



**EJERCICIO Nº 26**

Se ha realizado el inventario forestal de una masa de Pinus pinaster no resinado, por muestreo estadístico, diseñado mediante la toma de datos en parcelas rectangulares de 20 x 25 mts. El diámetro mínimo inventariable considerado ha sido de 17,5 cmts. y se han agrupado los datos en clases diamétricas de 5 cmts. de amplitud.

La distribución diamétrica de frecuencias resultante de la parcela media, en un Tramo de 135,6 Has., ha sido la siguiente:

C.D.(cm.)	20	25	30	35	40
nº pies/parcela	5,87	6,8	9,55	3,7	0,8

De los datos, obtenidos en árboles muestra, de altura y crecimientos diametrales en los últimos cinco años, se han ajustado las siguientes relaciones de regresión:

$$h = 2,13 + 0,41 \cdot dn - 0,003 \cdot dn^2 \quad h \text{ (mts.)} / dn \text{ (cmts.)}$$

$$\Delta dn = 5 + 0,2 \cdot dn \quad \Delta dn \text{ (mms.)} / dn \text{ (cmts.)}$$

Para la cubicación de la especie que puebla la masa considerada, se dispone de la siguiente Tarifa de doble entrada:

$$V = 22,19 + 0,0348 \cdot dn^2 \cdot h \quad V(\text{dm}^3) / dn \text{ (cmts.)} / h(\text{mts.})$$

Se pide:

1º) Determinar la Función de distribución diamétrica de frecuencias en Nº pies/ Ha.

2º) Hallar los siguientes parámetros de masa del Tramo considerado.

a/ Diámetro medio aritmético (Dm)

b/ Diametro medio cuadrático (Dg)

c/ Desviación típica de la Distribución Diamétrica de Frecuencias.

d/ Altura del árbol de diámetro medio aritmético Hm

e/ Altura del árbol de Área Basimétrica media (Hg)

f/ Altura media de Lorey HL

g/ Altura dominante de Assmann. (Ho)

3º) Estimar los siguientes crecimientos de parámetros de masa:

a) Crecimiento periódico estimado del Área Basimétrica en los últimos cinco años.

b) Crecimiento relativo de Breymann del A.B.

c) Crecimiento relativo de Pressier del A.B.



4°) Calcular la Función de Distribución del volumen de la masa y el volumen total del Tramo considerado.

5°) Estimar el crecimiento corriente anual en volumen de la masa, y el crecimiento relativo según Breyman.

6°) Suponiendo que la masa crece en volumen al ritmo reflejado por el crecimiento relativo obtenido ¿Que volumen maderable deberá existir en dicho Tramo dentro de diez años?

**RESOLUCIÓN:**

1°)

La superficie de las parcelas replanteadas es

$$S_{PARCELA} = 20 \text{ m} \cdot 25 \text{ m} = 500 \text{ m}^2 \Rightarrow S_{PARCELA} \text{ en Has.} = \frac{500 \text{ m}^2}{10.000 \text{ m}^2} = 0,05 \text{ Has.}$$

Tenemos así que de los datos de la parcela media de la Función de Distribución Diamétrica, obtendremos dicha Función referida a la Ha.:

Para la C.D. "20" , si divido 5,87 pies/parcela, por la superficie en Has de la parcela obtendré el nº de pies /Ha a los que equivalen los obtenidos en la parcela. Tendré así:

$$\text{N}^\circ \text{ pies/Ha}_{CD"20"} = \frac{5,87 \text{ pies/parcela}}{0,05 \text{ Has./parcela}} = 117,4 \text{ pies /Ha.}$$

Procediendo de igual manera para el resto de las "CD", tendre la F.D.D. deseada

C.D. (cm.)	Nº pies /parcela	Nºpies/ Ha.
20	5,87	117,4
25	6,8	136
30	9,55	191
35	3,7	74
40	0,8	16
		534,4

C.D. (cm.)	Nºpies/ Ha.
20	117,4
25	136
30	191
35	74
40	16
	534,4

2°)

a) El diámetro medio aritmético  $\bar{D}$  sera:



$$\bar{D} = \frac{\sum n_i \cdot d_i}{\sum n_i} = \frac{117,4 \cdot 20 + \dots + 16 \cdot 40}{534,4} = \mathbf{27,52 \text{ cm.}}$$

- b) El Diámetro medio cuadrático o Diámetro del árbol de Área Basimétrica media será:

$$D_G = \sqrt{\frac{\sum n_i \cdot d_i^2}{\sum n_i}} = \sqrt{\frac{117,4 \cdot 20^2 + \dots + 16 \cdot 40^2}{534,4}} = \mathbf{28,04 \text{ cm.}}$$

- c) La desviación típica  $\sigma$  de la Función de Distribución será:

$$\sigma_{\bar{D}} = \sqrt{D_G^2 - \bar{D}^2} = \sqrt{28,89 \text{ cm}^2} = \mathbf{5,37 \text{ cm.}}$$

- d) La altura del árbol de Diámetro medio aritmético, la obtendremos particularizando la relación de regresión  $h/dn$ , de la masa para el diámetro  $\bar{D}$ :

$$h = 2,13 + 0,41 \cdot dn - 0,003 \cdot dn^2 \quad h \text{ (mts.)} / dn \text{ (cmts.)}$$

$$\bar{H} = 2,13 + 0,41 \cdot 27,52 - 0,003 \cdot 27,52^2 = \mathbf{11,14 \text{ m.}}$$

- e) La altura del árbol de Área Basimétrica media, la obtendremos particularizando la relación de regresión  $h/dn$ , de la masa para el diámetro  $D_G$ :

$$H_G = 2,13 + 0,41 \cdot 28,04 - 0,003 \cdot 28,04^2 = \mathbf{11,26 \text{ m.}}$$

- f) La altura media de Lorey, " $H_L$ ", la obtendremos, ponderando las alturas de las distintas C.D., por su correspondiente Área Basimétrica:



$$H_L = \frac{\sum n_i \cdot G_i \cdot h_i}{\sum n_i \cdot G_i}$$

Necesitamos conocer pues la Función de Distribución de las alturas y del A.B.

La manera de proceder en todos los casos , sería la reseñada para la C.D. "20"

$$h_{20} = 2,13 + 0,41 \cdot 20 - 0,003 \cdot 20^2 = \mathbf{9,13 \text{ m.}}$$

$$G_{20} = \frac{\pi}{4} \cdot \left( \frac{20 \text{ cm}}{100} \right)^2 \cdot 117,4 \text{ pies/Ha.} = \mathbf{3,69 \text{ m}^2/\text{Ha.}}$$

C.D. (cm.)	Nºpies/ Ha.	h (m.)	G (m <sup>2</sup> /Ha.)
20	117,4	9,13	3,69
25	136	10,50	6,68
30	191	11,73	13,48
35	74	12,80	7,12
40	16	13,73	2,00
	534,4		32,97

Tendremos que la altura media según Lorey será:

$$H_L = \frac{3,69 \text{ m}^2/\text{Ha.} \cdot 9,13 \text{ m} + 6,68 \text{ m}^2/\text{Ha.} \cdot 10,5 \text{ m} + 13,48 \text{ m}^2/\text{Ha.} \cdot 11,73 \text{ m} + 7,12 \text{ m}^2/\text{Ha.} \cdot 12,8 \text{ m} + 2 \text{ m}^2/\text{Ha.} \cdot 13,73 \text{ m}}{3,69 \text{ m}^2/\text{Ha.} + 6,68 \text{ m}^2/\text{Ha.} + 13,48 \text{ m}^2/\text{Ha.} + 7,12 \text{ m}^2/\text{Ha.} + 2 \text{ m}^2/\text{Ha.}} = \mathbf{11,54 \text{ m.}}$$

g) La altura dominante según Assmann (H<sub>0</sub>) será, la correspondiente al D<sub>G</sub> de los 100 árboles más gruesos por Ha., que será el diámetro dominante D<sub>0</sub>

$$D_0 = \sqrt{\frac{16 \cdot 40^2 + 74 \cdot 35^2 + 10 \cdot 30^2}{100}} = 35,39 \text{ cm.} \Rightarrow$$



$$H_0 = 2,13 + 0,41 \cdot 35,39 - 0,003 \cdot 35,39^2 = 12,88 \text{ m.}$$

3º)

Sabemos que el crecimiento periódico de la sección normal viene definido por:

$$\Delta g_n = \frac{\pi}{4} \cdot [2 \cdot dn \cdot \Delta dn - \Delta dn^2]$$

Donde dn, es diámetro normal actual, y Δdn, es el crecimiento periódico en un intervalo de tiempo previo, habitualmente el que se obtiene con la barrena de Pressler en los últimos cinco o diez años del diámetro normal sin corteza.

Con los datos disponibles, podemos estimar los crecimientos diametrales medios para las distintas C.D. en los últimos cinco años.

$$\Delta dn = 5 + 0,2 \cdot dn \quad \Delta dn \text{ (mms.)} / dn \text{ (cmts.)}$$

La manera de proceder en todos los casos , sería la reseñada para la C.D. “20”

$$\Delta dn = 5 + 0,2 \cdot 20 = 9 \text{ mm.} \Rightarrow \Delta g_{n20} = \frac{\pi}{4} \cdot 2 \cdot 20 \cdot 0,9 - 0,9^2 = 27,64 \text{ cm}^2$$

$$\Delta G_{20} \text{ (m}^2\text{/Ha.)} = 117,4 \text{ pies/Ha.} \cdot \frac{27,64}{10000} \text{ m}^2 = 0,3245 \text{ m}^2\text{/Ha.}$$

Procediendo de igual manera para el resto de las C.D. tendríamos:

C.D. (cm.)	Nºpies/ Ha.	Δdn (mm)	Δgn (cm <sup>2</sup> )	ΔG (m <sup>2</sup> /Ha.)	G (m <sup>2</sup> /Ha.)
20	117,4	9	27,64	0,3245	3,69
25	136	10	38,48	0,5233	6,68
30	191	11	50,88	0,9718	13,48
35	74	12	64,84	0,4798	7,12
40	16	13	80,35	0,1285	2,00
	534,4			2,4279	32,97

a) El crecimiento periódico del A.B. en los últimos cinco años, fue:

$$\Delta G = 2,428 \text{ m}^2 / \text{Ha.} \cdot 5 \text{ años}$$



b) El crecimiento relativo según Breymann será:

$$p\%_{\text{BREYMANN}} = \frac{i_{\text{CA}}}{G_{\text{FINAL}}} \cdot 100 = \frac{\frac{2,4279 \text{ m}^2/\text{Ha}}{5 \text{ años}}}{32,967 \text{ m}^2/\text{Ha}} \cdot 100 = \mathbf{1,47 \%/a\text{a}\text{a}\text{a}}$$

c) El crecimiento relativo según Pressler será:

$$p\%_{\text{PRESSLER}} = \frac{i_{\text{CA}}}{\frac{G_1 + G_2}{2}} \cdot 100 = \frac{\frac{2,4279 \text{ m}^2/\text{Ha}}{5 \text{ años}}}{\frac{(32,967 - 2,428) + 32,967}{2}} \cdot 100 = \mathbf{1,53 \%/a\text{a}\text{a}\text{a}}$$

4º)

El volumen total del Tramo considerado será:

La manera de proceder para calcularlo en todos los casos, para las distintas C.D. sería la reseñada para la C.D. "20"

$$V_{20}^u = 22,19 + 0,0348 \cdot 20^2 \cdot 9,13 = \mathbf{149,28 \text{ dm}^3} \Rightarrow$$

$$V_{20}^{\text{TOTAL}} = 0,14928 \text{ m}^3 \cdot 117,4 \text{ pies/Ha.} = \mathbf{17,52 \text{ m}^3/\text{Ha.}}$$

C.D. (cm.)	Nºpies/ Ha.	h (m.)	V <sup>unitario</sup> (dm <sup>3</sup> )	V <sub>TOTAL</sub> (m <sup>3</sup> /Ha.)
20	117,4	9,13	149,28	17,52
25	136	10,50	250,56	34,07
30	191	11,73	389,57	74,41
35	74	12,80	567,85	42,02
40	16	13,73	786,67	12,58
	534,4			180,6

El volumen total del Tramo será:

$$V_{\text{Tramo}}^{\text{total}} = 180,6 \text{ m}^3/\text{Ha.} \cdot 135,6 \text{ Has.} = \mathbf{24.489 \text{ m}^3/\text{Tramo}}$$



**5º)**

El crecimiento en volumen de la masa, lo podemos estimar, **a)** bien a través de la explotación de manera directa del crecimiento periódico diametral de la sección normal en los últimos cinco años, para determinar el crecimiento en volumen en ese periodo, o **b)** bien a través de proyectar hacia el futuro dicho crecimiento hacia mediante el desarrollo en serie de Taylor.

Vamos ha hacerlo de las dos maneras, los resultados obtenidos son muy similares.

**Procedimiento a)**

La función que me proporciona el volumen es:  $V = 22,19 + 0,0348 \cdot dn^2 \cdot h$

Para los árboles de la C.D "20" tendremos:

$$\Delta V_{20}^U = V_{ACTUAL} - V_{5AÑOS\ ANTES}$$

Necesito conocer el crecimiento en altura en los últimos cinco años, para determinar el crecimiento en volumen en el mismo periodo

La función que me proporciona la altura es:  $h = 2,13 + 0,41 \cdot dn - 0,003 \cdot dn^2$

La altura hace cinco años, la estimaremos a partir del "dn" de hace cinco años. Como sabemos que el  $\Delta dn$  en los últimos cinco años ha sido 9 mm., tendremos que la altura hace cinco años sería:

$$h_{"20" 5\ años\ antes} = 2,13 + 0,41 \cdot (20 - 0,9) - 0,003 \cdot (20 - 0,9)^2 = 8,86\ m.$$

$$\Delta V_{20}^U = V_{ACTUAL\ "20"} - V_{"20" 5AÑOS\ ANTES}$$

$$\Delta V_{20}^U = 149,28\ dm^3 - [22,19 + 0,0348 \cdot (20 - 0,9)^2 \cdot 8,86] dm^3 = 14,53\ dm^3$$

Multiplicando por el N° de pies /Ha., de esa CD, tendremos el crecimiento en volumen del total de los pies de la CD "20", en los últimos cinco años.

$$\Delta V_{20}^{TOTAL} == 14,53\ dm^3 \cdot 117,4\ pies/ha. = 1,7\ m^3 / Ha.$$

Para el total de los pies de la masa tendremos:



C.D. (cm.)	Nºpies/ Ha.	h (m.)	h 5 años antes (m.)	V <sup>unitario</sup> (dm <sup>3</sup> )	V <sup>unitario</sup> 5 años antes (dm <sup>3</sup> )	ΔV <sup>U</sup> últimos cinco años (dm <sup>3</sup> )	ΔV <sup>T</sup> últimos cinco años (m <sup>3</sup> /Ha)
20	117,4	9,13	8,87	149,28	134,75	14,53	1,70
25	136	10,50	10,24	250,56	227,49	23,18	3,15
30	191	11,73	11,47	389,57	355,67	33,91	6,48
35	74	12,80	12,56	567,85	521,56	46,50	3,44
40	16	13,73	13,50	786,67	726,01	60,67	0,97
	534,4						15,74

Tendremos que el **crecimiento corriente anual** “i<sub>ca</sub>” del volumen de la masa en los últimos cinco años será:

$$i_{ca} = \frac{15,74 \text{ m}^3 / \text{Ha.}}{5 \text{ años}} = 3,15 \text{ m}^3 / \text{Ha. / año}$$

Tendremos que el **crecimiento relativo anual en volumen según Breyman** “p%<sub>Breyman</sub>” del volumen de la masa en los últimos cinco años será:

$$p\%_{\text{Breyman}} = \frac{i_{ca}}{V_{\text{actual}}} \cdot 100 = \frac{3,15 \text{ m}^3 / \text{Ha.} \cdot \text{año}}{180,6 \text{ m}^3 / \text{Ha.}} \cdot 100 = 1,74 \% / \text{año}$$

### Procedimiento b)

La función que me proporciona el volumen es:  $V = 22,19 + 0,0348 \cdot dn^2 \cdot h$

Desarrollando en serie esta expresión, tendremos que una estimación del crecimiento en volumen vendrá definida por la expresión:

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial dn} \cdot \Delta dn + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \Delta h + \frac{1}{2!} \cdot \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial dn^2} \cdot \Delta dn^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial h^2} \cdot \Delta h^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial dn \cdot \partial h} \cdot \Delta dn \cdot \Delta h \right] + \dots$$

Δdn, lo conocemos, para las distintas CD

Δh, lo hallamos igualmente desarrollando en serie a partir de la función que nos define la altura en función del dn:  $h = 2,13 + 0,41 \cdot dn - 0,003 \cdot dn^2$





$$\Delta h = \frac{\partial h}{\partial dn} \cdot \Delta dn + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial dn^2} \cdot \Delta dn^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{\partial^3 h}{\partial dn^3} \cdot \Delta dn^3 + \dots$$

$$\frac{\partial h}{\partial dn} = -2 \cdot 0,003 \cdot dn + 0,41 \quad ; \quad \frac{\partial^2 h}{\partial dn^2} = -2 \cdot 0,003 \quad ; \quad \frac{\partial^3 h}{\partial dn^3} = 0$$

Particularizando para los árboles de la C.D "20" tendremos:

$$\Delta h_{20} = (-2 \cdot 0,003 \cdot 20 + 0,41) \cdot 0,9 + \frac{1}{2!} \cdot (-2 \cdot 0,003) \cdot 0,9^2 = \mathbf{0,259 \text{ m.}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial dn} = 2 \cdot 0,0348 \cdot dn \cdot h \quad ; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial dn^2} = 2 \cdot 0,0348 \cdot h \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial h} = 0,0348 \cdot dn^2$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial h^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial dn \cdot \partial h} = 2 \cdot 0,0348 \cdot dn$$

$$\Delta V_{20}^u = 2 \cdot 0,0348 \cdot 20 \cdot 9,13 \cdot 0,9 + 0,0348 \cdot 20^2 \cdot 0,259 + \frac{1}{2!} \cdot [2 \cdot 0,0348 \cdot 9,13 \cdot 0,9^2 + 0 + 2 \cdot 2 \cdot 0,0348 \cdot 20 \cdot 0,9 \cdot 0,259] = \mathbf{16,89 \text{ dm}^3}$$

Multiplicando por el N° de pies /Ha., de esa CD, tendremos el crecimiento en volumen del total de los pies de la CD "20", en los últimos cinco años, estimado desarrollando en serie.

$$\Delta V_{20}^{\text{TOTAL}} = 16,89 \text{ dm}^3 \cdot 117,4 \text{ pies/ha.} = \mathbf{1,98 \text{ m}^3/\text{Ha.}}$$

Para el total de los pies de la masa por este procedimiento tendremos tendremos:



C.D. (cm.)	Nºpies/ Ha.	h (m.)	Δh (m)	Δdn (cm)	ΔV <sup>U</sup> últimos cinco años(dm <sup>3</sup> )	ΔV <sup>T</sup> últimos cinco años(m <sup>3</sup> /Ha.)
20	117,4	9,13	0,259	0,9	16,89	1,98
25	136	10,50	0,257	1	24,67	3,36
30	191	11,73	0,249	1,1	33,37	6,37
35	74	12,80	0,236	1,2	42,56	3,15
40	16	13,73	0,216	1,3	51,84	0,83
	534,4					15,69

Tendremos que el **crecimiento corriente anual** “i<sub>ca</sub>” del volumen de la masa en los últimos cinco años será:

$$i_{ca} = \frac{15,69m^3 / Ha.}{5 \text{ años}} = \mathbf{3,14 m^3 / Ha. / año}$$

Tendremos que mediante este procedimiento el **crecimiento relativo anual en volumen según Breyman** “p%<sub>Breyman</sub>” del volumen de la masa en los últimos cinco años, lo obtendremos, considerando como el volumen al final del periodo el que se prevé para dentro de cinco años según el desarrollo en serie, que resultará de sumarle al volumen actual el crecimiento periódico estimado: V<sub>final</sub> = 180,6 m<sup>3</sup> + 15,69 m<sup>3</sup> = **196,29 m<sup>3</sup>**

$$p\%_{Breyman} = \frac{i_{ca}}{V_{actual}} \cdot 100 = \frac{3,14 m^3 / Ha. \cdot año}{196,29 m^3 / Ha.} \cdot 100 = \mathbf{1,6 \% / año}$$

Vemos que existen pequeñas diferencias, según apliquemos una u otra metodología, cualquiera de ellas es perfectamente válida.

**6º)**

Hemos determinado el volumen actual del tramo que es V<sub>TRAMO</sub>=180,6 m<sup>3</sup>/Ha.

Si tomamos como crecimiento relativo del volumen el obtenido en el apartado anterior por el **procedimiento a)**

$$p\%_{Breyman} == \mathbf{1,74 \% / año}$$

Tendremos que el ritmo de crecimiento del volumen al año en un futuro próximo,



de media será:

$$\Delta V_{\text{anual}} = 180,6 \text{ m}^3/\text{Ha.} \cdot \frac{1,74}{100} = 3,14 \text{ m}^3/\text{Ha.} \cdot \text{año} \Rightarrow$$
$$V_{\text{estimado}}^{\text{10 años despues}} = 180,6 \text{ m}^3/\text{Ha.} + 31,4 \text{ m}^3/\text{Ha.} = 212 \text{ m}^3/\text{Ha.}$$
$$\Rightarrow V_{\text{Tramo}}^{\text{total}} = 212 \text{ m}^3/\text{Ha.} \cdot 135,6 \text{ Has.} = 28.745 \text{ m}^3/\text{Tramo}$$

Si tomamos como crecimiento relativo del volumen el obtenido en el apartado anterior por el **procedimiento b)**

$$p\%_{\text{Breyman}} = 1,6 \% / \text{año}$$

Tendremos que el ritmo de crecimiento del volumen al año en un futuro próximo, de media será:

$$\Delta V_{\text{anual}} = 180,6 \text{ m}^3/\text{Ha.} \cdot \frac{1,6}{100} = 2,89 \text{ m}^3/\text{Ha.} \cdot \text{año} \Rightarrow$$
$$V_{\text{estimado}}^{\text{10 años despues}} = 180,6 \text{ m}^3/\text{Ha.} + 28,9 \text{ m}^3/\text{Ha.} = 209,5 \text{ m}^3/\text{Ha.}$$
$$\Rightarrow V_{\text{Tramo}}^{\text{total}} = 209,5 \text{ m}^3/\text{Ha.} \cdot 135,6 \text{ Has.} = 28.408 \text{ m}^3/\text{Tramo}$$