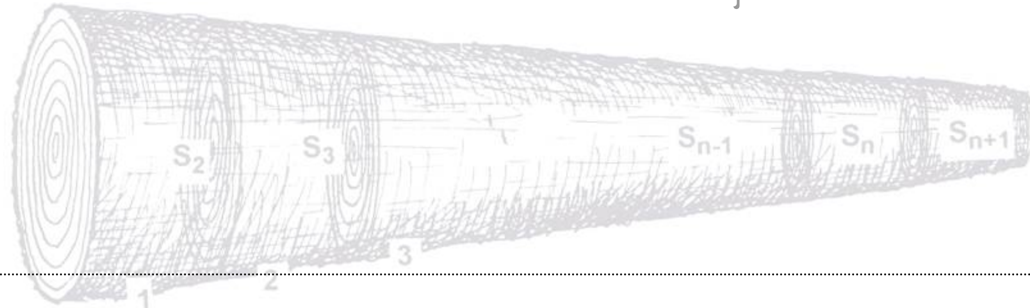
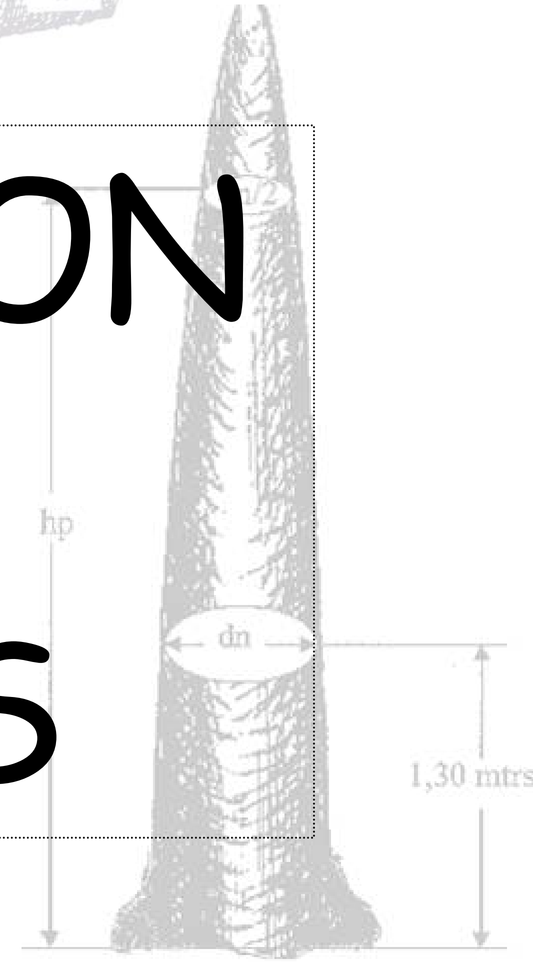
TEMA nº 8: CUBICACIÓN DE ÁRBOLES



CUBICACION DE ÁRBOLES



INTRODUCCIÓN A LA CUBICACIÓN DE ÁRBOLES. TIPOS DENDROMÉTRICOS

Cubicar un árbol es determinar el volumen de su tronco, habitualmente el del "fuste".

Para el estudio de los temas relacionados con la cubicación de los árboles, partimos de una serie de hipótesis sobre la forma de los troncos, basadas en considerarles sólidos de revolución, al ser sus ejes sensiblemente rectilíneos y sus secciones sensiblemente circulares.

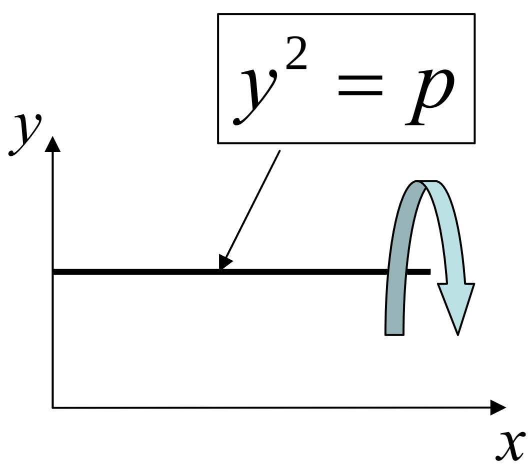
Asimilamos los troncos de los árboles a sólidos de revolución a los que llamamos, "Tipos Dendrométricos", engendrados por curvas de perfil que pertenecen a la familia de curvas de funciones del tipo:

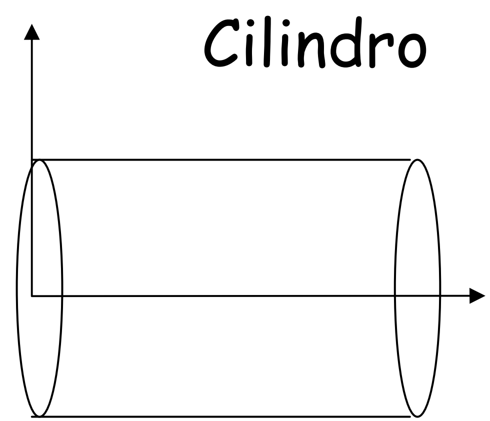
$$\boxed{y^2 = p \cdot x^n}$$

Partimos de sólidos de revolución engendrados por lineas de perfil pertenecientes a la "familia de curvas" $y^2 = p \cdot x^n$

Llamamos "Tipos Dendrométricos" a los solidos de revolución que nos sirven como referencia para asimilarlos a las distintas formas que pueden tener los troncos de árboles.

Para n=0 tendremos la función línea de perfil que dará lugar al T.D. <u>"Cilindro".</u>



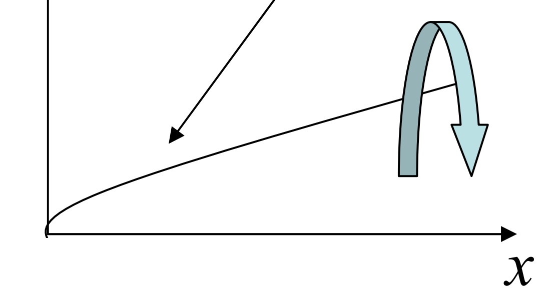


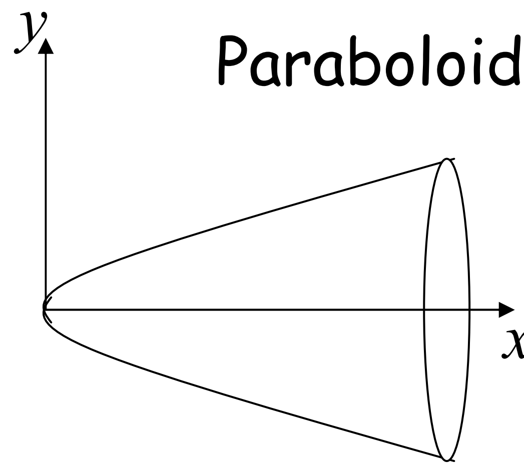
TIPOS DENDROMÉTRICOS

$$\boxed{y^2 = p \cdot x^n}$$

Para n=1 tendremos la función línea de perfil que dará lugar al T.D. <u>"Paraboloide".</u>

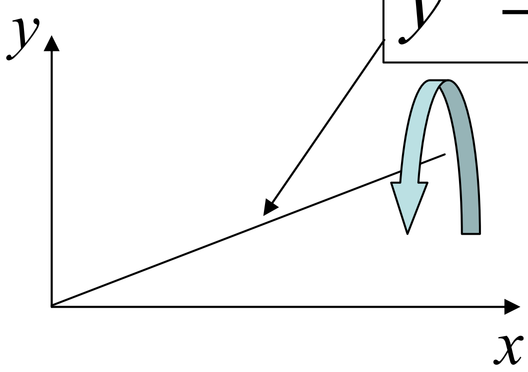
$$\boxed{y^2 = p \cdot x}$$

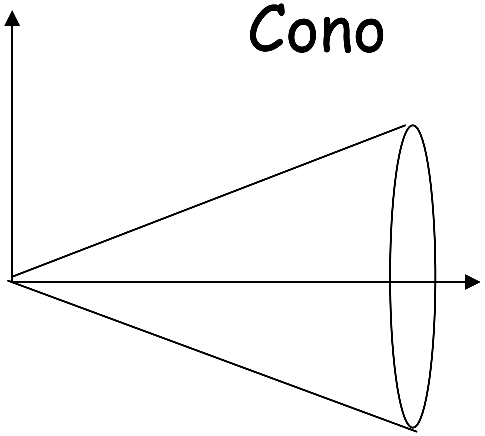




Para n=2 tendremos la función línea de perfil que dará lugar al T.D. <u>"Cono".</u>

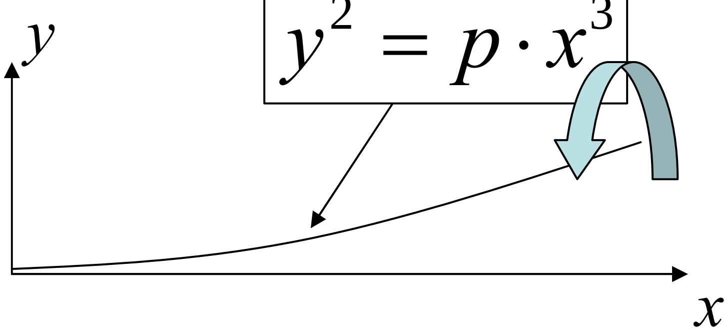
$$y^2 = p \cdot x^2$$

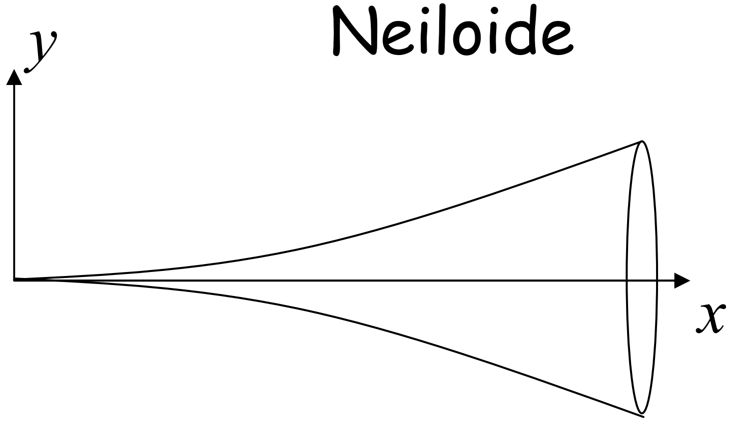




Para n=3 tendremos la función línea de perfil que dará lugar al T.D. <u>"Neiloide".</u>

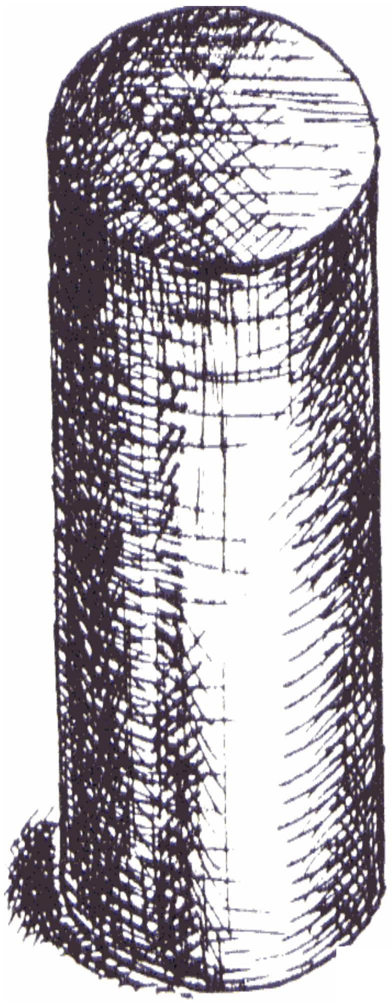
$$y^2 = p \cdot x^3$$





$$y^2 = p$$

Tipo Dendrométrico "cilindro"

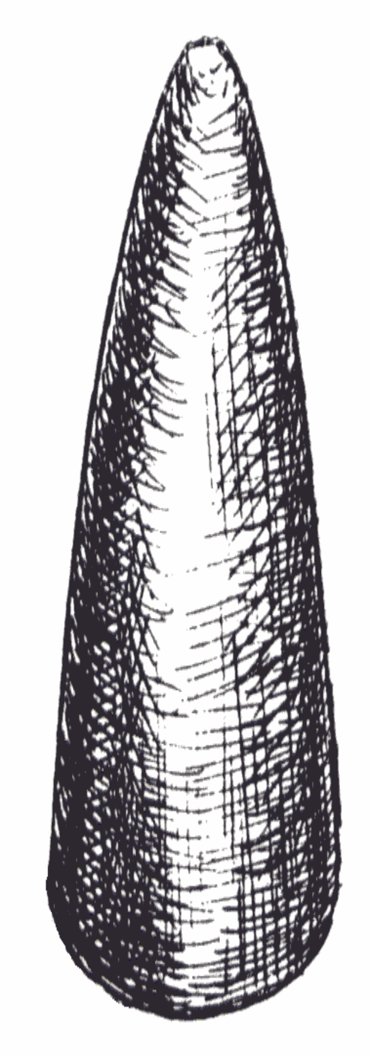


cilindro

De forma genérica podemos decir que el Tipo Dendrométrico cilindro se acomoda al fuste corto de algunas de las frondosas en España como la encina, el alcornoque, el algarrobo,..

$$y^2 = p \cdot x$$

Tipo Dendrométrico "paraboloide"

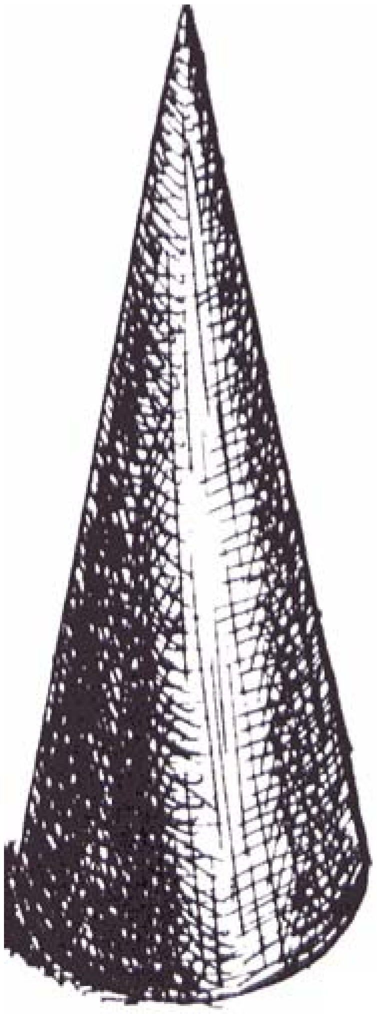


paraboloide

De forma genérica podemos decir que el Tipo Dendrométrico paraboloide está presente en los pies de las buenas masas regulares de coníferas

$$y^2 = p \cdot x^2$$

Tipo Dendrométrico "cono"

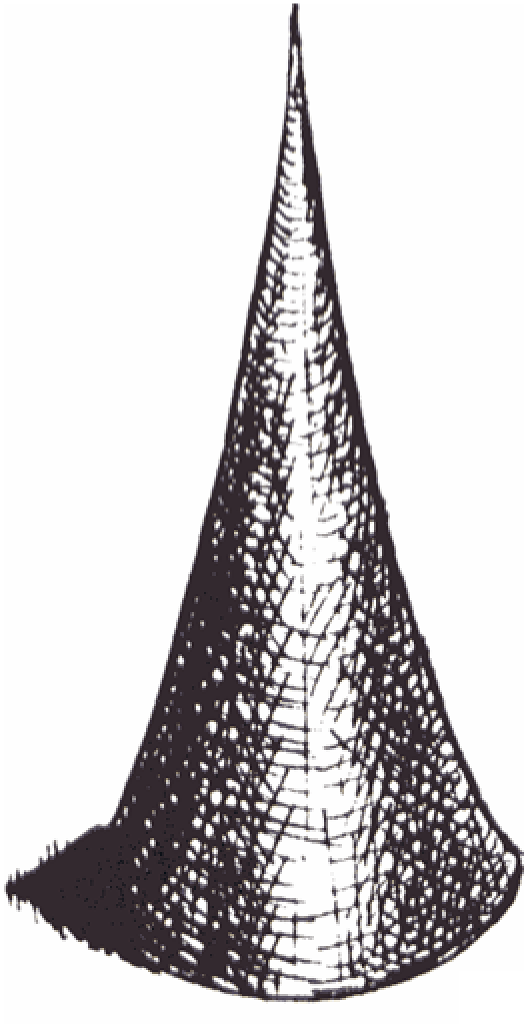


Cono

De forma genérica podemos decir que el Tipo Dendrométrico cono se puede observar en masas claras de algunas frondosos y coníferas

$$y^2 = p \cdot x^3$$

Tipo Dendrométrico "neiloide"



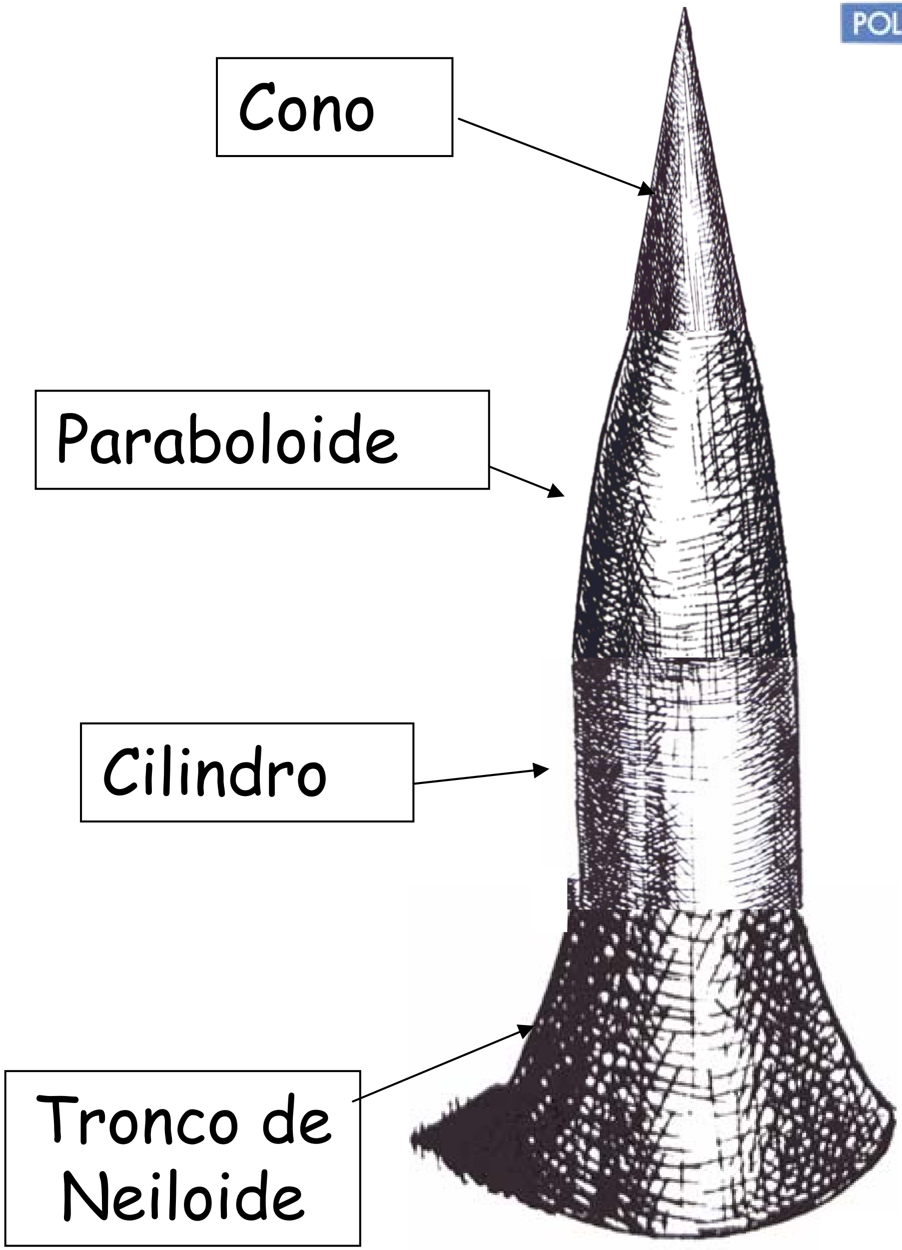
Neiloide

De forma genérica podemos decir que el Tipo Dendrométrico neiloide se da en árboles aislados, eucaliptos en montes de llanura, sequoias, árboles tropicales,..

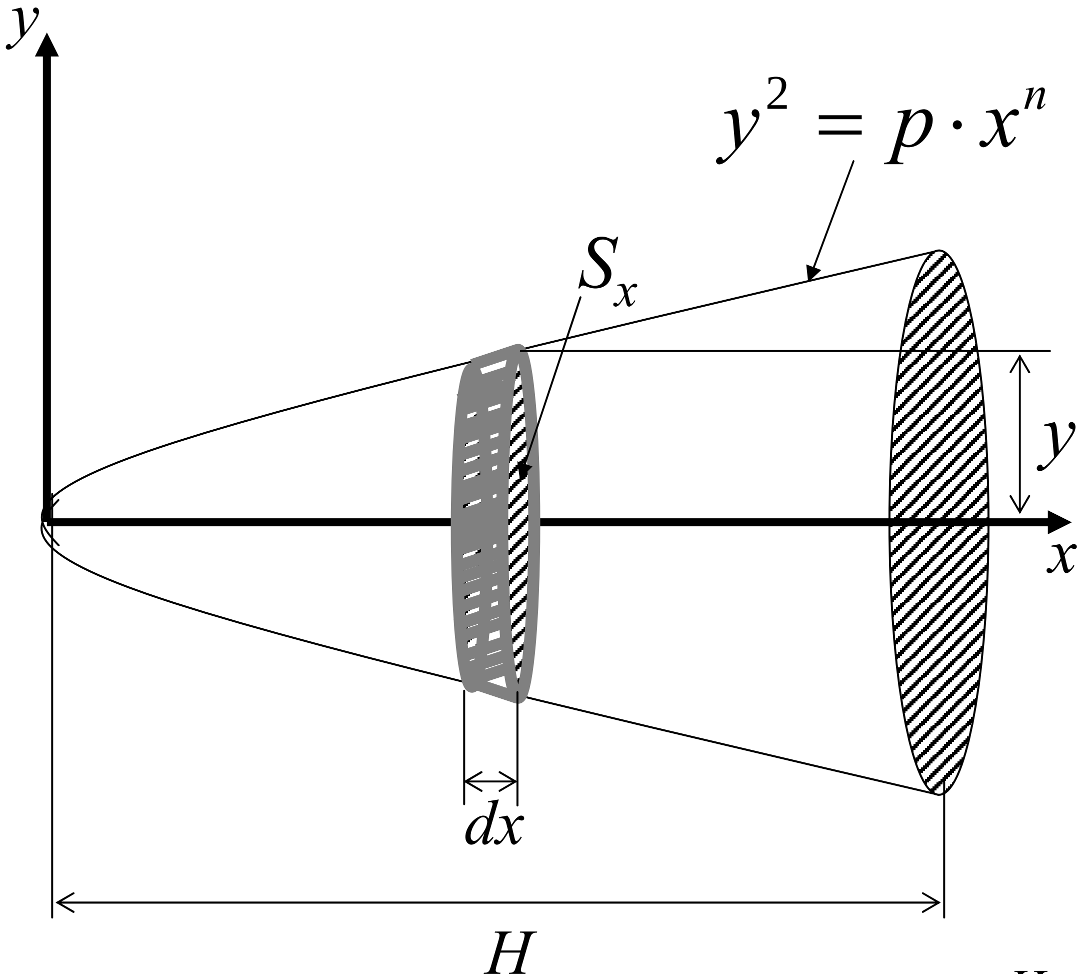
TIPOS DENDROMÉTRICOS

Podemos encontrar troncos en los que distintas partes del mismo podamos asimilarlos a distintos Tipos Dendrométricos.

A través de los T.D. partimos de unos determinados modelos ideales para hacer comparaciones con la realidad, una de sus principales utilidades es la de estudiar la fiabilidad de las fórmulas de cubicacion.



Volumen geométrico real de los distintos Tipos Dendrométricos

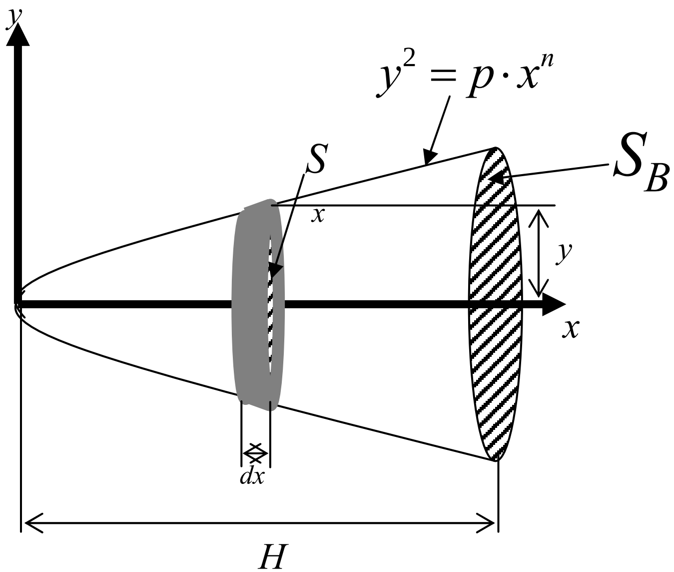


El volumen de cualquier T.D. engendrado por una curva $y^2 = p \cdot x^n$ *será:*

$$dV = S \cdot dx$$

$$V = \int_0^H S_x \cdot dx = \int_0^H \pi \cdot {y_x}^2 \cdot dx =$$

Volumen geométrico real de los distintos Tipos Dendrométricos



El volumen de cualquier T.D. engendrado por una curva $y^2 = p \cdot x^n$ ***será:***

$$V = \int_0^H \pi \cdot p \cdot x^n \cdot dx = \left[\pi \cdot p \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^H =$$

$$V = \left[\pi \cdot p \cdot x^n \frac{x}{n+1} \right]_0^H = \left[S_x \frac{x}{n+1} \right]_0^H = \frac{S_B \cdot H}{n+1}$$

El Volumen geométrico real de cualquier Tipo Dendrométrico de altura H y sección el la base S_B será: $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{S_B \cdot H}{n+1}}$

Podemos calcular el volumen de cualquier T.D. si conocemos su sección en la base y su altura

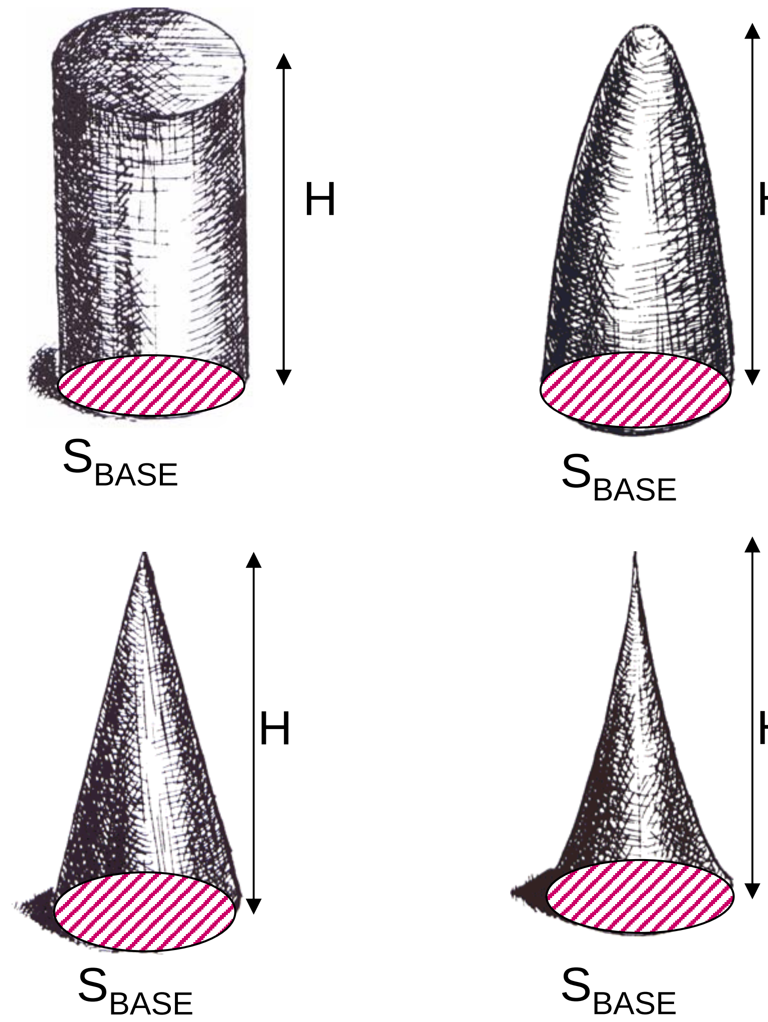
$$\boxed{V_{REAL} = \frac{S_{BASE} \cdot H}{n+1}}$$

$$V_{CILINDRO} = S_{BASE} \cdot H$$

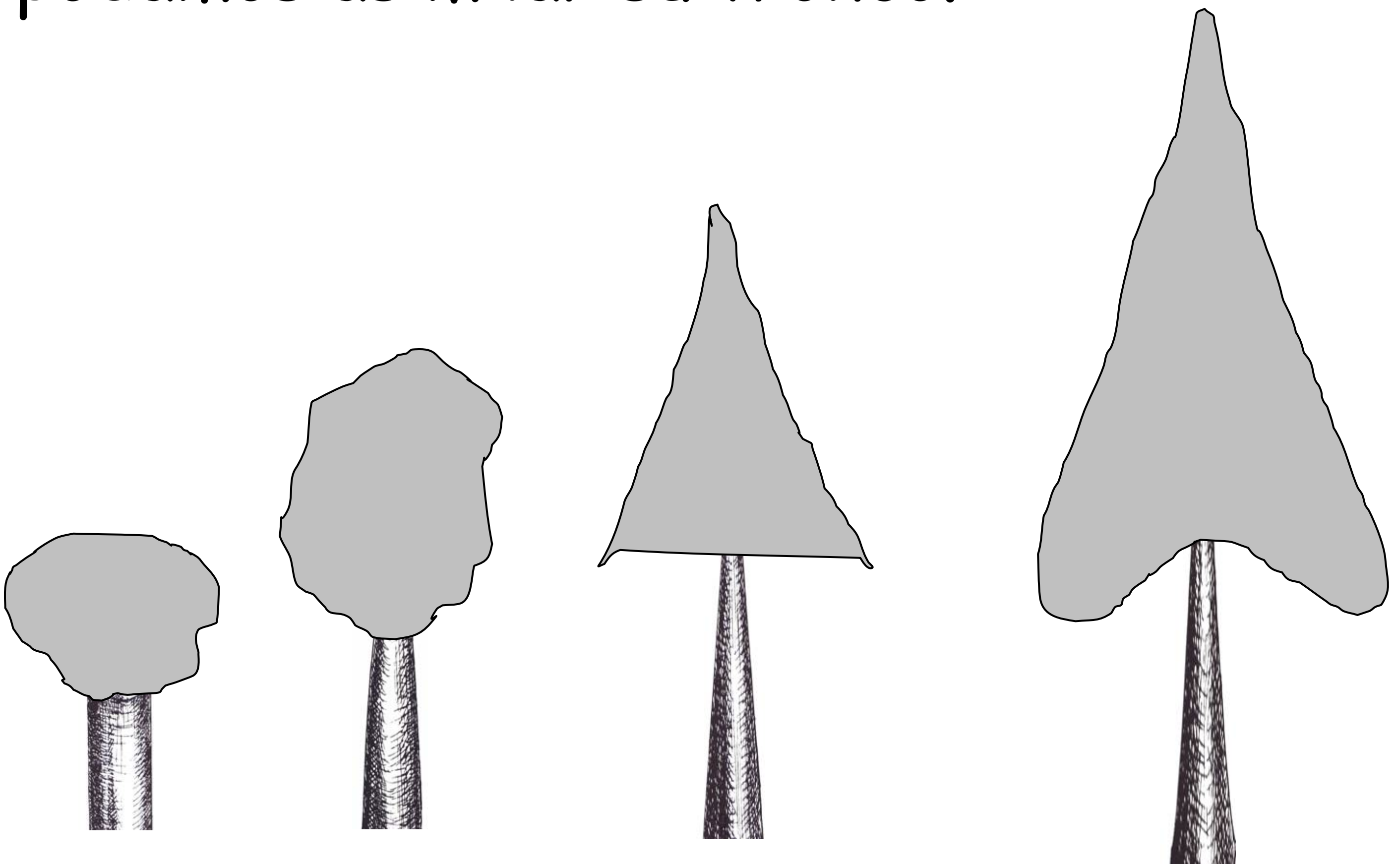
$$V_{PARABOLOIDE} = \frac{S_{BASE} \cdot H}{2}$$

$$V_{CONO} = \frac{S_{BASE} \cdot H}{3}$$

$$V_{NEILOIDE} = \frac{S_{BASE} \cdot H}{4}$$



Podemos observar, que árboles de dimensiones muy distintas, pueden tener igual volumen, según el T.D. al que podamos asimilar su tronco.



Cubicación práctica de los troncos de los árboles

Para la cubicación en la práctica de los árboles utilizamos dos tipos de fórmulas o procedimientos:

1. ***Las que basan su precisión en dividir el tronco en trozas de reducida dimensión.***

a) Fórmula de Huber

b) Fórmula de Smalian

Cubicación comercial

c) Fórmula de Newton

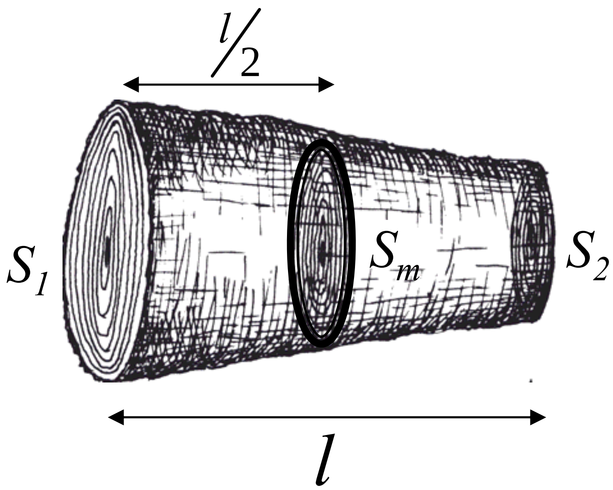
d) Método gráfico o del planímetro

2. ***Las que se aplican a la totalidad de la longitud del tronco como un único sólido de revolución:***

a) Fórmula de Pressler (método de cubicación de Pressler-Bitterlich)

b) Utilización de coeficientes mórficos

Fórmula de Huber

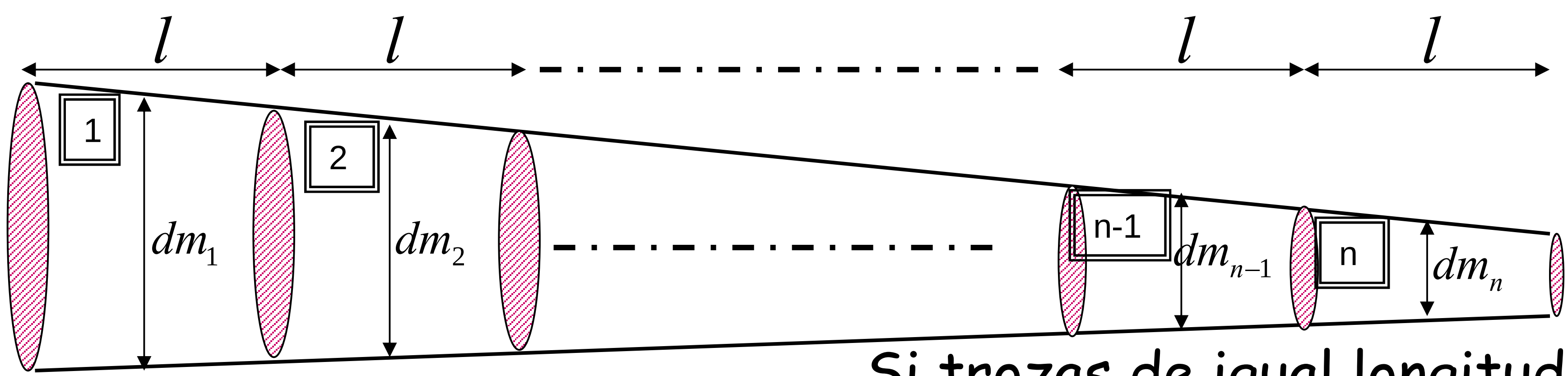


$$V_{HUBER} = S_m \cdot l = \frac{\pi}{4} \cdot d_m{}^2 \cdot l$$

V = volumen de la troza

S_m = sección a mitad de su longitud

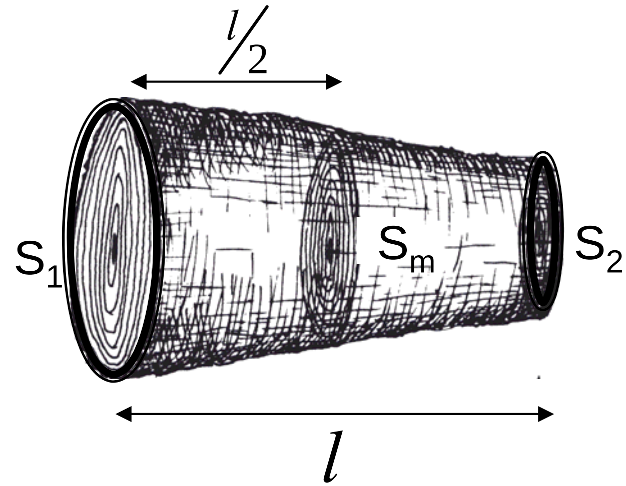
l = longitud de la troza



Si trozas de igual longitud

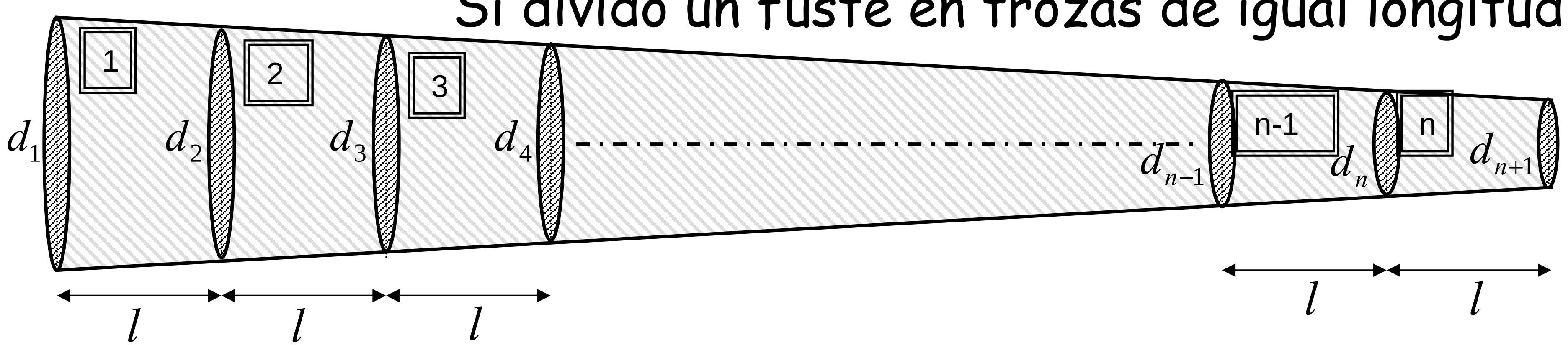
$$V_{HUBER} = \frac{\pi}{4} \cdot l \cdot \left[d_{m1}{}^2 + d_{m2}{}^2 + d_{m3}{}^2 + \ldots\ldots + d_{mn-1}{}^2 + d_{mn}{}^2 \right]$$

Fórmula de Smalian



$$V_{SMALIAN} = \boxed{\frac{S_1 + S_2}{2} \cdot l} = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot d_1^{\,2} + \frac{\pi}{4} \cdot d_2^{\,2}}{2} \cdot l = \frac{\pi}{8} \cdot l \left(d_1^{\,2} + d_2^{\,2} \right)$$

Si divido un fuste en trozas de igual longitud:



Fórmula de Smalian

$$V_{SMALIAN} = \frac{S_1 + S_2}{2} \cdot l = \frac{\pi}{8} \cdot l\left(d_1^{\,2} + d_2^{\,2}\right)$$

$$V_1 = \frac{\pi}{8} \cdot l \cdot \left(d_1^{\,2} + d_2^{\,2}\right)$$

$$V_2 = \frac{\pi}{8} \cdot l \cdot \left(d_2^{\,2} + d_3^{\,2}\right)$$

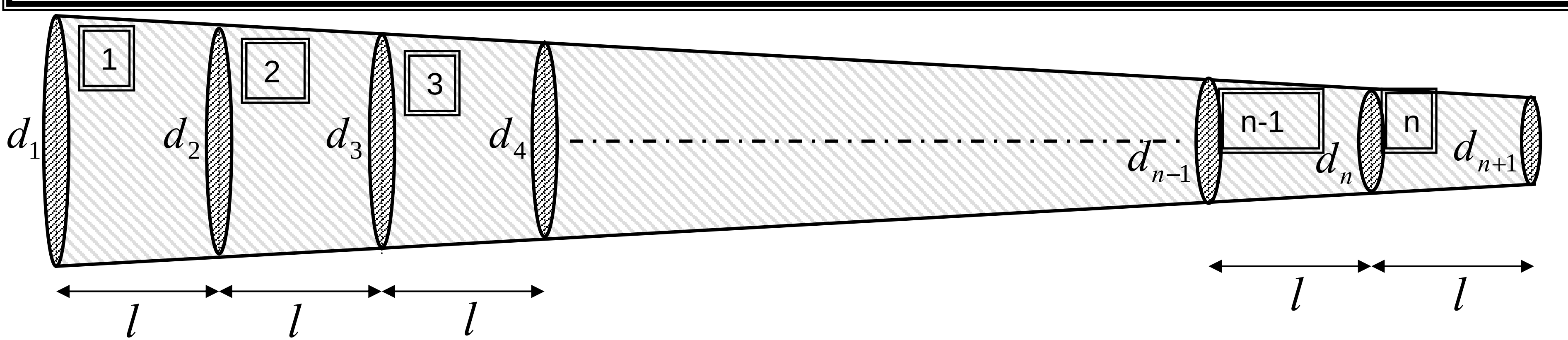
$$V_3 = \frac{\pi}{8} \cdot l \cdot \left(d_3^{\,2} + d_4^{\,2}\right)$$

Cuando la aplicamos a troncos divididos en trozas de igual longitud

$$V_{n-1} = \frac{\pi}{8} \cdot l \cdot \left(d_{n-1}^{\,2} + d_n^{\,2}\right)$$

$$V_n = \frac{\pi}{8} \cdot l \cdot \left(d_n^{\,2} + d_{n+1}^{\,2}\right)$$

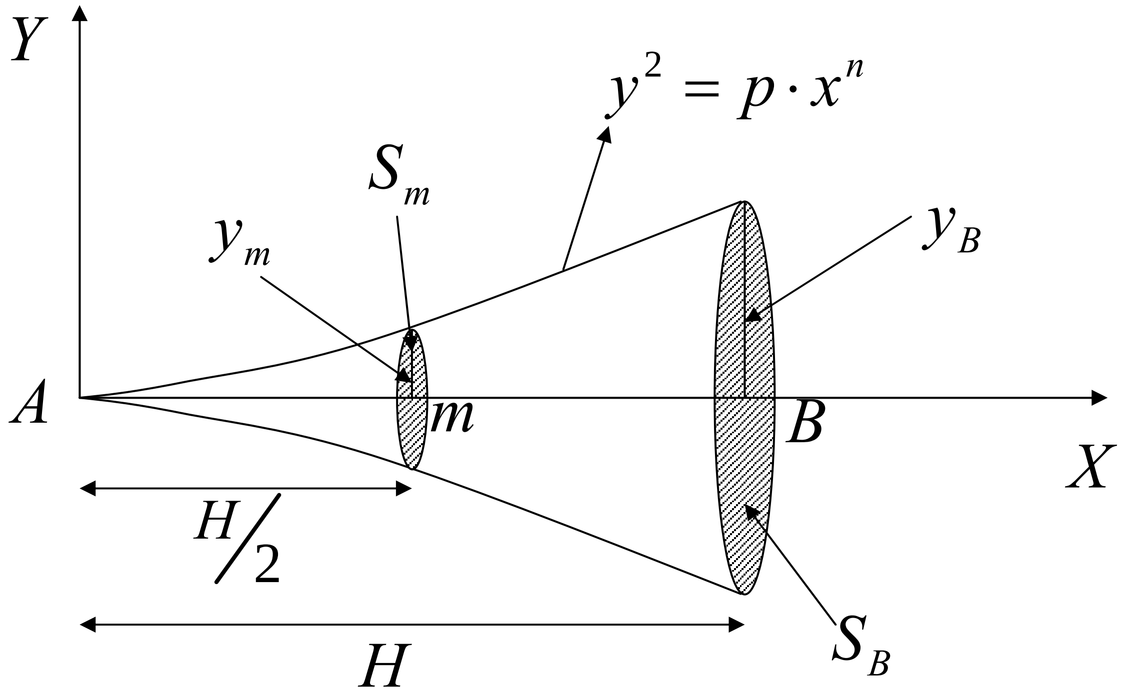
$$V_{TOTAL} = \sum V_i = \frac{\pi}{8} \cdot l \cdot \left[d_1^{\,2} + 2 \cdot d_2^{\,2} + 2 \cdot d_3^{\,2} + 2 \cdot d_4^{\,2} + \ldots\ldots + 2 \cdot d_{n-1}^{\,2} + 2 \cdot d_n^{\,2} + d_{n+1}^{\,2}\right]$$



Comparación entre el volumen real y el volumen comercial de los distintos Tipos Dendrométricos.

T.D. $y^2 = p \cdot x^n$	Volumen real $\frac{S_{BASE} \cdot H}{n+1}$	Volumen Huber $S_m \cdot l$	Volumen Smalian $\frac{S_1 + S_2}{2} \cdot l$
cilindro $n=0$ $y^2 = p$	$V = S_B \cdot H$		
paraboloide $n=1$ $y^2 = p \cdot x$	$V = \frac{S_B \cdot H}{2}$		
cono $n=2$ $y^2 = p \cdot x^2$	$V = \frac{S_B \cdot H}{3}$		
neiloide $n=3$ $y^2 = p \cdot x^3$	$V = \frac{S_B \cdot H}{4}$		

Para comparar el volumen real con el obtenido por Huber, necesitamos conocer la relación entre S_B y S_m



$$En\ \mathrm{m.....S_m} = \pi \cdot {y_m}^2 = \pi \cdot p \cdot {x_m}^n = \pi \cdot p \cdot \left(\frac{H}{2}\right)^n$$

$$En\ \mathrm{B.....S_B} = \pi \cdot {y_B}^2 = \pi \cdot p \cdot {x_B}^n = \pi \cdot p \cdot H^n$$

$$En\ \mathrm{m.....S_m} = \pi \cdot y_m^{\ 2} = \pi \cdot p \cdot x_m^{\ n} = \pi \cdot p \cdot \left(\frac{H}{2}\right)^n$$

$$En\ \mathrm{B.....S_B} = \pi \cdot y_B^{\ 2} = \pi \cdot p \cdot x_B^{\ n} = \pi \cdot p \cdot H^n$$

$$\pi \cdot p = \frac{S_m}{\left(\frac{H}{2}\right)^n} = \frac{S_m}{(H)^n} \Rightarrow S_m = \frac{S_B \cdot \frac{H^n}{2^n}}{H^n} = \frac{S_B}{2^n} \Rightarrow \mathrm{S_m} = \frac{S_B}{2^n}$$

$$\boxed{\mathrm{S_m} = \frac{S_B}{2^n}} \Rightarrow \boxed{\mathrm{V_{Huber}} = S_m \cdot l = \frac{S_B}{2^n} \cdot l}$$

Expresión de la fórmula de Huber en función de la sección en la base

Comparación entre el volumen real y el volumen comercial de los distintos Tipos Dendrométricos.

T.D. $y^2 = p \cdot x^n$	Volumen real $\frac{S_{BASE} \cdot H}{n+1}$	Volumen Huber $S_m \cdot l = \frac{S_B}{2^n} \cdot l$	Volumen Smalian $\frac{S_1 + S_2}{2} \cdot l$
cilindro $n=0$ $y^2 = p$	$V = S_B \cdot H$	$\frac{S_B}{2^0} \cdot l = S_B \cdot H$	$\frac{S_B + S_B}{2} \cdot l = S_B \cdot H$
paraboloide $n=1$ $y^2 = p \cdot x$	$V = \frac{S_B \cdot H}{2}$	$\frac{S_B}{2^1} \cdot l = \frac{S_B \cdot H}{2}$	$\frac{S_B + 0}{2} \cdot l = \frac{S_B \cdot H}{2}$
cono $n=2$ $y^2 = p \cdot x^2$	$V = \frac{S_B \cdot H}{3}$	$\frac{S_B}{2^2} \cdot l = \frac{S_B \cdot H}{4}$	$\frac{S_B + 0}{2} \cdot l = \frac{S_B \cdot H}{2}$
neiloide $n=3$ $y^2 = p \cdot x^3$	$V = \frac{S_B \cdot H}{4}$	$\frac{S_B}{2^3} \cdot l = \frac{S_B \cdot H}{8}$	$\frac{S_B + 0}{2} \cdot l = \frac{S_B \cdot H}{2}$

Comparación entre el volumen real y el volumen según Huber de los distintos Tipos Dendrométricos. Conclusiones

T.D. $y^2 = p \cdot x^n$	Volumen real $\frac{S_{BASE} \cdot H}{n+1}$	Volumen Huber $S_m \cdot l = \frac{S_B}{2^n} \cdot l$	Comparación
cilindro $n = 0 \quad y^2 = p$	$V = S_B \cdot H$	$\frac{S_B}{2^0} \cdot l = S_B \cdot H$	exacto
paraboloide $n = 1 \quad y^2 = p \cdot x$	$V = \frac{S_B \cdot H}{2}$	$\frac{S_B}{2^1} \cdot l = \frac{S_B \cdot H}{2}$	exacto
cono $n = 2 \quad y^2 = p \cdot x^2$	$V = \frac{S_B \cdot H}{3}$	$\frac{S_B}{2^2} \cdot l = \frac{S_B \cdot H}{4}$	ligeramente por defecto
neiloide $n = 3 \quad y^2 = p \cdot x^3$	$V = \frac{S_B \cdot H}{4}$	$\frac{S_B}{2^3} \cdot l = \frac{S_B \cdot H}{8}$	por defecto

Comparación entre el volumen real y el volumen según Smalian de los distintos Tipos Dendrométricos. Conclusiones

T.D. $y^2 = p \cdot x^n$	Volumen real $\frac{S_{BASE} \cdot H}{n+1}$	Volumen Smalian $\frac{S_1 + S_2}{2} \cdot l$	Comparación
cilindro $n=0$ $y^2 = p$	$V = S_B \cdot H$	$\frac{S_B + S_B}{2} \cdot l = S_B \cdot H$	exacto
paraboloide $n=1$ $y^2 = p \cdot x$	$V = \frac{S_B \cdot H}{2}$	$\frac{S_B + 0}{2} \cdot l = \frac{S_B \cdot H}{2}$	exacto
cono $n=2$ $y^2 = p \cdot x^2$	$V = \frac{S_B \cdot H}{3}$	$\frac{S_B + 0}{2} \cdot l = \frac{S_B \cdot H}{2}$	ligeramente por exceso
neiloide $n=3$ $y^2 = p \cdot x^3$	$V = \frac{S_B \cdot H}{4}$	$\frac{S_B + 0}{2} \cdot l = \frac{S_B \cdot H}{2}$	por exceso

Comparación entre el volumen real y el volumen comercial.

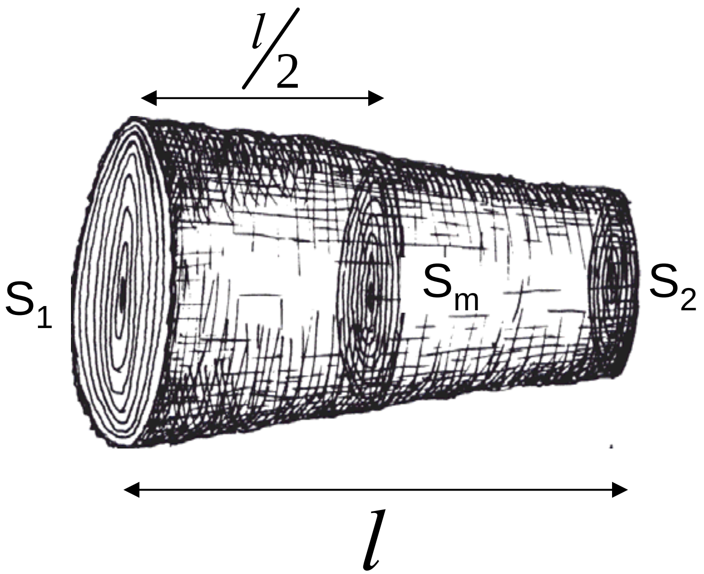
Conclusión:

Aplicadas a la totalidad de un tronco la fórmula de Huber, nos dará resultados exactos o por defecto y la fórmula de Smalian nos dará resultados exactos o por exceso.

Pero como la manera recomendada de aplicar estas fórmulas en la cubicación de fustes es a <u>trozas de corta longitud</u> los resultados serán muy precisos.

<u>Así podremos deducir que con Huber tendremos resultados exactos o ligeramente por defecto y con Smalian exactos o ligeramente por exceso</u>

Fórmula de Newton



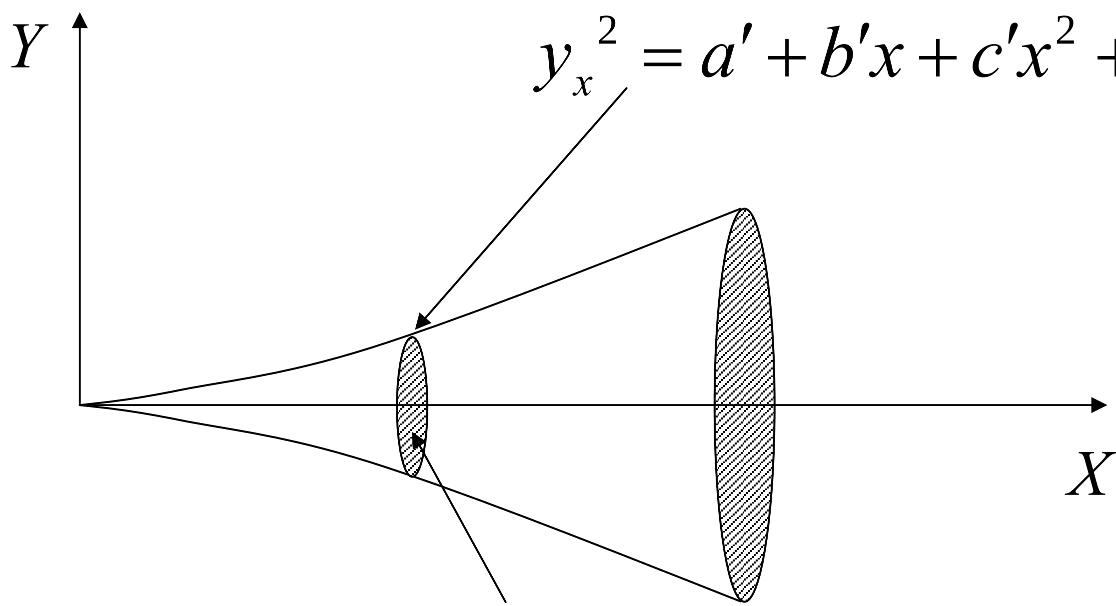
$$V = \frac{l}{6}\left[S_1 + S_2 + 4 \cdot S_m\right]$$

Es la fórmula más precisa, aunque con cualquiera de las señaladas, aplicadas a trozas de pequeña longitud (1 a 2 m.) , se obtiene gran precisión.

Precisión de la fórmula de Newton

$$V = \frac{l}{6}\left[S_1 + S_2 + 4 \cdot S_m\right]$$

Se puede demostrar que la fórmula de cubicación de Newton es aplicable con total exactitud, para todos aquellos sólidos de revolución engendrados por líneas de perfil de hasta tercer grado en su distancia al vértice



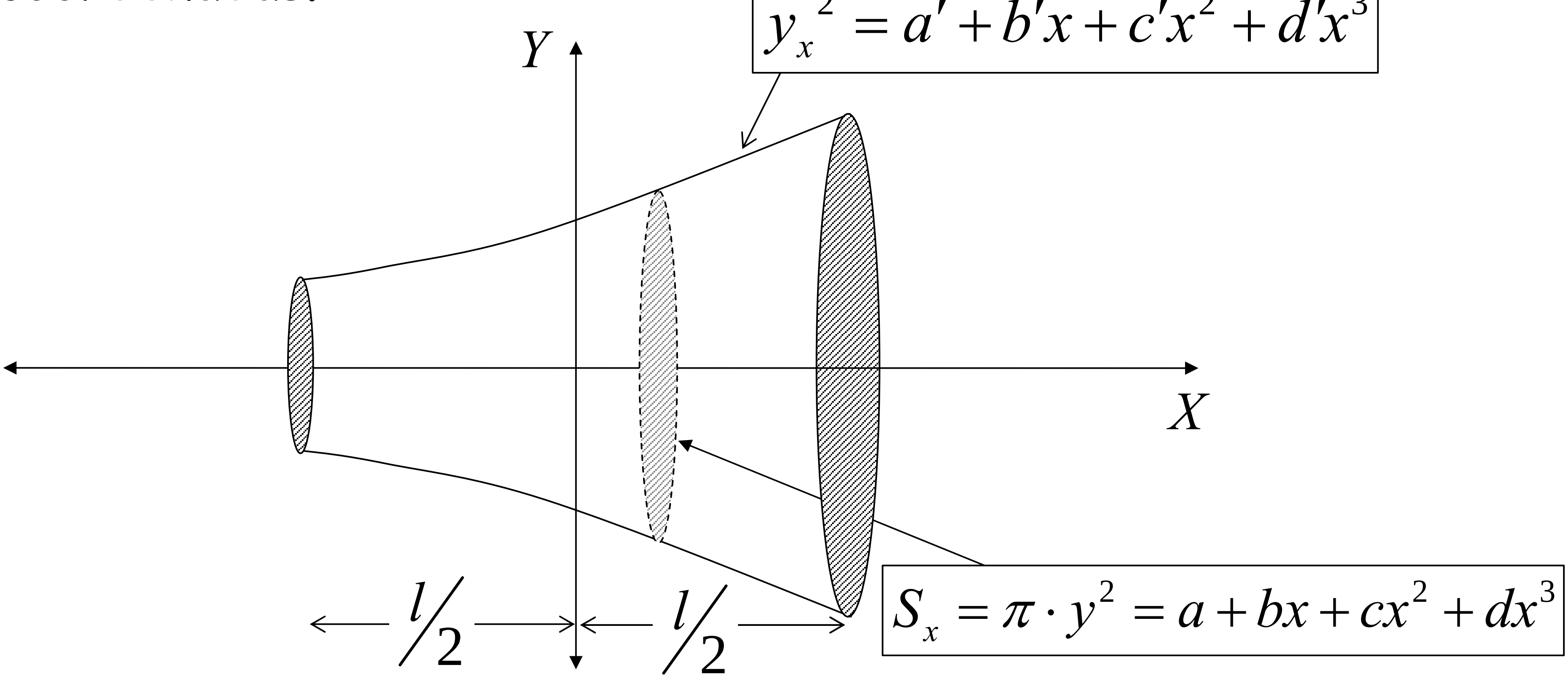
$${y_x}^2 = a' + b'x + c'x^2 + d'x^3$$

$$S_x = \pi \cdot y^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Precisión de la fórmula de Newton

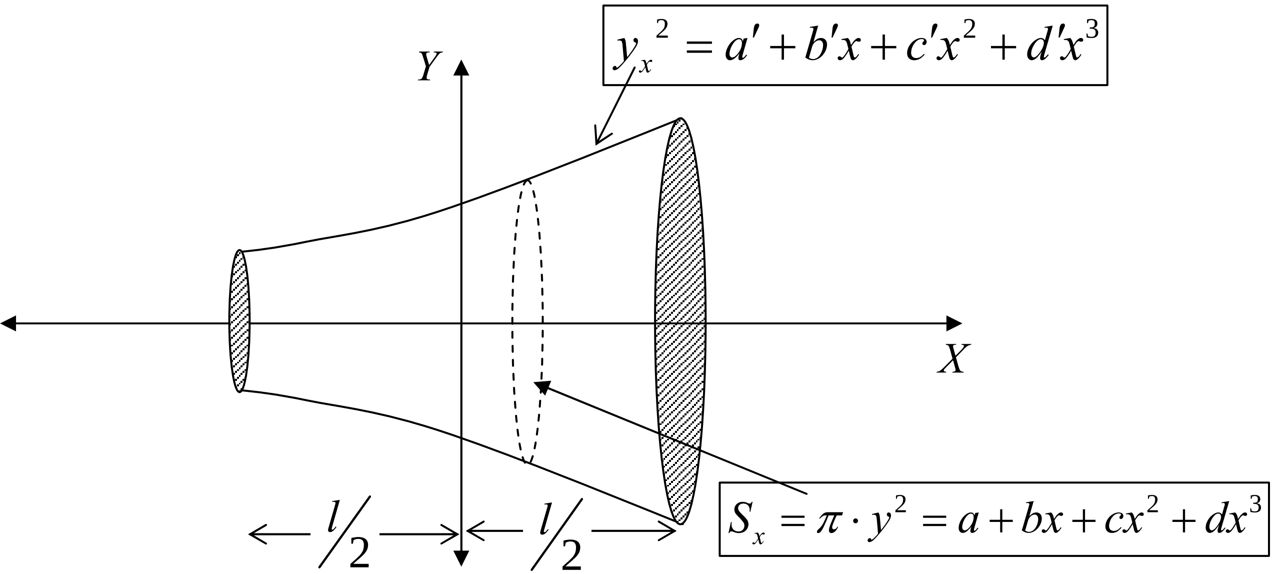
$$V = \frac{l}{6}\left[S_1 + S_2 + 4 \cdot S_m\right]$$

Para demostrar lo señalado, vamos a considerar un tronco de sólido de revolución de las características citadas, cuyo centro se encuentre referenciado en el origen del eje de coordenadas.



Precisión de la fórmula de Newton

$$V = \frac{l}{6}\left[S_1 + S_2 + 4 \cdot S_m\right]$$

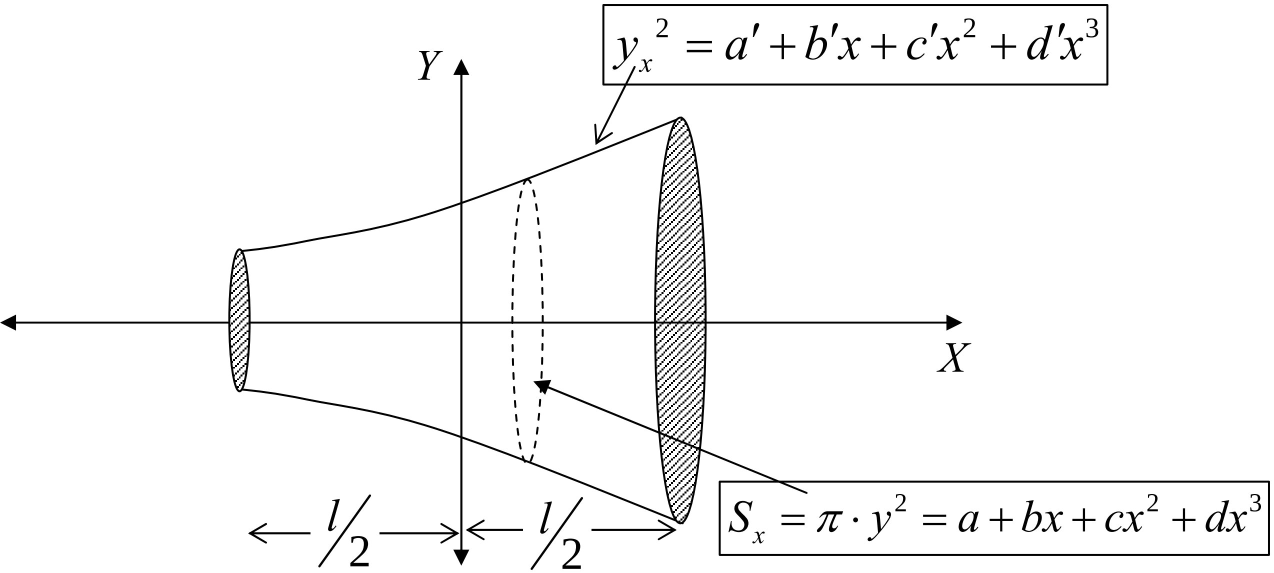


El volumen real de este sólido de revolución será:

$$V = \int_{-l/2}^{+l/2} S_x \cdot dx = \int_{-l/2}^{+l/2} (a + bx + cx^2 + dx^3)dx = \left[ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \frac{dx^4}{4}\right]_{-l/2}^{+l/2} =$$

Precisión de la fórmula de Newton

$$V=\frac{l}{6}\left[S_1+S_2+4\cdot S_m\right]$$

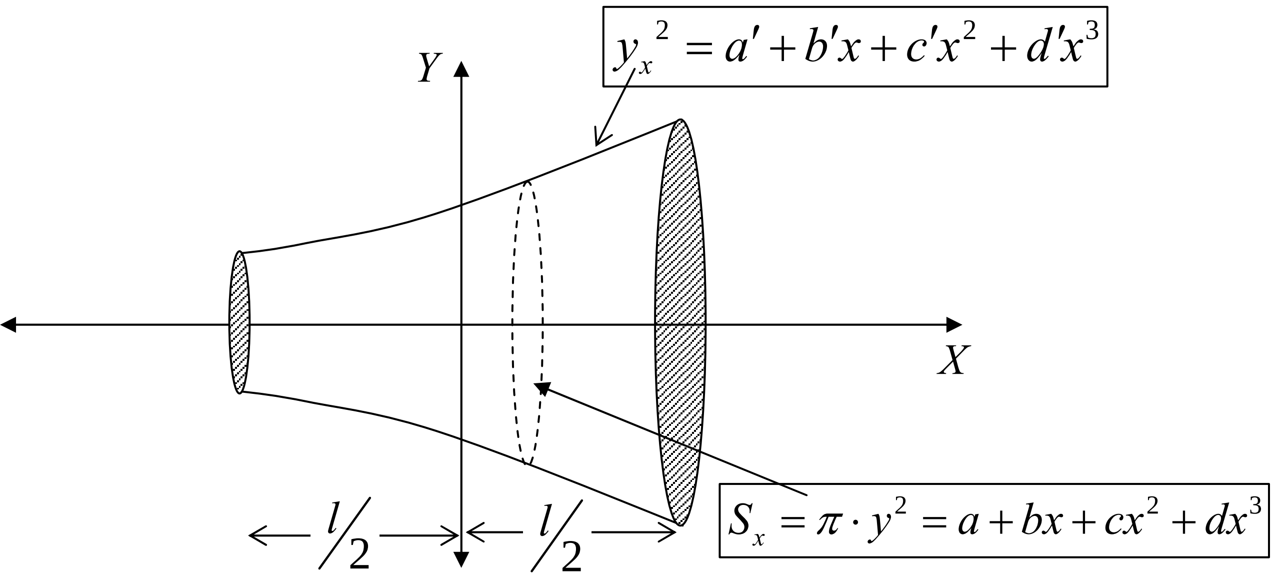


El volumen real de este sólido de revolución será:

$$V=\left[a\cdot\frac{l}{2}+\cancel{\frac{b}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2}+\frac{c}{3}\left(\frac{l}{2}\right)^3+\cancel{\frac{d}{4}\left(\frac{l}{2}\right)^4}\right]-\left[-a\cdot\left(\frac{l}{2}\right)+\cancel{\frac{b}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2}-\frac{c}{3}\left(\frac{l}{2}\right)^3+\cancel{\frac{d}{4}\left(\frac{l}{2}\right)^4}\right]=$$

Precisión de la fórmula de Newton

$$V = \frac{l}{6}\left[S_1 + S_2 + 4 \cdot S_m\right]$$



Así pues, el volumen real de un sólido de revolución definido por una función polinómica de hasta tercer grado será:

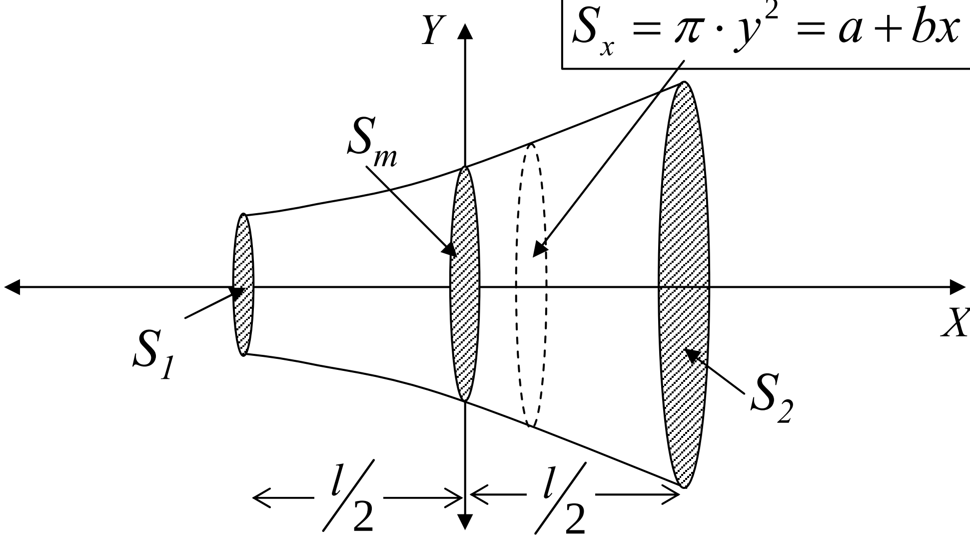
$$V = a \cdot l + \frac{2}{3} \cdot c \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3 = a \cdot l + \frac{c \cdot l^3}{12}$$

Precisión de la fórmula de Newton

$$V_{REAL} = a \cdot l + \frac{c \cdot l^3}{12}$$

Conocido el Volumen Geométrico real de este tipo de sólidos de revolución, veamos cual es el volumen que nos proporciona, de este mismo sólido, la fórmula de Newton.

$$S_x = \pi \cdot y^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$$



$$V_{NEWTON} = \frac{l}{6}\left[S_1 + S_2 + 4 \cdot S_m\right]$$

$$Para \text{ x=0} \Rightarrow S_m = a$$

$$Para\ x = -\frac{l}{2} \Rightarrow S_1 = a - b \cdot \frac{l}{2} + c \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 - d \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3$$

$$Para\ x = +\frac{l}{2} \Rightarrow S_2 = a + b \cdot \frac{l}{2} + c \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 + d \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3$$

Precisión de la fórmula de Newton

$$V_{REAL} = a \cdot l + \frac{c \cdot l^3}{12}$$

$$V_{NEWTON} = \frac{l}{6}\left[S_1 + S_2 + 4 \cdot S_m\right]$$

$$S_m = a$$

$$S_1 = a - b \cdot \frac{l}{2} + c \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 - d \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3$$

$$S_2 = a + b \cdot \frac{l}{2} + c \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 + d \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3$$

$$V_{NEWTON} = \frac{l}{6}\left[\left\{a \cancel{- b \cdot \frac{l}{2}} + c \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 \cancel{- d \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3}\right\} + \left\{a \cancel{+ b \cdot \frac{l}{2}} + c \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 \cancel{+ d \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3}\right\} + 4 \cdot a\right]$$

Precisión de la fórmula de Newton

$$V_{REAL} = a \cdot l + \frac{c \cdot l^3}{12}$$

$$V = \frac{l}{6}\left[S_1 + S_2 + 4 \cdot S_m\right]$$

$$V = \frac{l}{6}\left[\left\{a \cancel{- b \cdot \frac{l}{2}} + c \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 \cancel{- d \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3}\right\} + \left\{a \cancel{+ b \cdot \frac{l}{2}} + c \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 \cancel{+ d \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3}\right\} + 4 \cdot a\right]$$

$$V = \frac{l}{6}\left[\left\{a + c \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2\right\} + \left\{a + c \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2\right\} + 4 \cdot a\right]$$

$$V = \frac{l}{6}\left[2 \cdot c \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 + 6 \cdot a\right] = \frac{l}{6} \cdot 2 \cdot c \cdot \frac{l^2}{4} + \frac{6 \cdot a \cdot l}{6} = \frac{c \cdot l^3}{12} + a \cdot l$$

$$V_{NEWTON} \ \frac{c \cdot l^3}{12} + a \cdot l$$

La fórmula de Newton es muy precisa

POLITÉCNICA

La fórmula de Newton es muy precisa

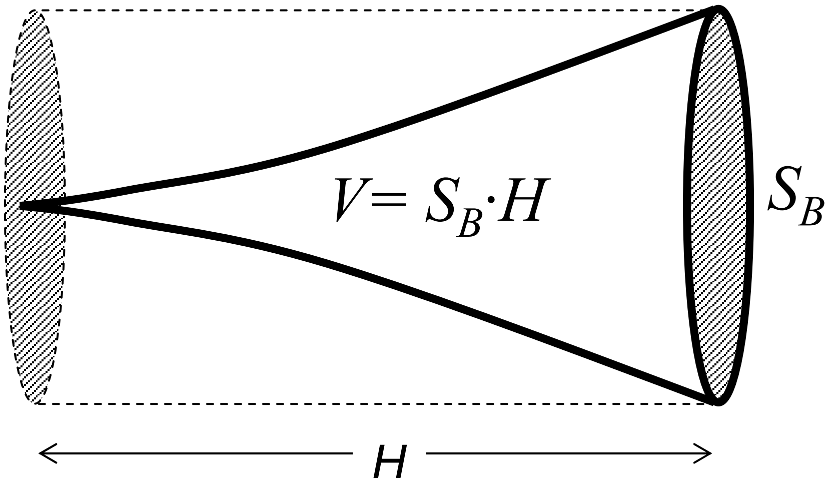
Si comparamos los resultados obtenidos con la fórmula de Newton con los obtenidos con las de Huber o Smalian, (no lo hacemos), veríamos que cuanto menor sea la longitud de la troza se aproximan más los resultados obtenidos.

<u>Esto, que se puede demostrar matematicamente es algo fácil de intuir, cuanto menor sea la longitud de la troza, a la que se aplican las fórmulas estudiadas mayor es la precisión obtenida en la estimación del volumen medido.</u>

A menor longitud de troza mayor precisión

En el caso más desfavorable, si aplicamos la fórmula del cilindro a la cubicación de un neiloide, vemos claramente que cuanto menor sean las longitudes de las trozas a las que la apliquemos, mayor será la precisión obtenida

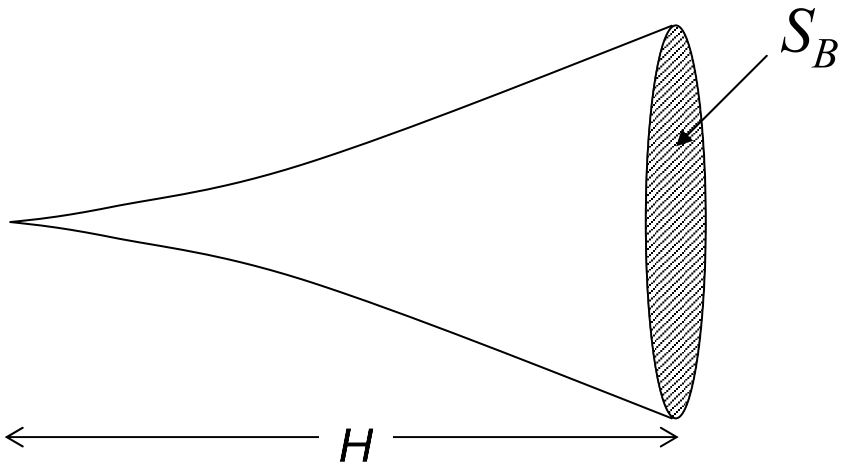
Si la aplicamos sin dividir en trozas el neiloide de dimensiones H y S_B.

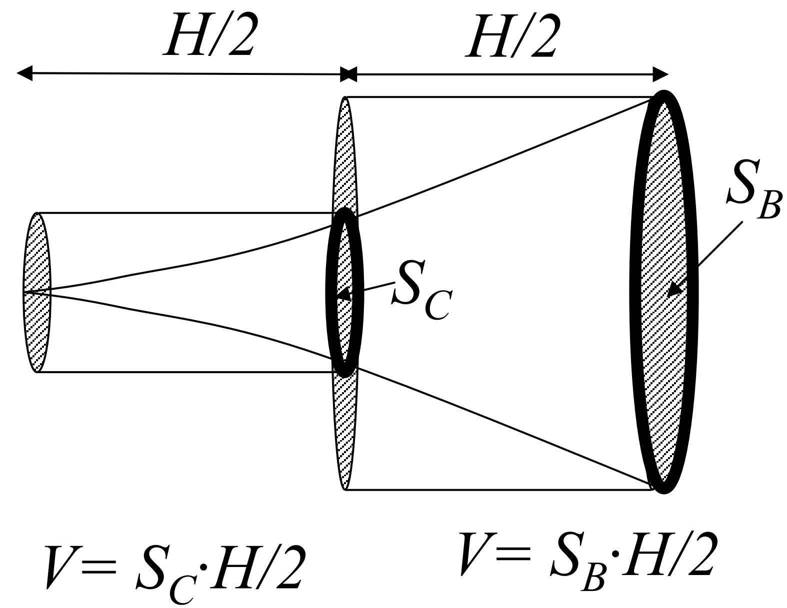


Obtendremos un volumen claramente por exceso.

A menor longitud de troza mayor precisión

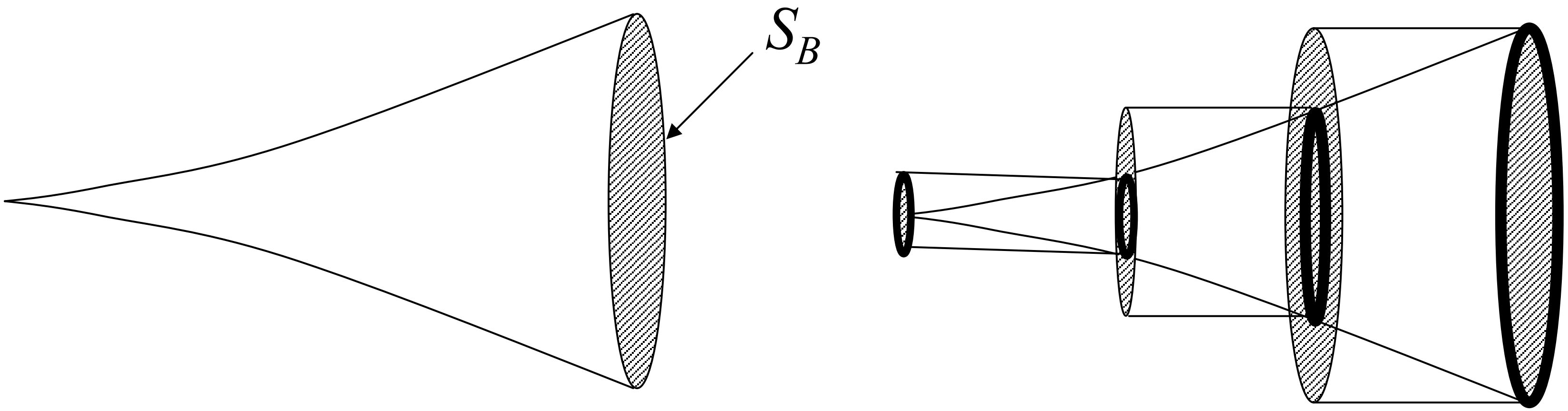
Si lo divido en dos trozas, el volumen obtenido se aproxima más al real.





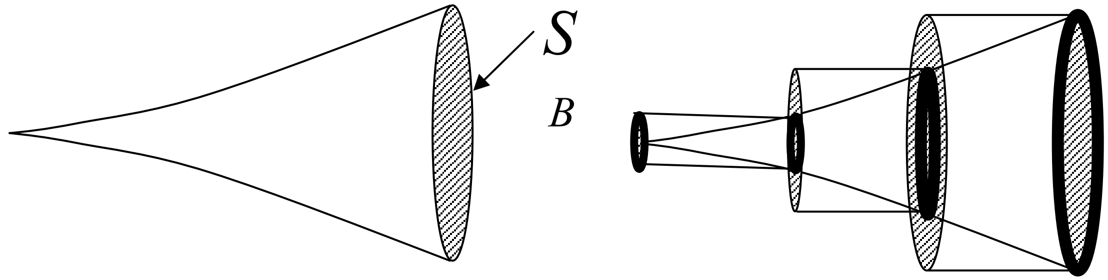
A menor longitud de troza mayor precisión

Si lo divido en tres trozas, el volumen obtenido se aproxima más al real y así sucesivamente.



En el límite de las posibles divisiones, obtendríamos el volumen real por integración de cilindros infinitesimales, del sólido de revolución.

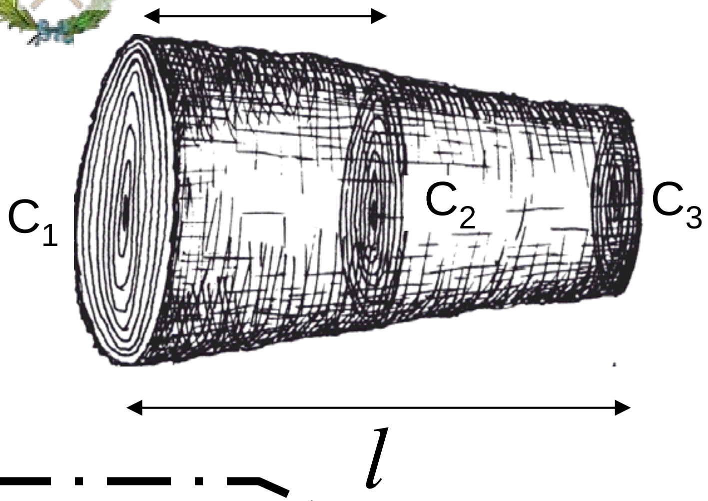
A menor longitud de troza mayor precisión



Lo anteriormente señalado junto con la experimentación, sobre troncos reales. Nos lleva a concluir que las fórmulas de cubicación de Huber y Smalian (Cubicación comercial), nos dan resultados practicamente exactos cuando las aplicamos a trozas de pequeña longitud. Y siempre su precisión aumenta según disminuye la longitud de la troza a la que las aplicamos.

En la práctica trozas de uno o dos metros de longitud, garantizan la precisión adecuada para la cubicación de troncos de árboles mediante las fórmulas de Huber o Smalian (cubicación comercial) que son las más utilizadas.

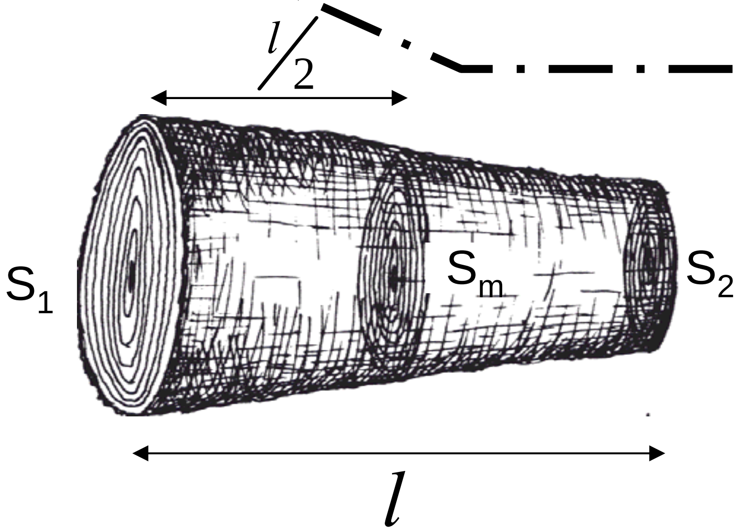
Fórmula de Duhamel



$$C_m = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{3}$$

$$V_{troza} = \frac{C_m^{\;2}}{4 \cdot \pi} \cdot l$$

Citamos dos fórmulas más de las múltiples existentes para la cubicación de fustes en trozas.



Fórmula del tronco de cono

$$V_{troza} = \frac{l}{3} \cdot \left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right) = \frac{\pi}{12} \cdot l \cdot \left(d_1^{\;2} + d_2^{\;2} + d_1 \cdot d_2\right)$$

Comentarios a las fórmulas vistas

Partiendo de la idea de que cualquiera de las fórmulas señaladas da suficiente precisión, se puede concluir que <u>a igualdad de longitud de troza la fórmula más precisa es la de Newton</u>, con el inconveniente de tener que realizar tres mediciones de diámetro por troza.

De las fórmulas de cubicación habitualmente más empleadas Huber, Smalian y la del "tronco de cono" (Rondeux, J. – 1993), hace las siguientes consideraciones en cuanto a su precisión.

Longitud de troza	+	precisión	-
1,2,3 o 6 metros	Huber	Tronco de cono	Smalian
Totalidad fuste	Tronco de cono	Huber	Smalian

Método gráfico, de Meyer, o del planímetro

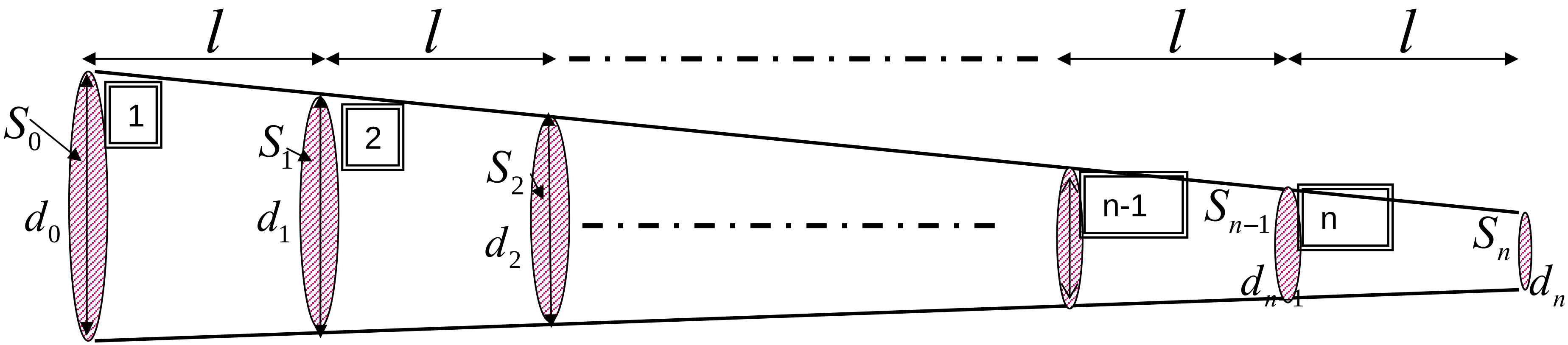
Basado en la representación gráfica en un sistema de coordenadas, de las distintas secciones circulares de las trozas del tronco o fuste del árbol a cubicar, a lo largo de toda su longitud, desde la base hasta su ápice o d.p.d.

La superficie delimitada por la función representada y los ejes de coordenadas será equivalente a su volumen.

Buscando la relación de equivalencia correspondiente y aplicándosela a la superficie señalada tras medirla, tendremos el volumen del árbol de referencia.

Este procedimiento se ha conocido con el nombre del planímetro, porque ha sido el instrumento utilizado habitualmente para estimar la superficie comprendida entre los ejes de coordenadas y la línea de perfil de la evolución de la sección.

Sea el fuste de un árbol, el cual dividimos en trozas de l m. de longitud.

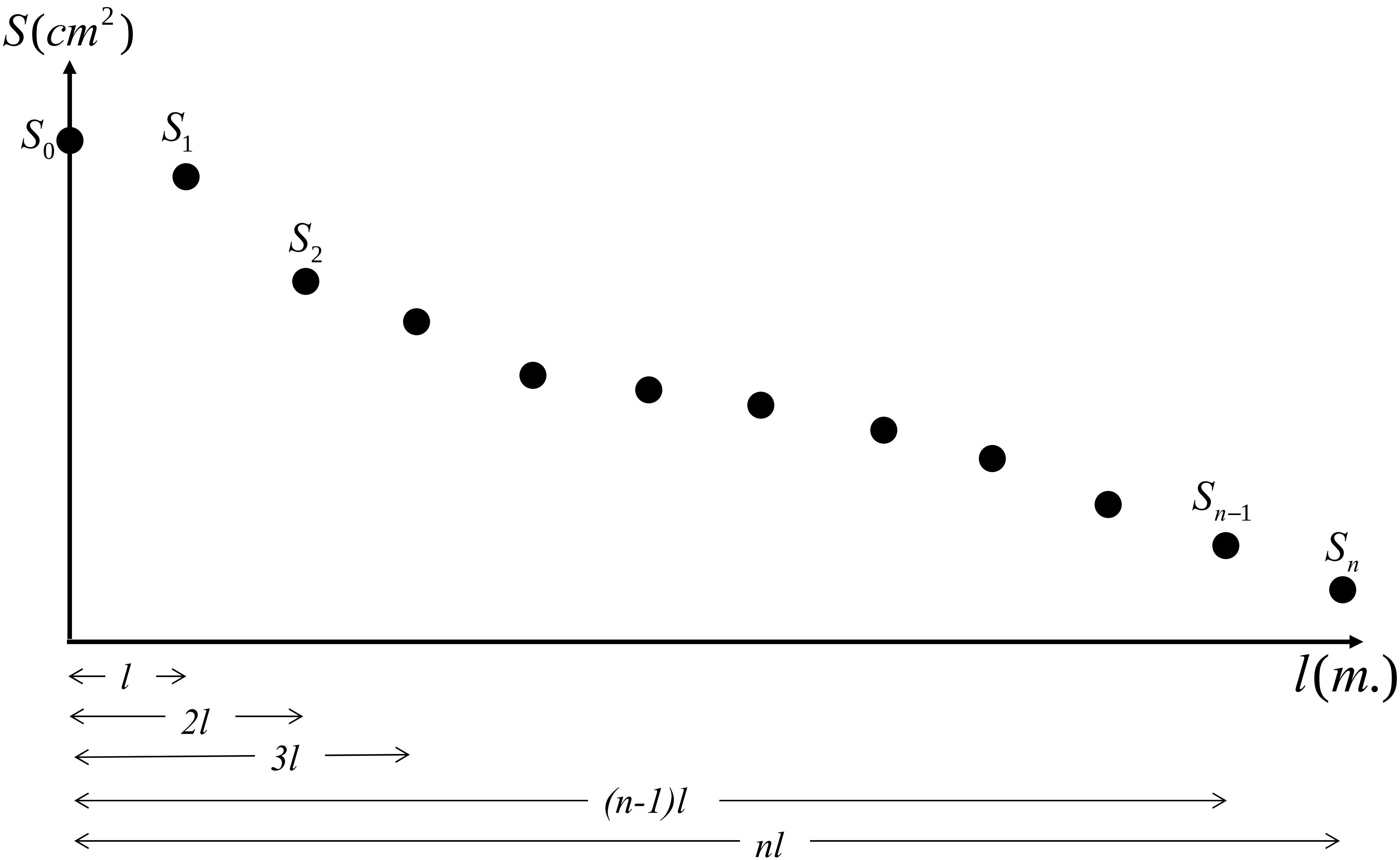


$$S_0 = \frac{\pi}{4} \cdot d_0^{\,2} \quad S_1 = \frac{\pi}{4} \cdot d_1^{\,2} \quad S_2 = \frac{\pi}{4} \cdot d_2^{\,2} \quad \text{-----------} \quad S_{n-1} = \frac{\pi}{4} \cdot d_{n-1}^{\,2} \quad S_n = \frac{\pi}{4} \cdot d_n^{\,2}$$

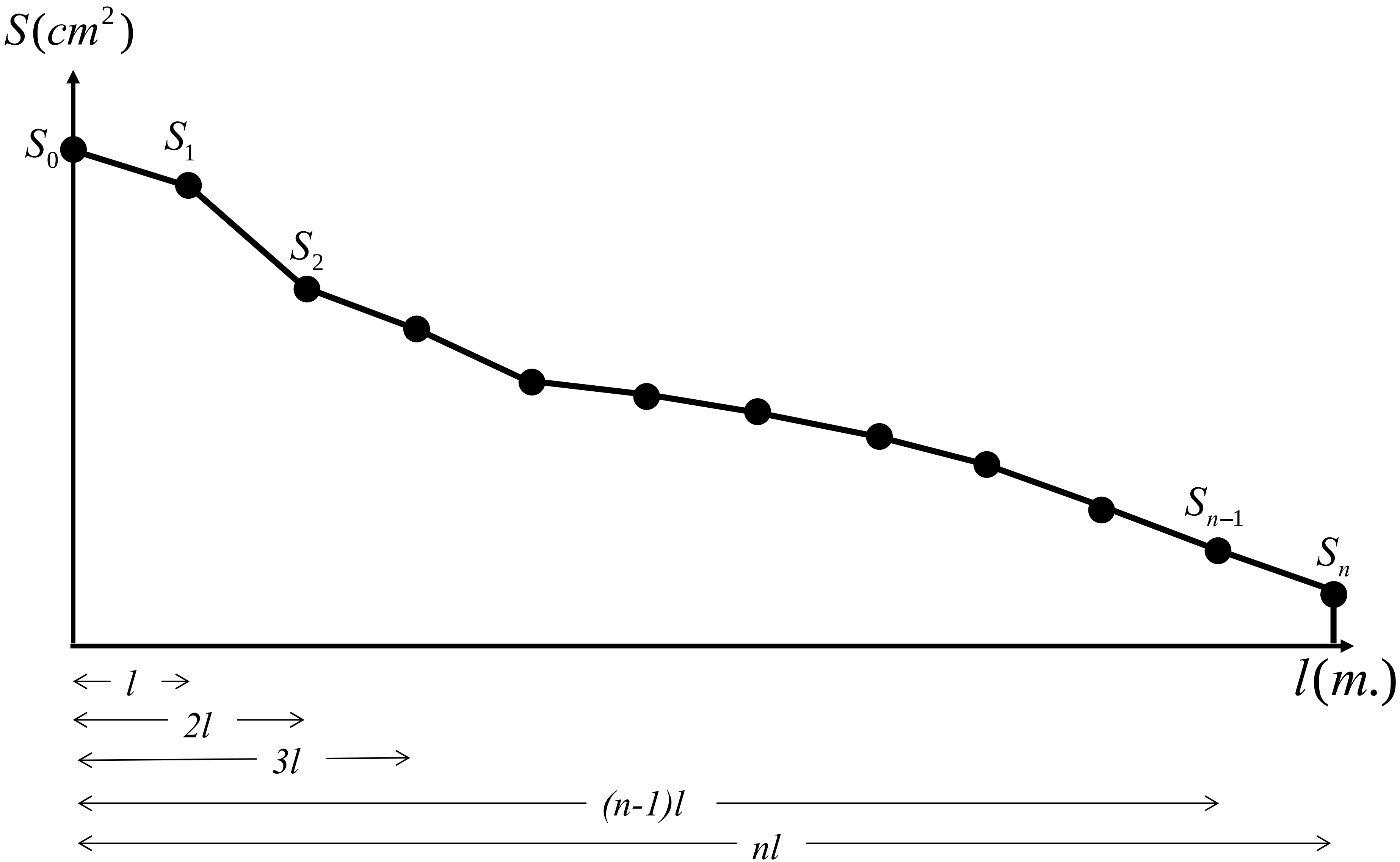
Conocidas las distintas secciones de las trozas resultantes, y la altura a la que se encuentran:

Representamos en el eje de ordenadas, (a la escala que deseemos), las magnitudes de las <u>secciones en cm²</u> ,y

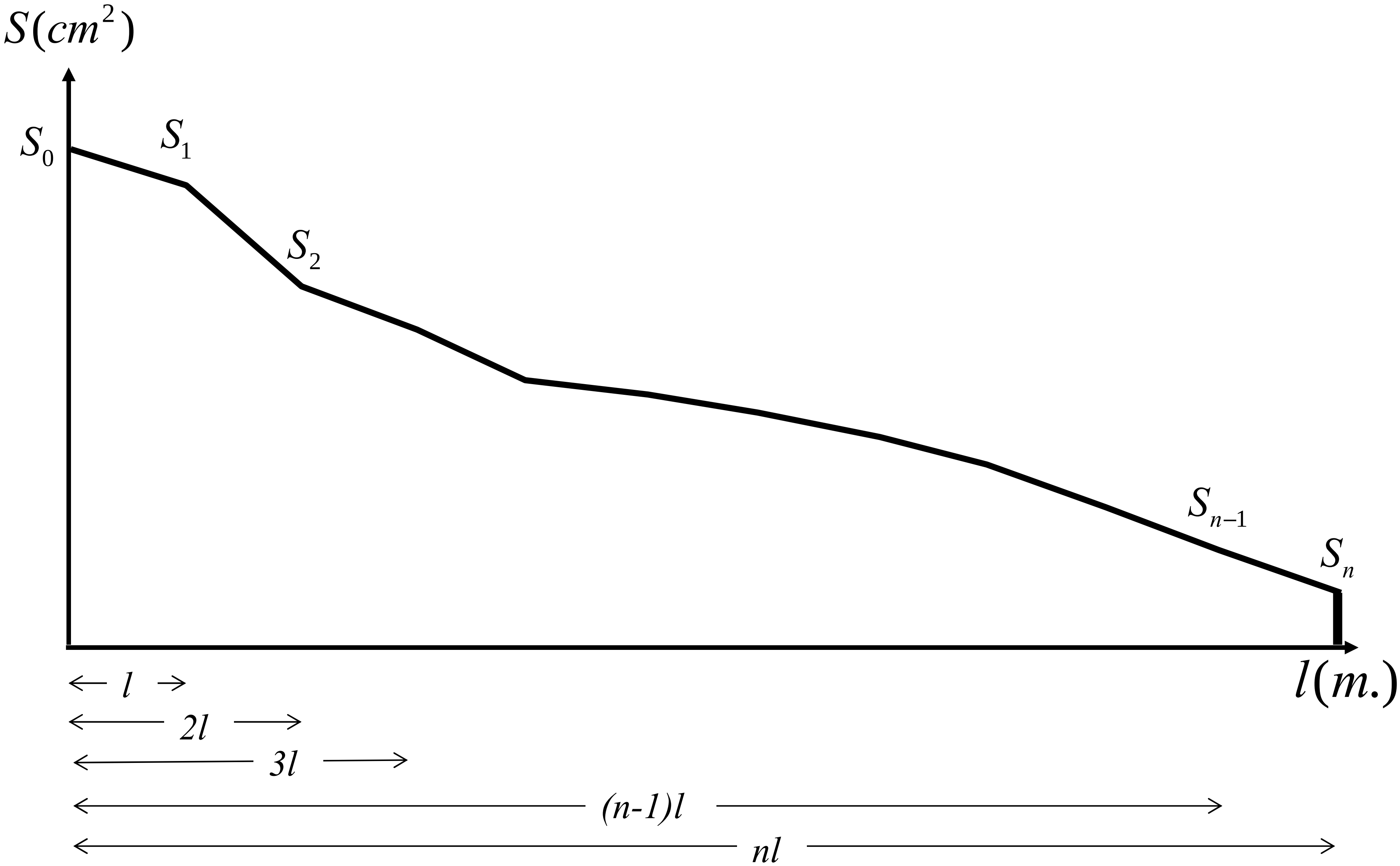
Representaremos en el eje de abcisas, (a la escala que deseemos), las magnitudes de las <u>alturas </u>de la base a la que se encuentran las distintas secciones <u>en m.</u>

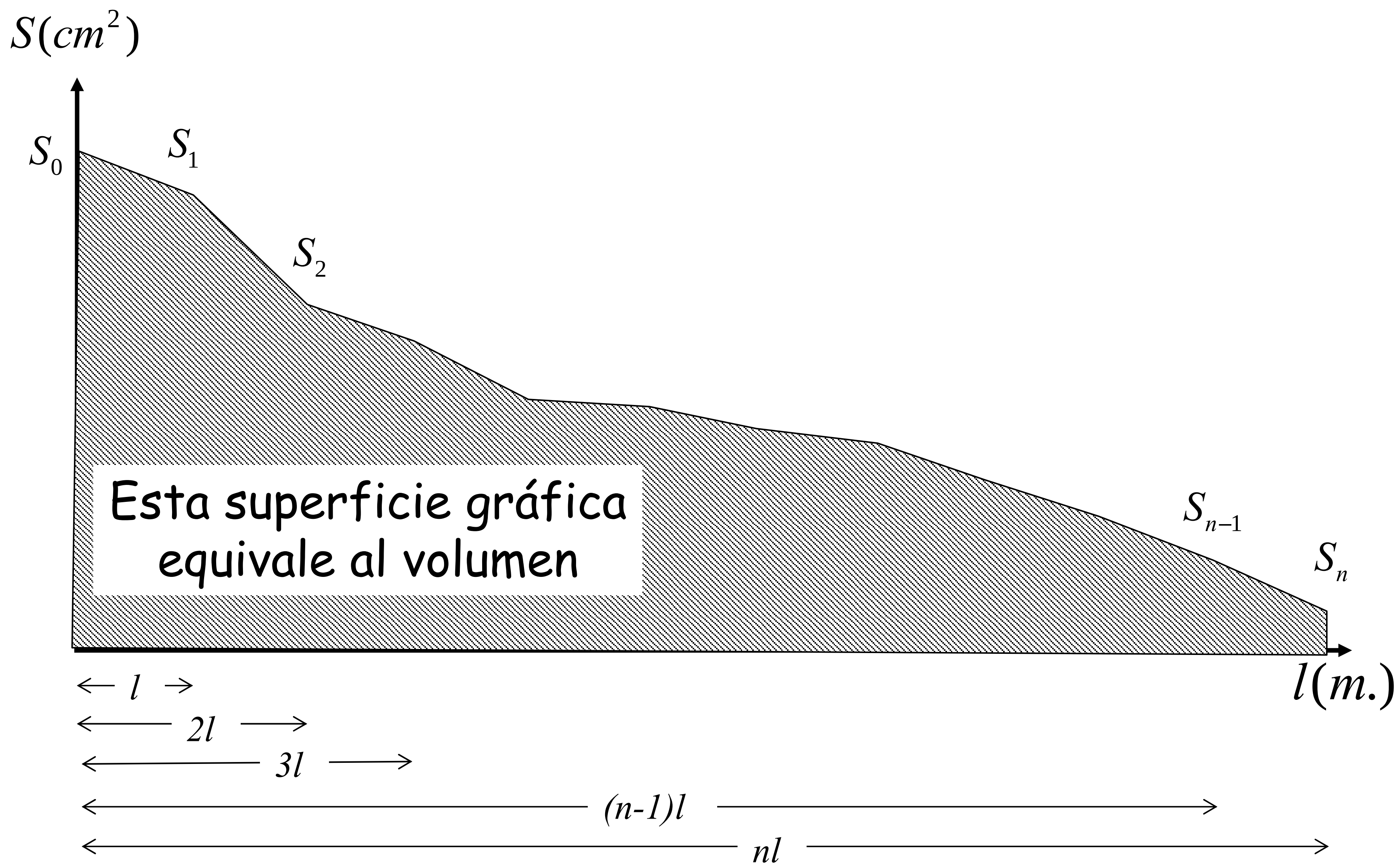


$S(cm^2)$
S_0
S_1
S_2
S_{n-1}
S_n
$l(m.)$
l
$2l$
$3l$
$(n-1)l$
nl

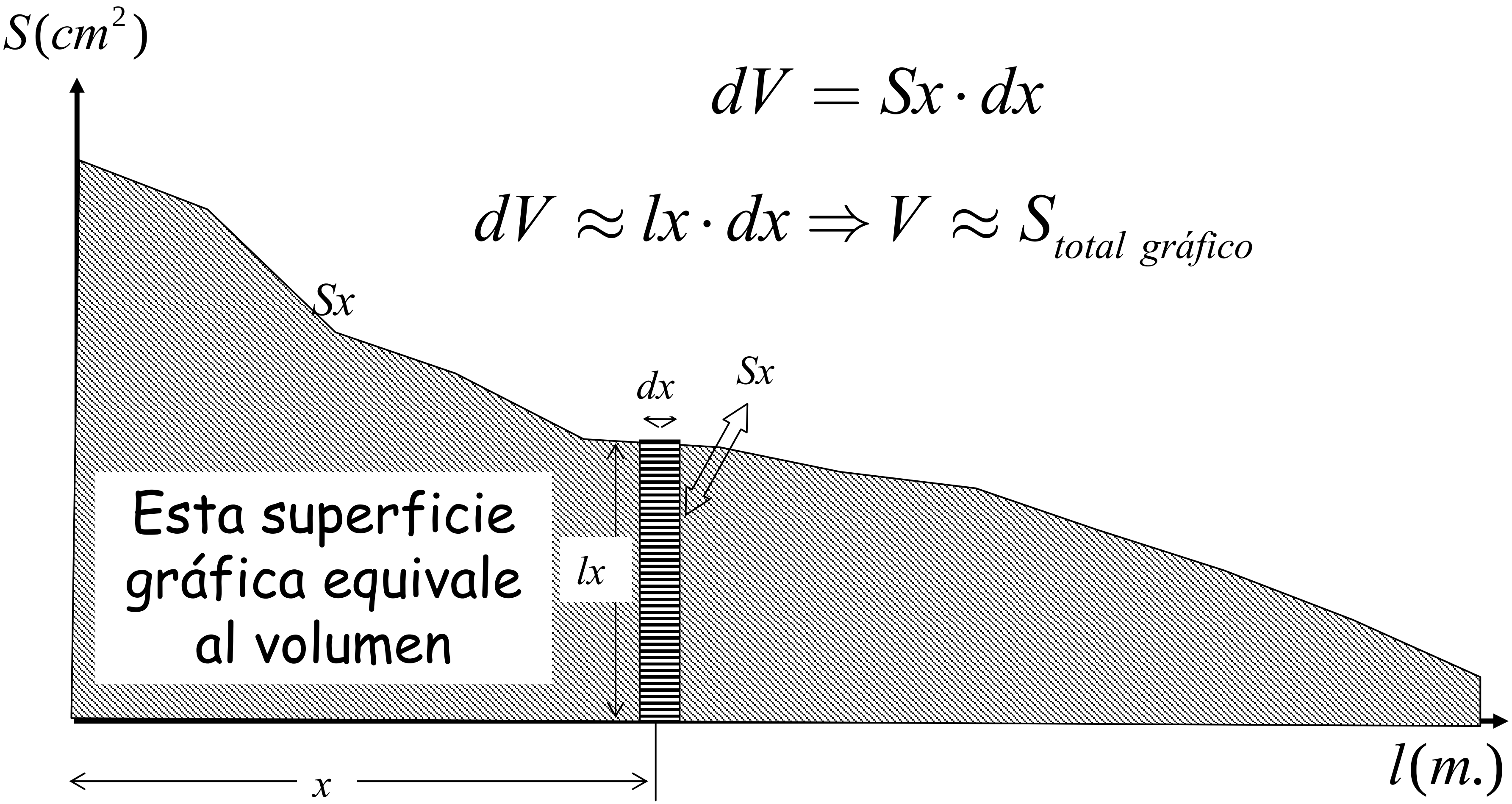


$S(cm^2)$
S_0
S_1
S_2
S_{n-1}
S_n
$l(m.)$
l
$2l$
$3l$
$(n\text{-}1)l$
nl


$S(cm^2)$
S_0
S_1
S_2
S_{n-1}
S_n
$l(m.)$
l
2l
3l
(n-1)l
nl



$S(cm^2)$
S_0
S_1
S_2
S_{n-1}
S_n
Esta superficie gráfica equivale al volumen
$l(m.)$
l
$2l$
$3l$
$(n\text{-}1)l$
nl

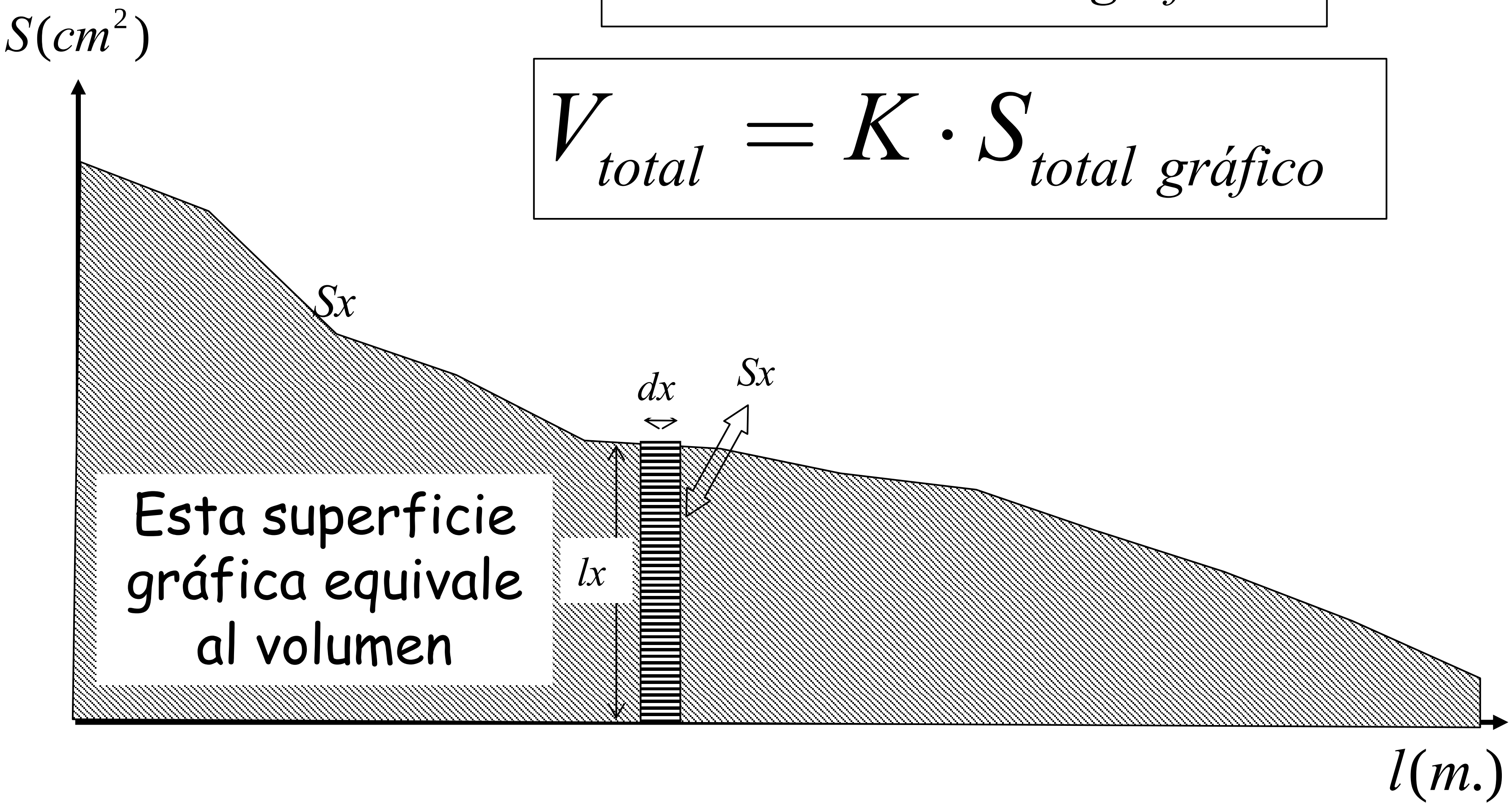


$$dV = Sx \cdot dx$$

$$dV \approx lx \cdot dx \Rightarrow V \approx S_{total\ gráfico}$$

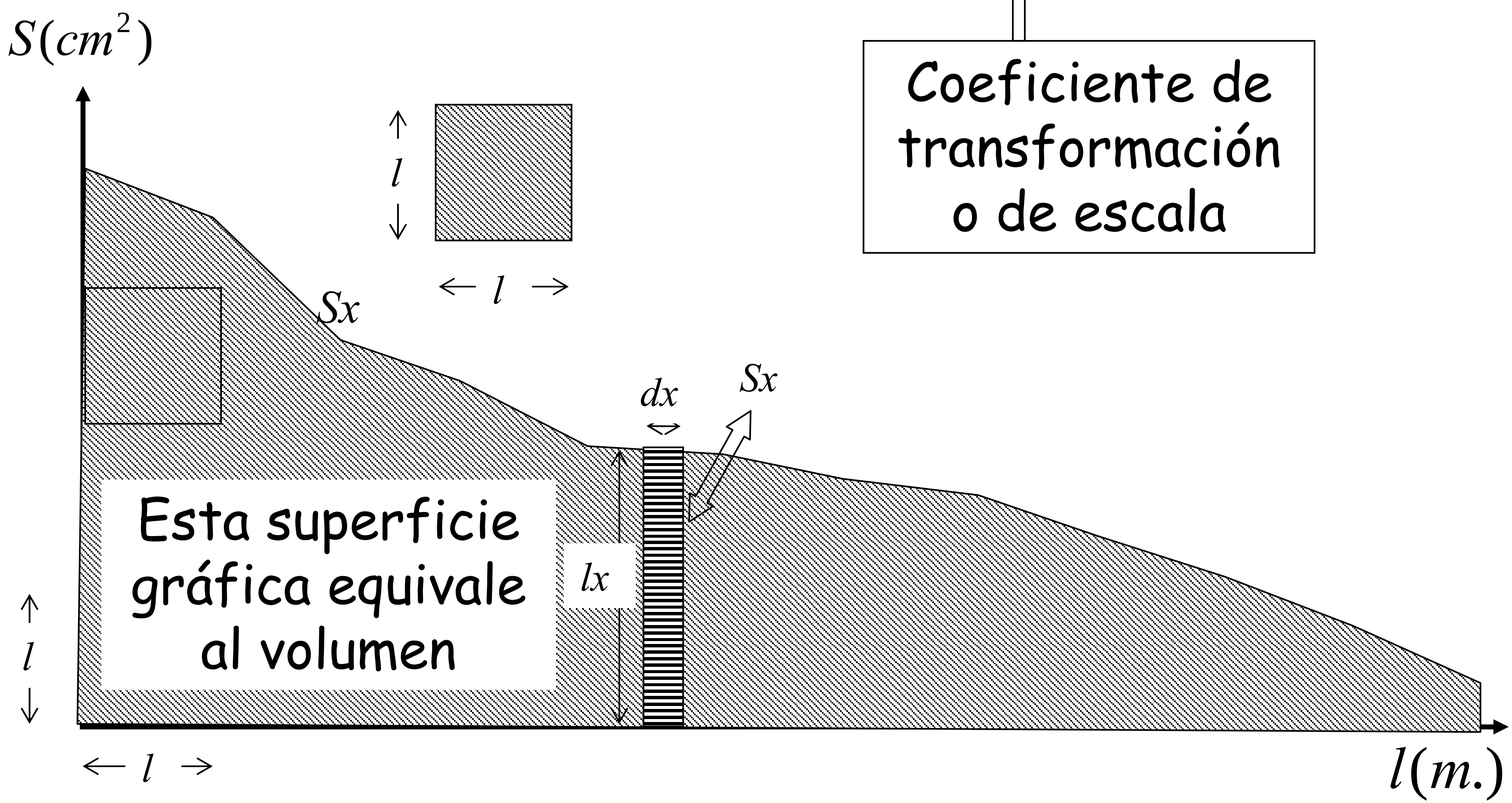
$$V_{total} \approx S_{total\ gráfico}$$

$$V_{total} = K \cdot S_{total\ gráfico}$$

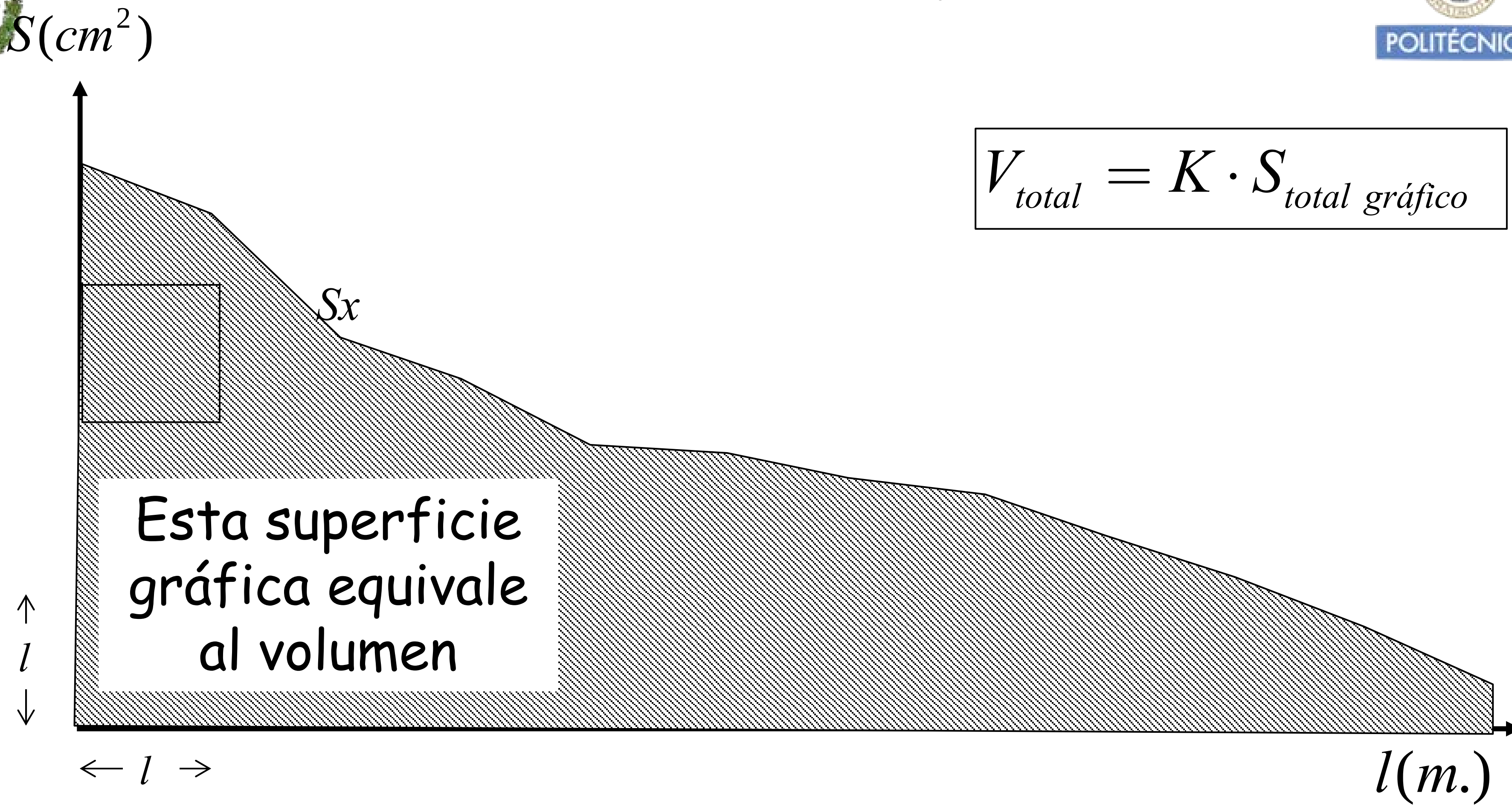


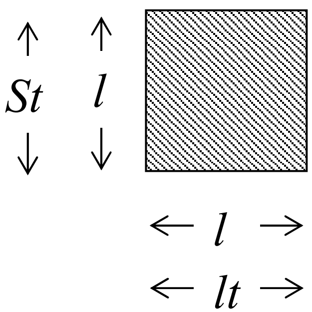
$$V_{total} = K \cdot S_{total\ gráfico}$$

Coeficiente de transformación o de escala



$$V_{total} = K \cdot S_{total\ gráfico}$$

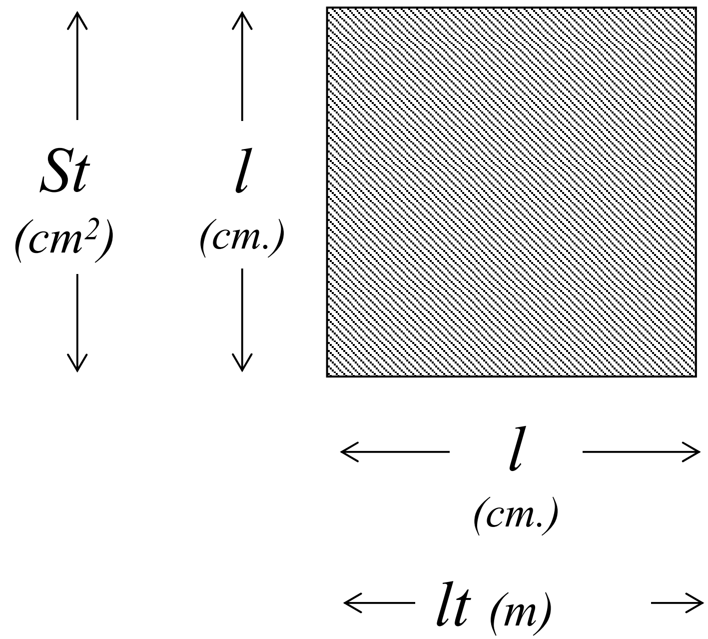




l= longitud en cm. en que hemos representado sección de troza *St* en cm²

l= longitud en cm. en que hemos representado longitud de troza *lt* en m

$$V_{total} = K \cdot S_{total\ gráfico}$$



l = longitud en cm. en que hemos representado sección de troza St en cm²

l= longitud en cm. en que hemos representado longitud de troza lt en m.

$$S_t(cm^2) \cdot l_t(m.) = K \cdot l(cm.) \cdot l(cm.)$$

$$K = \frac{V_t(dm^3)}{S_{gráfico}(cm^2)}$$

$$\boxed{V_{total\ \ tronco} = K \cdot S_{total\ \ bajo\ perfil\ gráfico}}$$

POLITÉCNICA

Ejercicio a realizar en clase con papel milimetrado.

Determinar por el método gráfico de Meyer o del planímetro, el volumen de un fuste de 9 m. de longitud, donde los diámetros de las secciones en la base y a 3,6 y 9 m de la misma son respectivamente:

$$d_o = 33{,}85\ cm. \quad ; \quad d_3 = 25{,}23\ cm. \quad ; \quad d_6 = 15{,}95\ cm. \quad ; \quad d_9 = 7{,}98\ cm.$$

Las dimensiones del fuste con corteza del tronco de un árbol de 27 m. de altura dividido en trozas de dos metros son las siguientes:

l *(m.)*	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
d *(cm.)*	38,5	33,1	29,4	27,4	25,6	23,9	22,4	21,2	19,7	17,8	15,9	13	10

Vamos a determinar su volumen con corteza, considerando trozas de 4 m. de longitud, por el método de Meyer.

Habitualmente se utiliza papel milimetrado, también hoy sencillos programas informáticos.

$$S_0 = \frac{\pi}{4}(38{,}5)^2 = 1.164\ cm^2 \qquad S_{12} = 394{,}1\ cm^2 \qquad S_{24} = 78{,}54\ cm^2$$

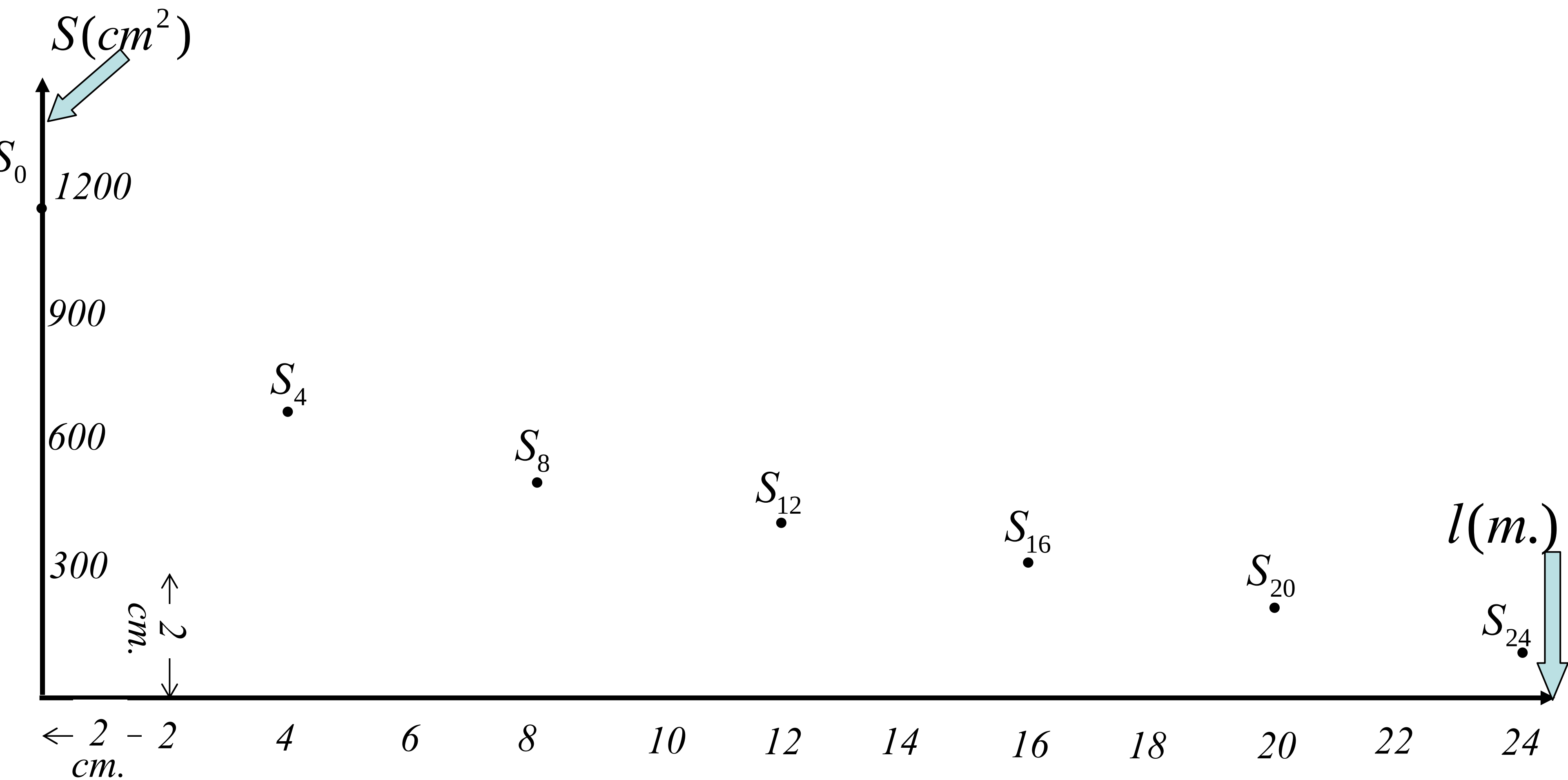
$$S_4 = \frac{\pi}{4}(29{,}4)^2 = 678{,}86\ cm^2 \qquad S_{16} = 304{,}1\ cm^2$$

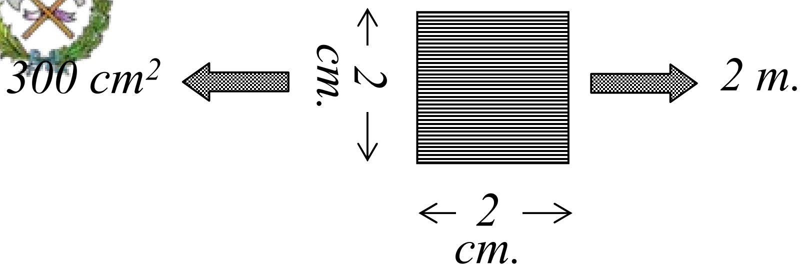
$$S_8 = 514{,}7\ cm^2 \qquad S_{20} = 198{,}56\ cm^2$$

$$S_0 = \frac{\pi}{4}(38,5)^2 = 1.164\ cm^2 \qquad S_{12} = 394,1\ cm^2 \qquad S_{24} = 78,54\ cm^2$$

$$S_4 = \frac{\pi}{4}(29,4)^2 = 678,86\ cm^2 \qquad S_{16} = 304,1\ cm^2$$

$$S_8 = 514,7\ cm^2 \qquad S_{20} = 198,56\ cm^2$$

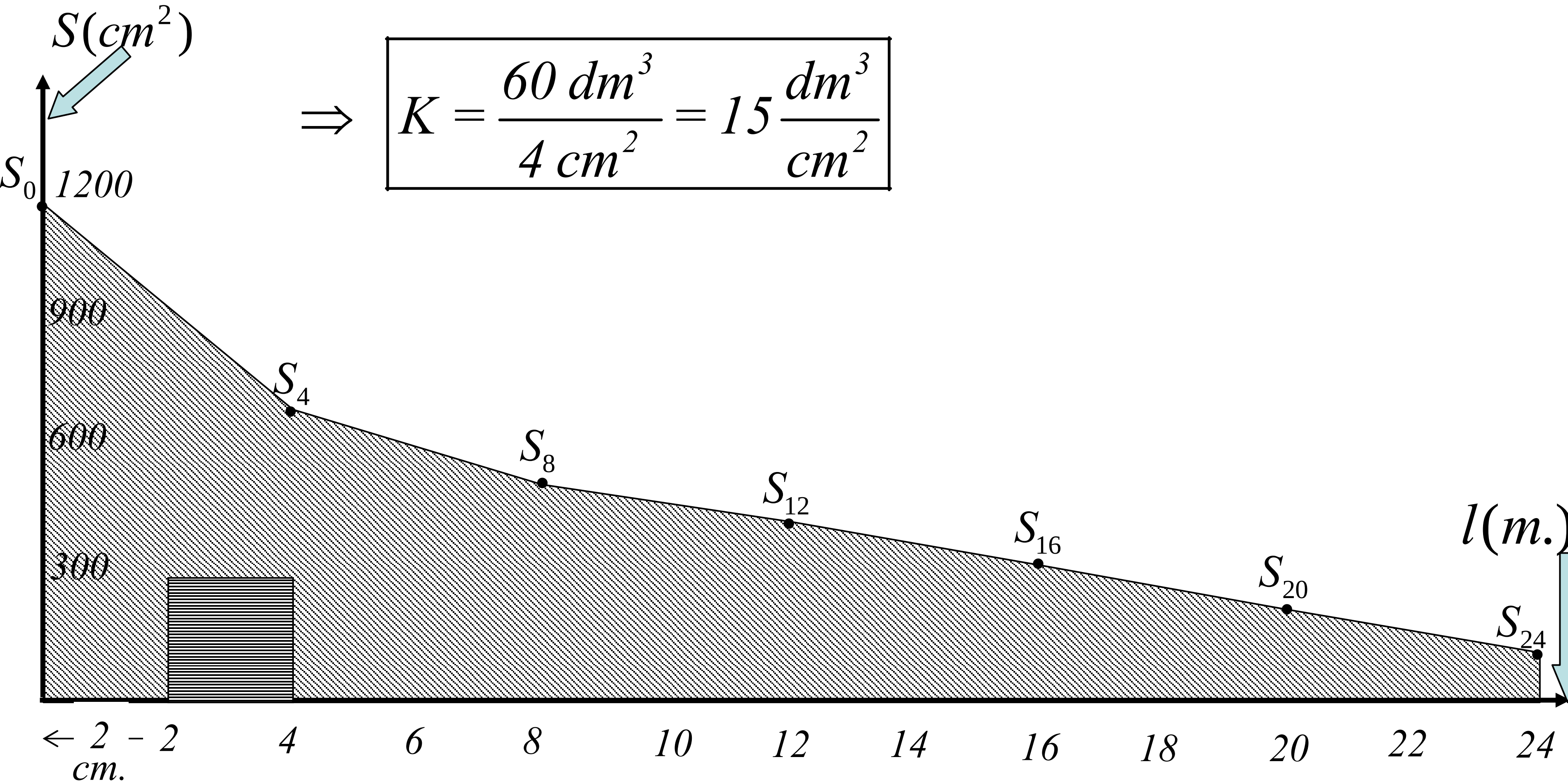




$$\boxed{V_{total} = K \cdot S_{total\ gráfico}}$$

$$K \cdot 4\ cm^2 = 300\ cm^2 \cdot 200\ cm = 60000\ cm^3 = 60\ dm^3$$

$$\Rightarrow \boxed{K = \frac{60\ dm^3}{4\ cm^2} = 15\,\frac{dm^3}{cm^2}}$$



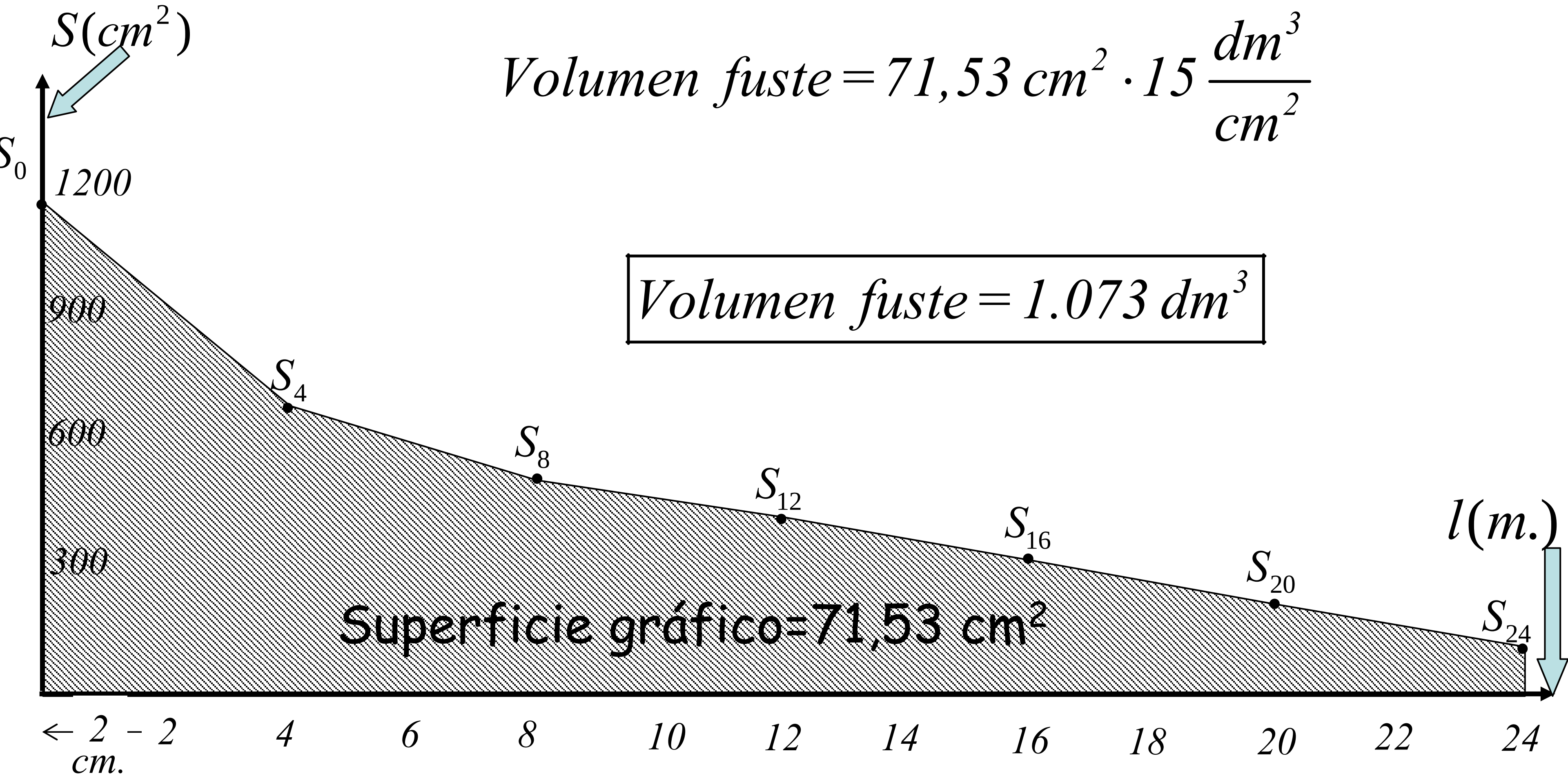
POLITÉCNICA

$$K = 15\,\frac{dm^3}{cm^2}$$

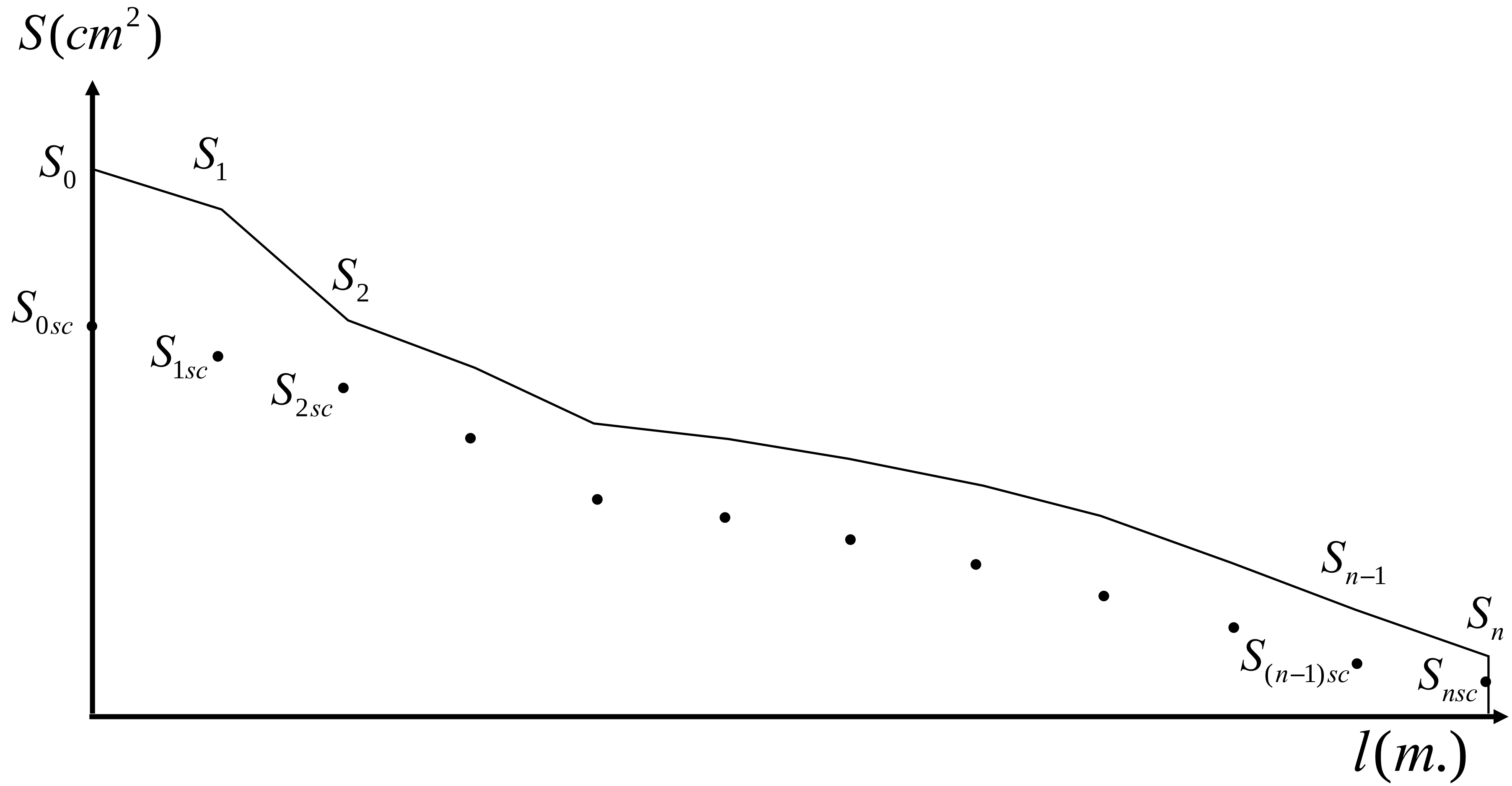
$$V_{total} = K \cdot S_{total\ gráfico}$$

$$Volumen\ \ fuste = 71{,}53\ cm^2 \cdot 15\,\frac{dm^3}{cm^2}$$

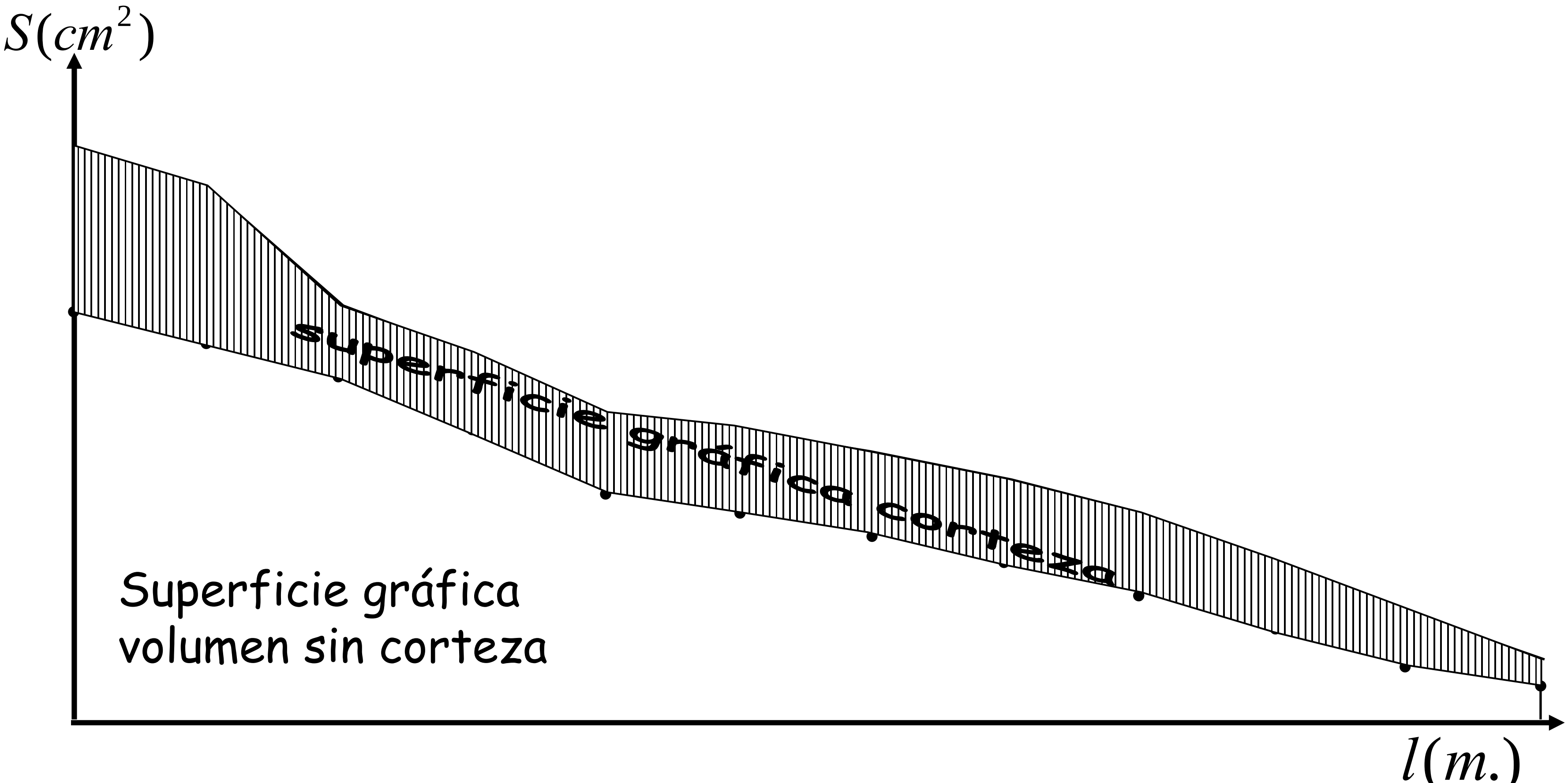
$$Volumen\ \ fuste = 1.073\ dm^3$$



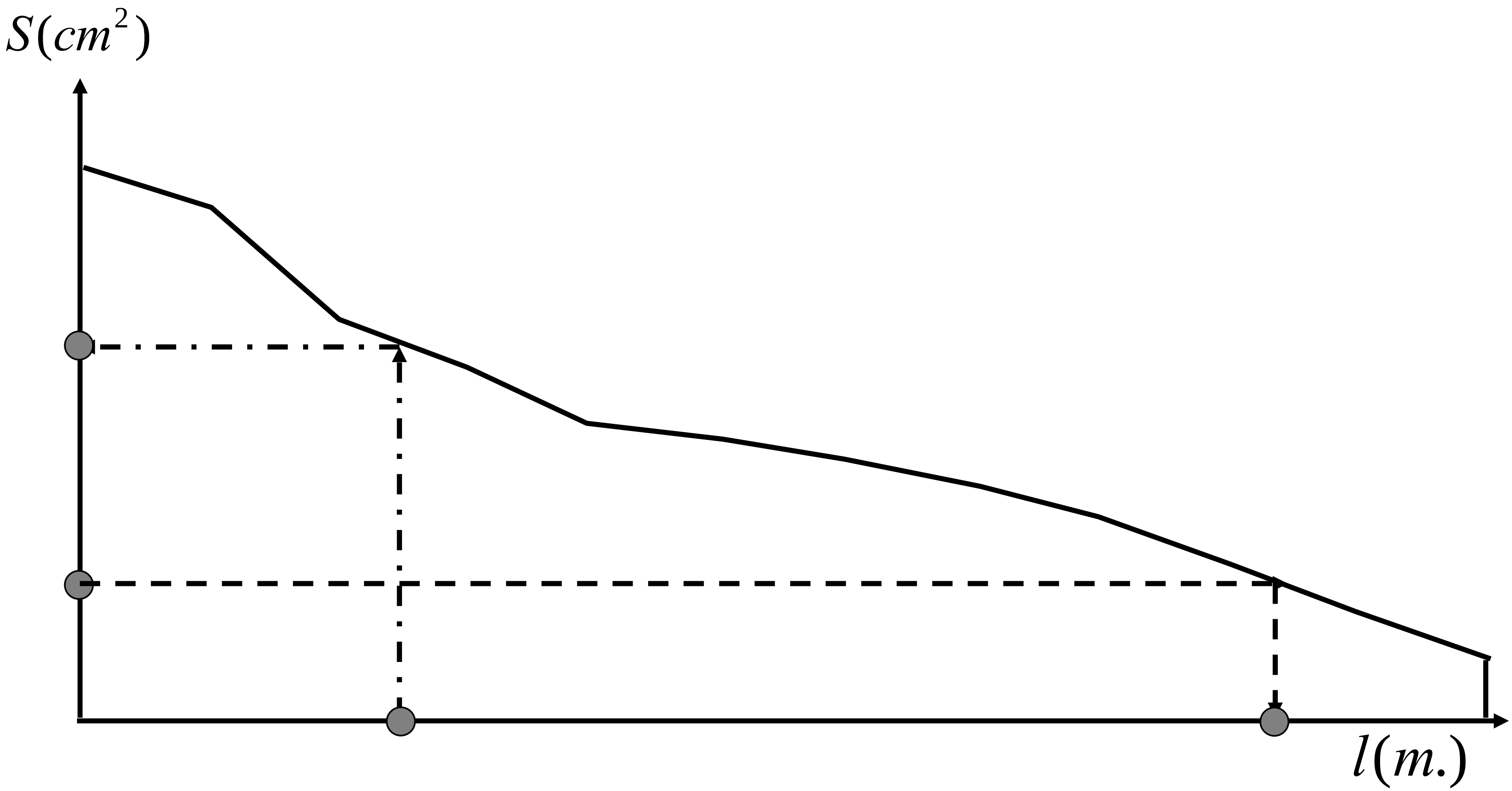
El gráfico de Meyer, tiene otras utilidades, como la de poder obtener directamente el volumen de corteza o el el volumen sin corteza, representando tambien las secciones sin corteza



El gráfico de Meyer, tiene otras utilidades, como la de poder obtener directamente el volumen de corteza o el el volumen sin corteza, representando tambien las secciones sin corteza



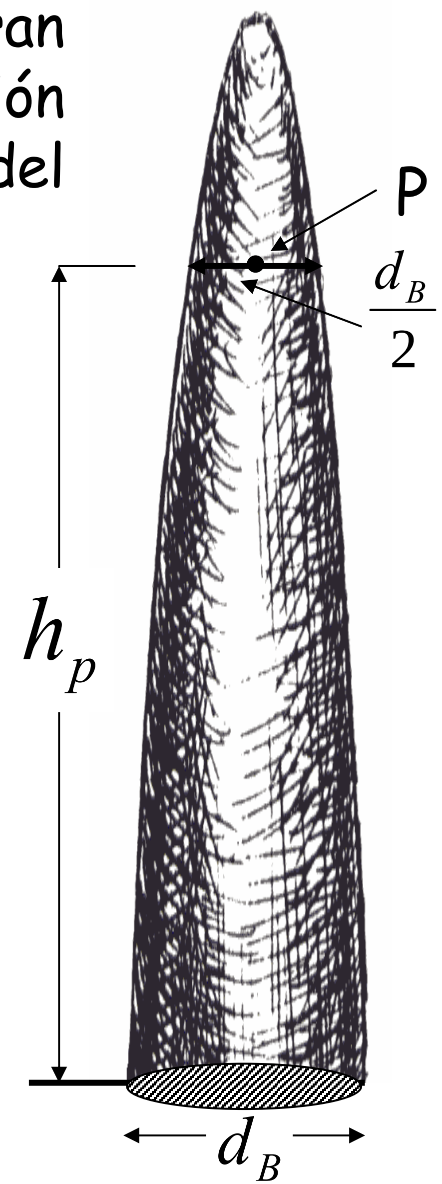
También nos puede servir para interpolar datos que no hemos medido del tronco del árbol.



Fórmula de Pressler o del punto directriz

Se trata de una fórmula de cubicación de gran precisión en la cubicación de sólidos de revolución no cilíndricos, que se aplica a la totalidad del tronco o fuste del árbol, sin dividirle.

Está basada en definir un punto del eje del árbol, "punto directriz", en el cual el diámetro de la sección que lo integra es la mitad que el diámetro en la base y determinar su altura.



$$\boxed{VPB = \frac{2}{3} S_B \cdot h_p}$$

$S_B = \text{Sección en la base}$

$h_P = \text{Altura del punto directriz}$

Esta fórmula da valores exactos o casi exactos para los T.D. Paraboloide, Cono y Neiloide y no sirve para el cilindro.

Precisión de la fórmula de Pressler o del "punto directriz"

Para ver la precisión de la fórmula de Pressler, Vamos a comparar el volumen que nos proporciona, con el Volumen real de los Tipos Dendrométricos de referencia.

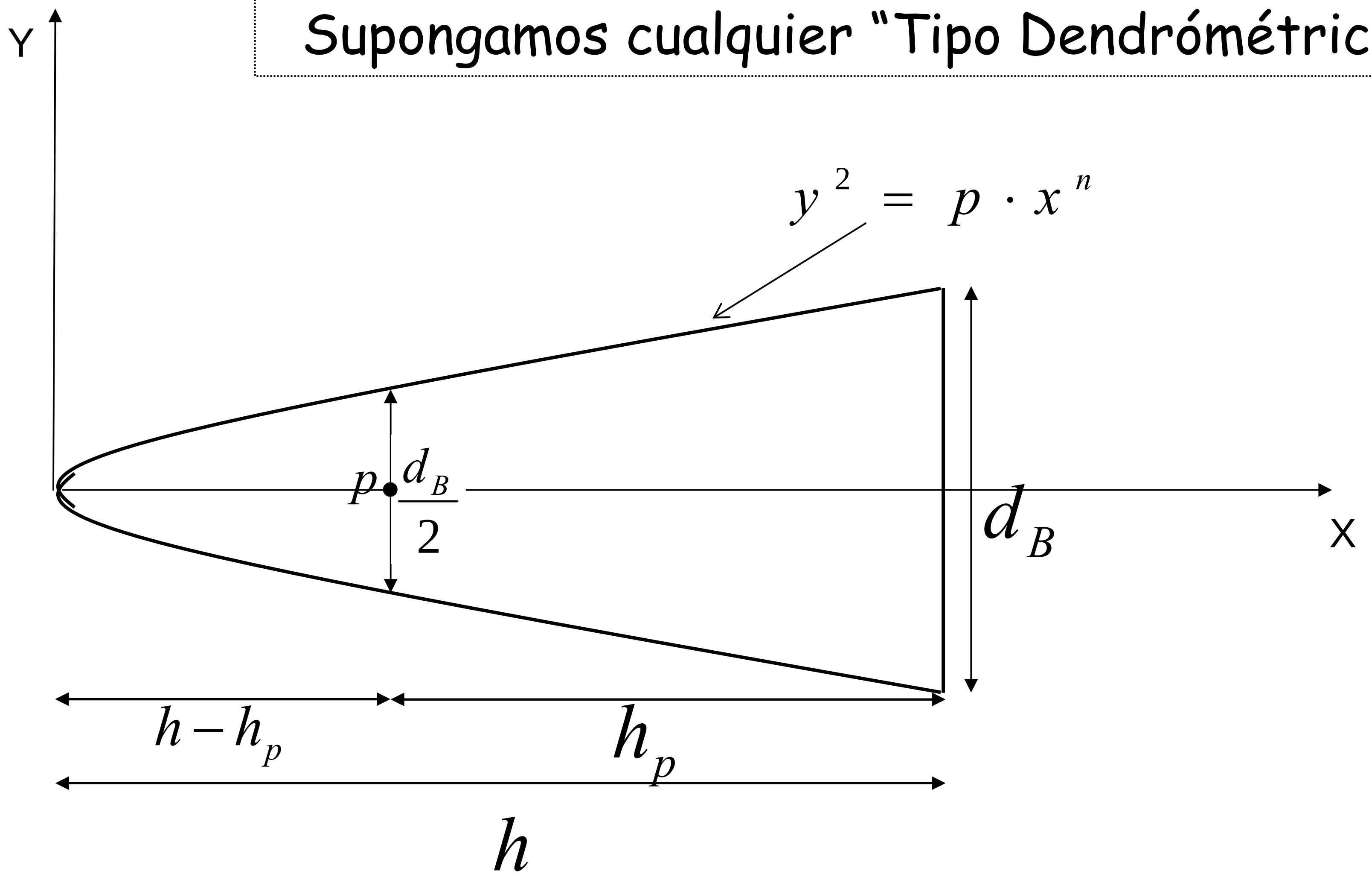
$$V_{real} = \frac{S_B \cdot h}{n+1}$$

$$VPB = \frac{2}{3} S_B \cdot h_p$$

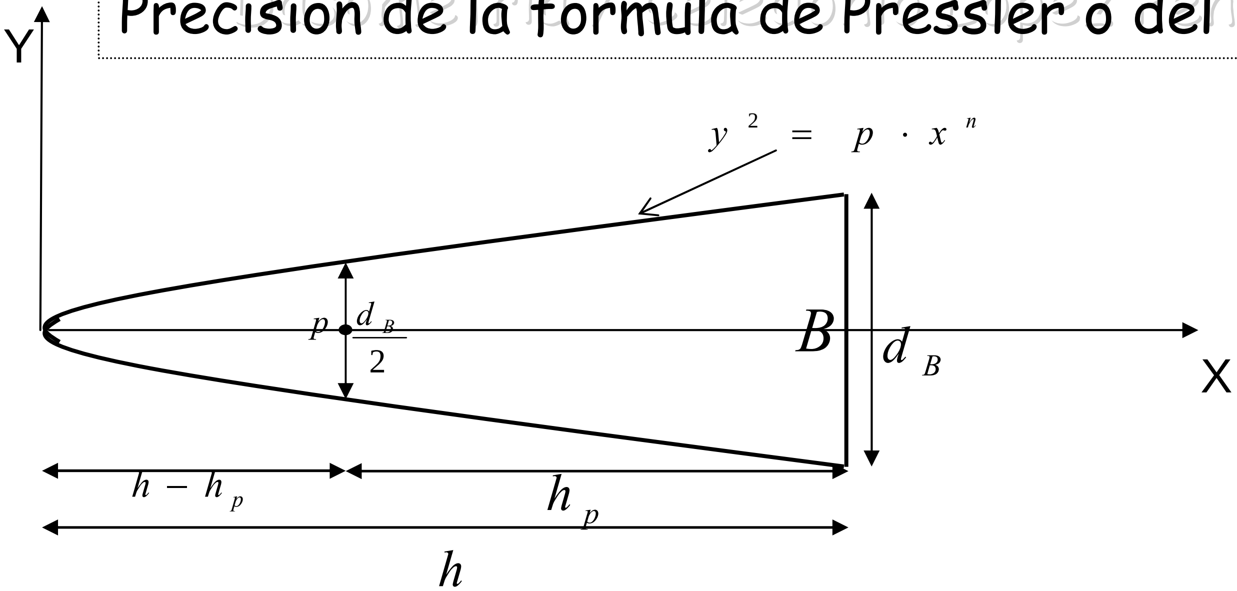
Para poder comparar ambas fórmulas, vamos a poner la fórmula que nos proporciona el volumen real en función de la hp en vez de la h. Tendremos así que ambas fórmulas dependerán de las mismas variables y serán facilmente comparables.

Precisión de la fórmula de Pressler o del "punto directriz"

Supongamos cualquier "Tipo Dendrómétrico"



Precisión de la fórmula de Pressler o del "punto directriz"



$$\text{En B tendremos} \Rightarrow \left(\frac{d_B}{2}\right)^2 = p \cdot h^n$$

$$\text{En p tendremos} \Rightarrow \left(\frac{d_B/2}{2}\right)^2 = p \cdot \left(h - h_p\right)^n$$

Precisión de la fórmula de Pressler o del "punto directriz"

$$p = \frac{\left(\frac{d_B}{2}\right)^2}{h^n} = \frac{\left(\frac{d_B}{4}\right)^2}{\left(h - h_p\right)^n} = \frac{\left(h - h_p\right)^n}{h^n} = \frac{\left(\frac{d_B}{4}\right)^2}{\left(\frac{d_B}{2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$p = \frac{\left(h - h_p\right)^n}{h^n} = \frac{\frac{\cancel{d_B^2}}{4^{\cancel{2}}}}{\frac{\cancel{d_B^2}}{\cancel{4}}} = \frac{1}{4}$$

Precisión de la fórmula de Pressler o del "punto directriz"

$$\Rightarrow \frac{\left(h-h_p\right)}{h} = \sqrt[n]{\frac{1}{4}} \Rightarrow 1-\frac{h_p}{h} = \frac{1}{\sqrt[n]{4}} \Rightarrow \frac{h_p}{h} = 1-\frac{1}{\sqrt[n]{4}}$$

$$h = \frac{h_p}{1-\frac{1}{\sqrt[n]{4}}} \Rightarrow h = \frac{h_p}{\frac{\sqrt[n]{4}-1}{\sqrt[n]{4}}} = \frac{h_p \cdot \sqrt[n]{4}}{\sqrt[n]{4}-1}$$

$$\boxed{h = \frac{h_p \cdot \sqrt[n]{4}}{\sqrt[n]{4}-1}}$$

Tenemos ya la relación existente entre la altura total de cualquier T.D. h, y la altura del punto directriz del mismo hp.

Precisión de la fórmula de Pressler o del "punto directriz"

Podemos ya poner la fórmula que nos proporciona el volumen real de los T.D. en función de la sección en la base y de la altura del punto directriz.

$$V_{real} = \frac{S_B \cdot h}{n+1}$$

$$V_{real} = \frac{S_B}{n+1} \cdot \frac{h_p \cdot \sqrt[n]{4}}{\sqrt[n]{4}-1}$$

De esta manera son compararables los resultados que obtenemos con la fórmula de Pressler aplicada a los distintos T.D. y el volumen real de los mismos.

$$VPB = \frac{2}{3} S_B \cdot h_p$$

$$V_{real} = \frac{S_B}{n+1} \cdot \frac{h_p \cdot \sqrt[n]{4}}{\sqrt[n]{4}-1}$$

Precisión de la fórmula de Pressler o del "punto directriz"

T.D. $y^2 = p \cdot x^n$	Volumen PRESSLER $VPB = \frac{2}{3} S_B \cdot h_p$	Volumen REAL $V_{real} = \frac{S_B}{n+1} \cdot \frac{h_p \cdot \sqrt[n]{4}}{\sqrt[n]{4}-1}$	Comparación
Cilindro n=0	$VPB = \frac{2}{3} S_B \cdot \infty$ indeterminado	$V_{real} = \frac{S_B}{n+1} \cdot \frac{4^{1/0}}{4^{1/0}-1} \cdot h_p$ indeterminado	NO SIRVE
Paraboloide n=1	$VPB = \frac{2}{3} S_B \cdot h_p$	$V_{real} = \frac{S_B}{1+1} \cdot \frac{4^{1/1}}{4^{1/1}-1} \cdot h_p$	EXACTO
Cono n=2	$VPB = \frac{2}{3} S_B \cdot h_p$	$V_{real} = \frac{S_B}{2+1} \cdot \frac{4^{1/2}}{4^{1/2}-1} \cdot h_p$	EXACTO
Neiloide n=3	$VPB = \frac{2}{3} S_B \cdot h_p$	$V_{real} = S_B \cdot \underbrace{\frac{1}{3+1} \cdot \frac{4^{1/3}}{4^{1/3}-1}}_{0{,}675} \cdot h_p$	V Pressler ≈ 0,986 V real

Conclusión de la Fórmula de Pressler o del punto directriz

- No es válida para el cilindro
- Para el resto de los Tipos Dendrométricos de referencia, resultados practicamente exáctos

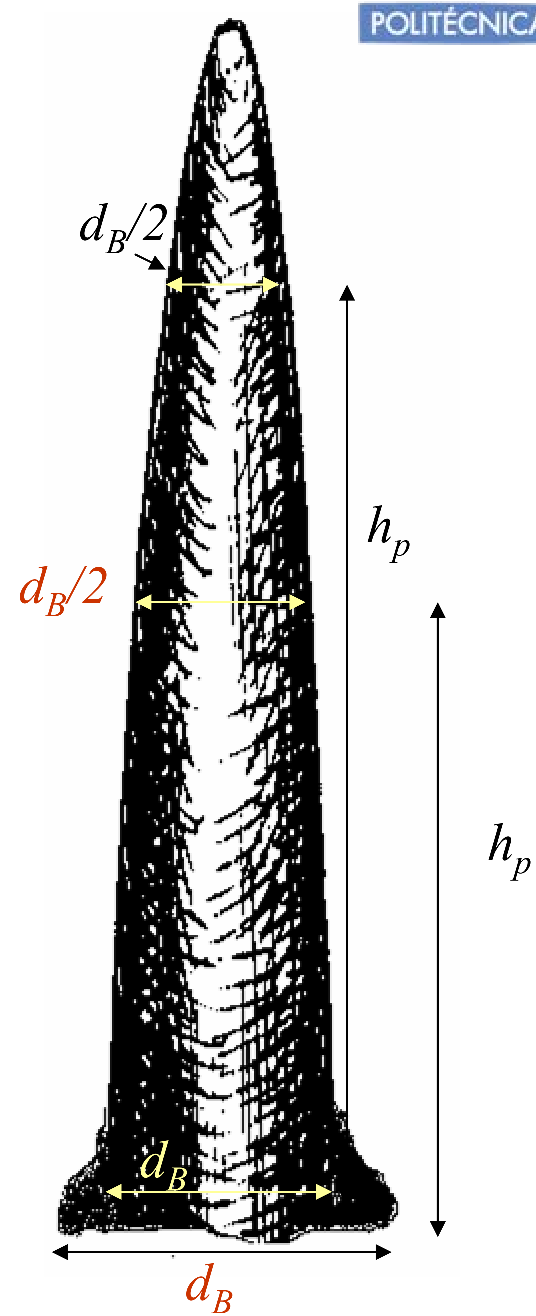
Fórmula muy válida para la cubicación de árboles de tronco entero no cilíndrico

POLITÉCNICA

Aplicación práctica de la fórmula de Pressler a la cubicación de árboles en pie

Es frecuente que los troncos de los árboles, presenten irregularidades en su base, por lo que tomar como diámetro de referencia el d_{base}, para determinar el punto directriz, lleve a errores en la determinación del punto directriz y por lo tanto en la aplicación de la fórmula de Pressler.

$$VPB = \frac{2}{3} S_B \cdot h_p$$

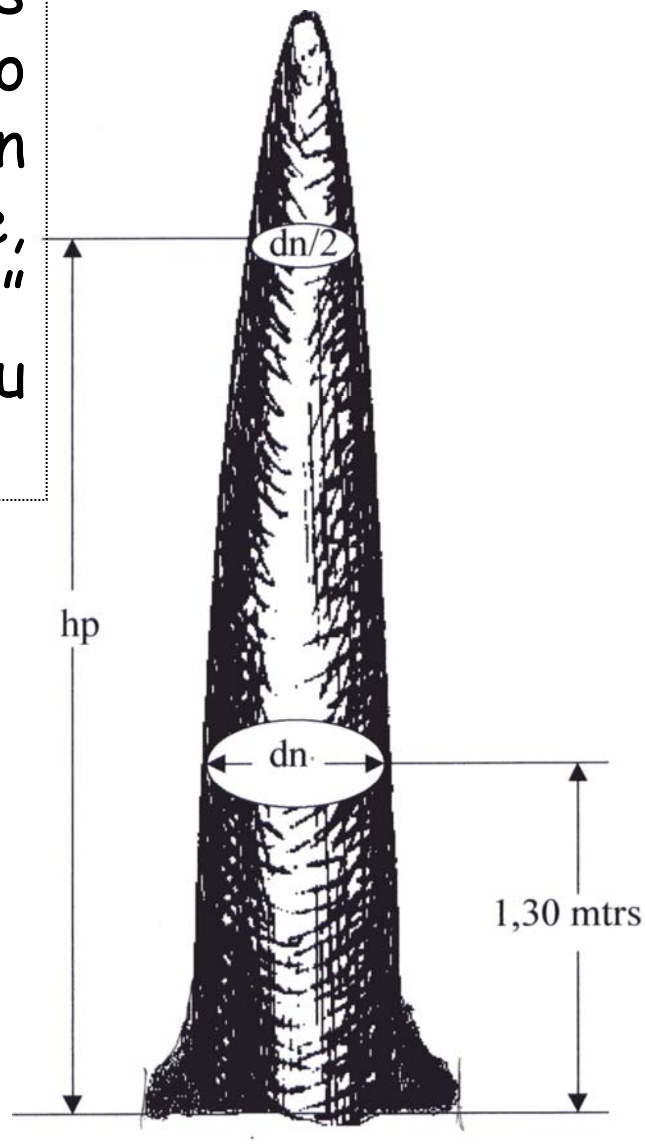


Fórmula de Pressler para la cubicación de árboles en pie

Para evitar esto, la fórmula de Pressler en la cubicación de árboles en pie se aplica tomando como referencia el diámetro normal en lugar de el diámetro en la base, definiendo como "punto directriz" aquel en el que el diámetro de su sección es la mitad del "dn".

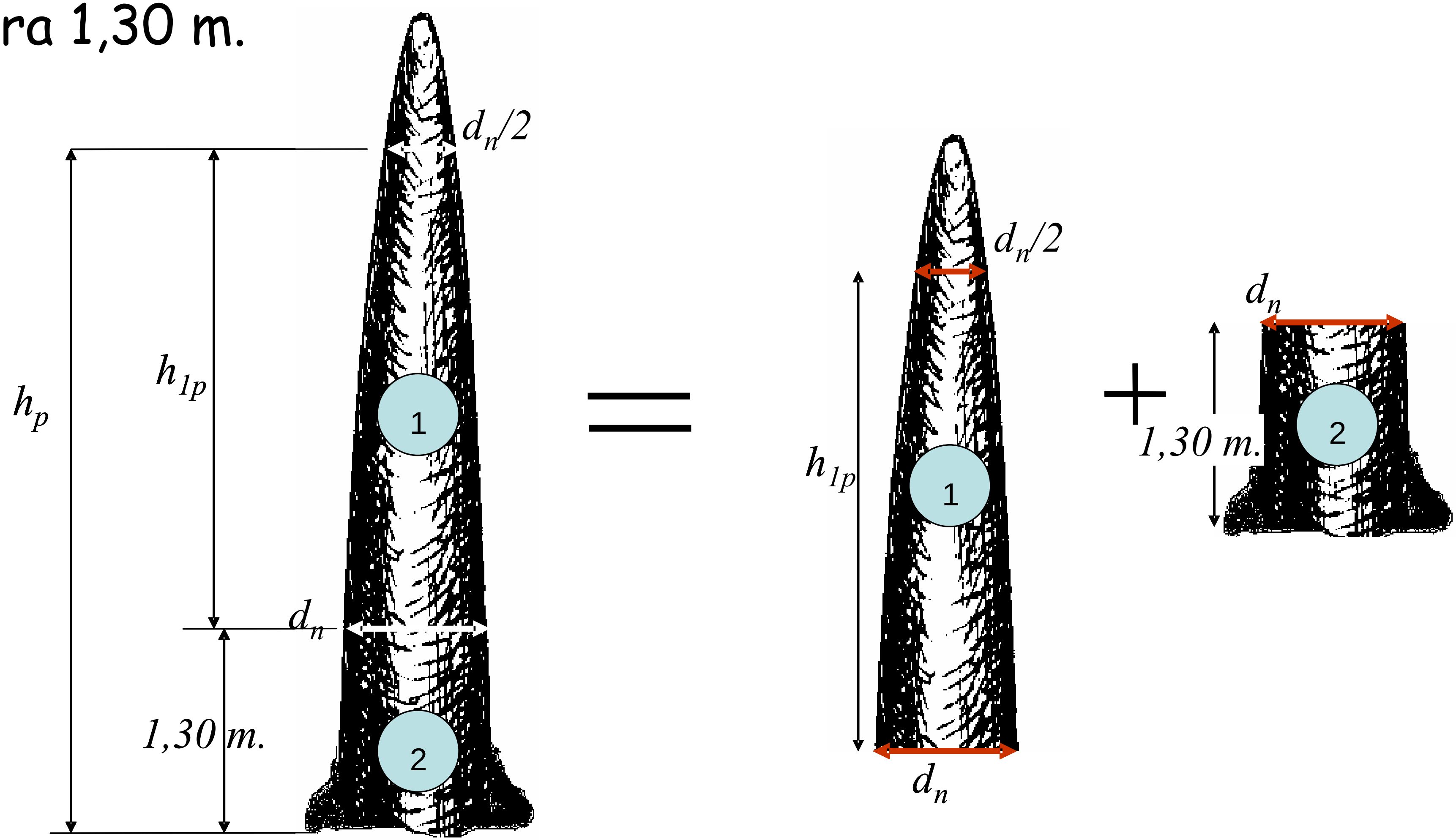
$$VPN = \frac{2}{3} S_n \cdot h_p$$

Esto supone, que cubicamos ligeramente por defecto el volumen real del tronco en pie, si este es entero.

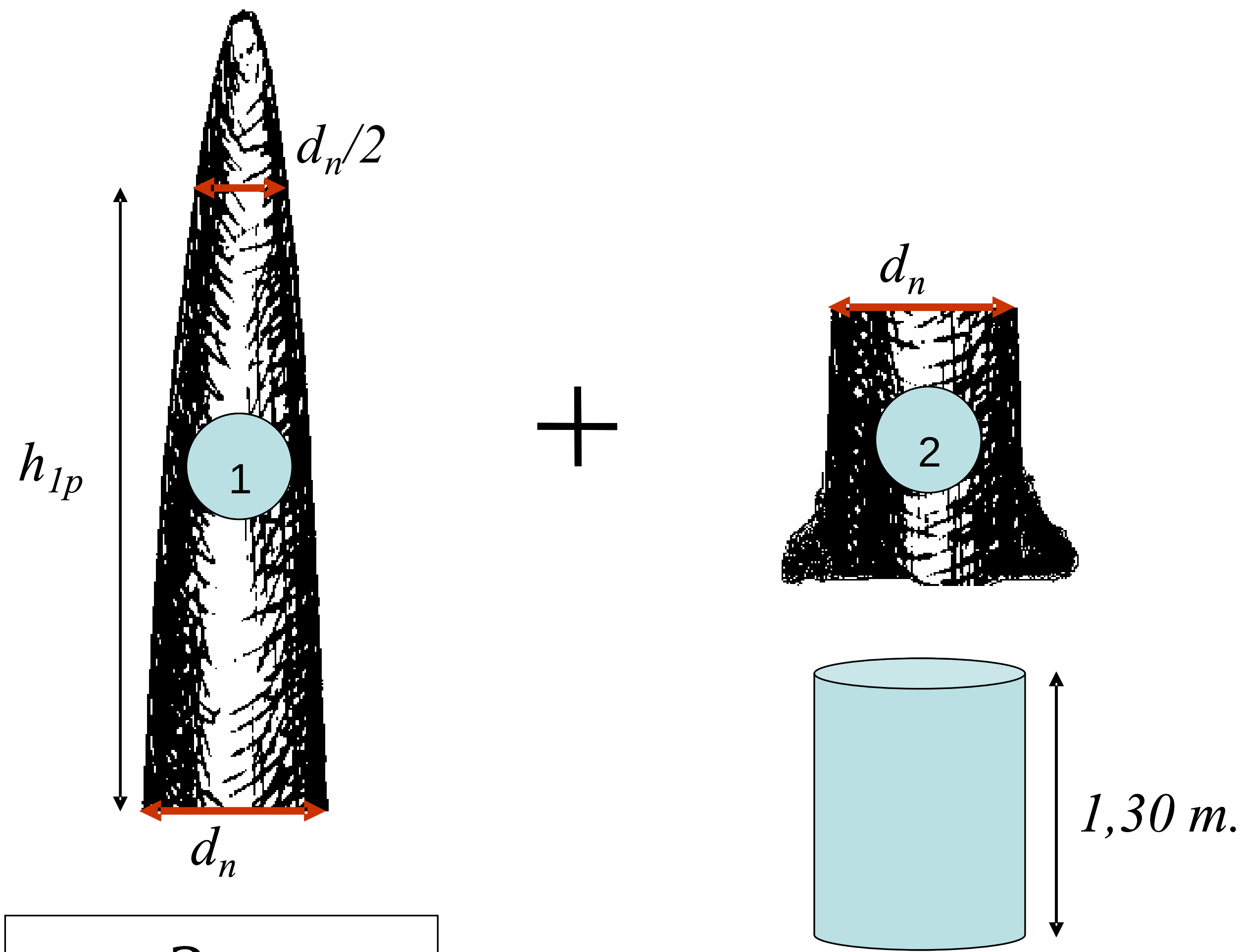


Fórmula de Pressler para la cubicación de árboles en pie

Si descomponemos este tronco en dos partes, una por encima de la sección normal y otra por debajo, su volumen real lo podemos asimilar al de la parte por encima de la sección normal, más el de un cilindro de sección la normal y altura 1,30 m.



Fórmula de Pressler para la cubicación de árboles en pie



$$V\ real = \boxed{V_1 = \frac{2}{3} S_n \cdot h_{1p}} + \boxed{V_2 = S_n \cdot 1,30}$$

El volumen real del tronco sería:

$$\boxed{V_{REAL} = \frac{2}{3} S_n \cdot h_{1p} + S_n \cdot 1,30}$$

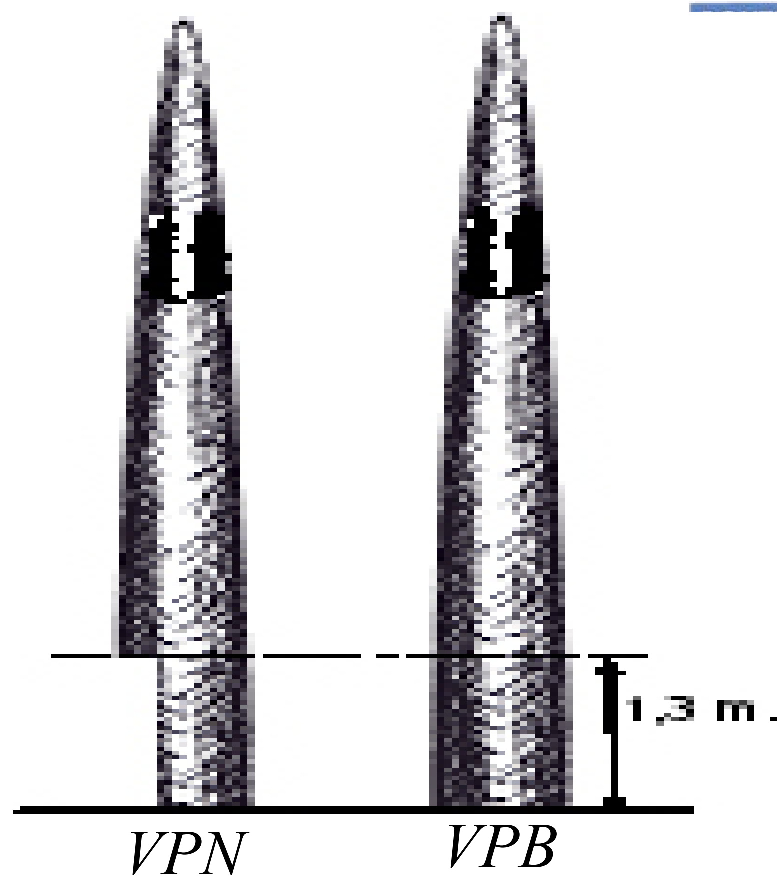
Mientras que el volumen que nos proporciona la fórmula de Pressler que tiene como referencia el dn será:

$$VPN = \boxed{\frac{2}{3} S_n \cdot h_p} = \frac{2}{3} S_n \cdot h_{1p} + \frac{2}{3} S_n \cdot 1,30$$

Con la fórmula VPN el cilindro por debajo de la sección normal, solo se cubica en un 66%. Por lo tanto al aplicar esta fórmula a un árbol de tronco entero, estamos proporcionando un volumen por defecto respecto al real, equivalente a la tercera parte de un cilindro de diámetro el "dn" y de altura 1,30 m.

Fórmula de Pressler para la cubicación de árboles en pie

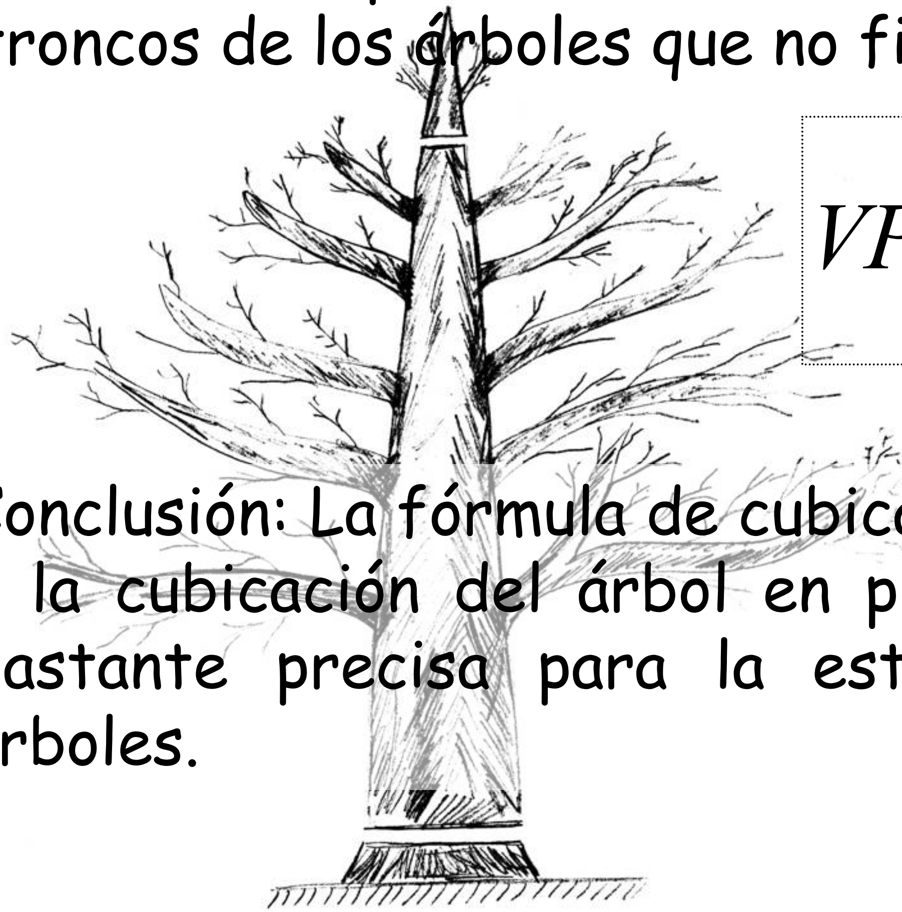
$$VPN = \boxed{\frac{2}{3} S_n \cdot h_p}$$



Con la fórmula VPN el cilindro por debajo de la sección normal, solo se cubica en un 66%. Por lo tanto al aplicar esta fórmula a un árbol de tronco entero, estamos proporcionando un volumen por defecto respecto al real, equivalente a la tercera parte de un cilindro de diámetro el "dn" y de altura 1,30 m.

Fórmula de Pressler para la cubicación de árboles en pie

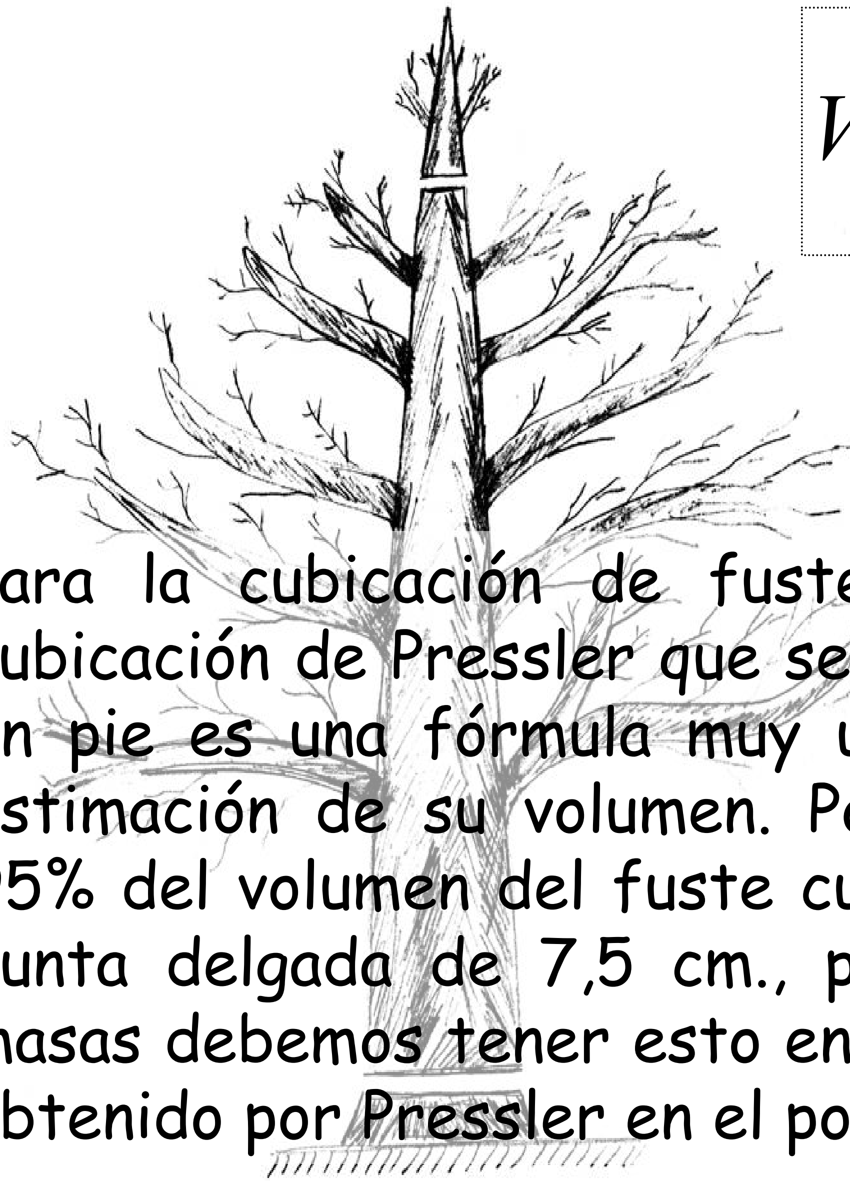
En la realidad del tronco de los árboles, interesa el volumen maderable o del fuste, por lo que esa parte que queda sin cubicar es asimilable al tocón que queda en el suelo cuando un árbol se apea, así como al raberón o la parte final de los troncos de los árboles que no finalizan en vértice



$$VPN = \frac{2}{3} S_n \cdot h_p$$

Conclusión: La fórmula de cubicación de Pressler que se aplica a la cubicación del árbol en pie es una fórmula muy útil y bastante precisa para la estimación del volumen de los árboles.

Fórmula de Pressler para la cubicación de árboles en pie



$$VPN = \frac{2}{3} S_n \cdot h_p$$

Para la cubicación de fustes de árboles La fórmula de cubicación de Pressler que se aplica a la cubicación del árbol en pie es una fórmula muy útil y bastante precisa para la estimación de su volumen. Por témino medio obtenemos el 95% del volumen del fuste cuando se trata de diámetros en punta delgada de 7,5 cm., por lo que en la cubicación de masas debemos tener esto en cuenta, aumentando el volumen obtenido por Pressler en el porcentaje correspondiente.