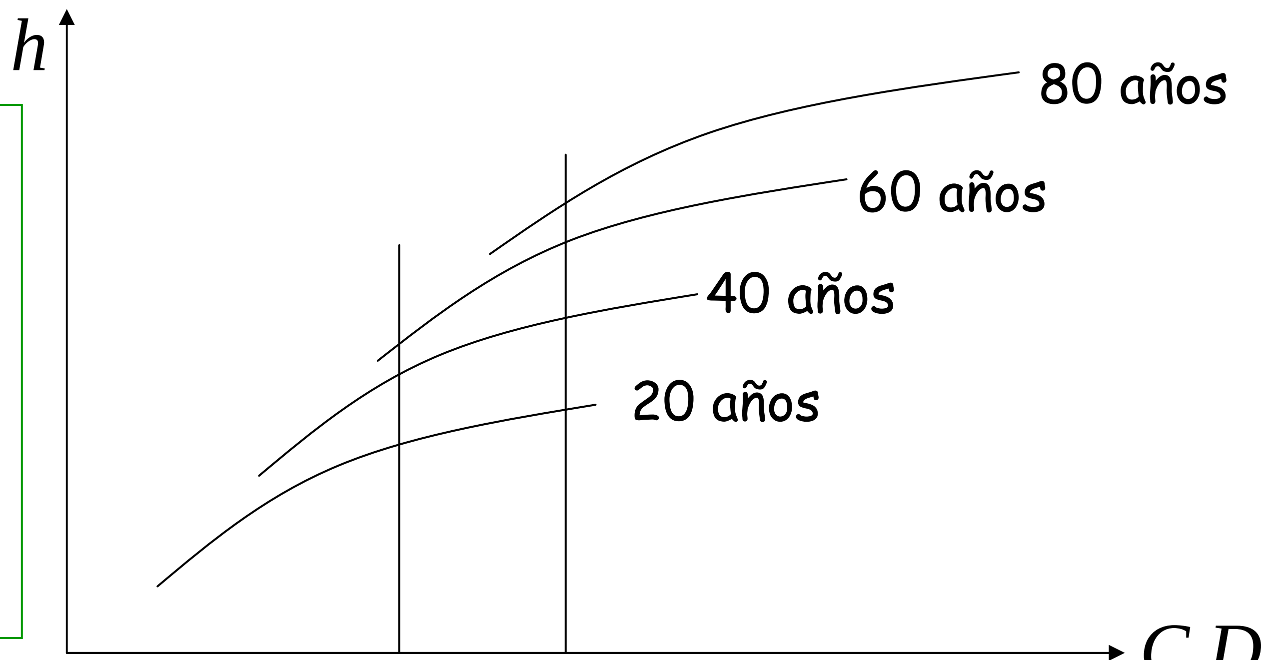
POLITÉCNICA

Mediante ajustes de regresión en una muestra representativa de (dn_i, h_i) de los árboles de una masa podemos comprobar que:

En las ***masas regulares*** la función *h= f(dn)* que relaciona las alturas (h) y los diámetros normales (dn) evoluciona con la edad.

Al ser el ritmo de crecimiento del "dn" distinto que el de las alturas "h", hace que:

En las masas regulares debemos siempre establecer esta relación *h= f/dn)* , aunque en la misma masa lo hayamos realizado con anterioridad



Relación h/dn en las masas $h= f(dn)$

En las ***masas irregulares***, donde se supone que el equilibrio caracteriza su estructura, la función que relaciona las alturas (h) y los diámetros normales (dn) permanece constante.

En las masas irregulares ideales podemos considerar que la relación

$$h= f(dn)$$

Permanece invariable en el tiempo