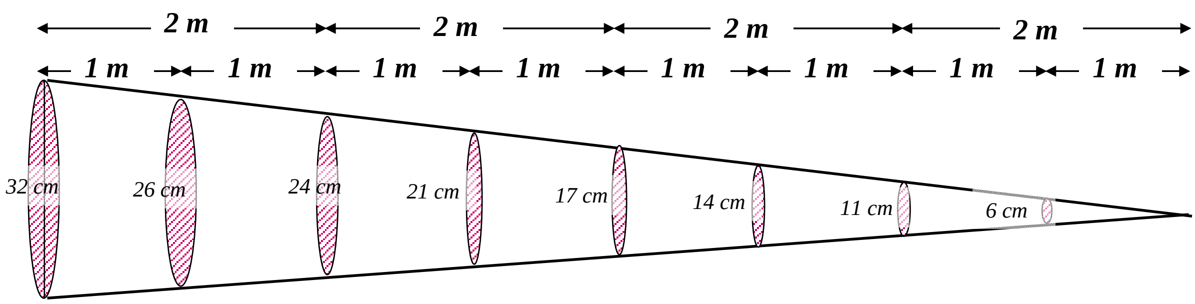
EJERCICIO Nº 5 El tronco entero de un árbol apeado mide 8 metros de longitud. Se ha dividido en trozas de un metro, siendo los diámetros de las distintas secciones resultantes los siguientes: 32, 26, 24, 21, 17, 14, 11, y 6 cmtrs.
Determinar su volumen por los siguientes métodos, aplicándolos al tronco dividido en trozas de 2 metros.
a) Meyer, b) Huber, c) Smalian, d) Newton, f) Duhamel, g) Tronco de cono



Resolución:

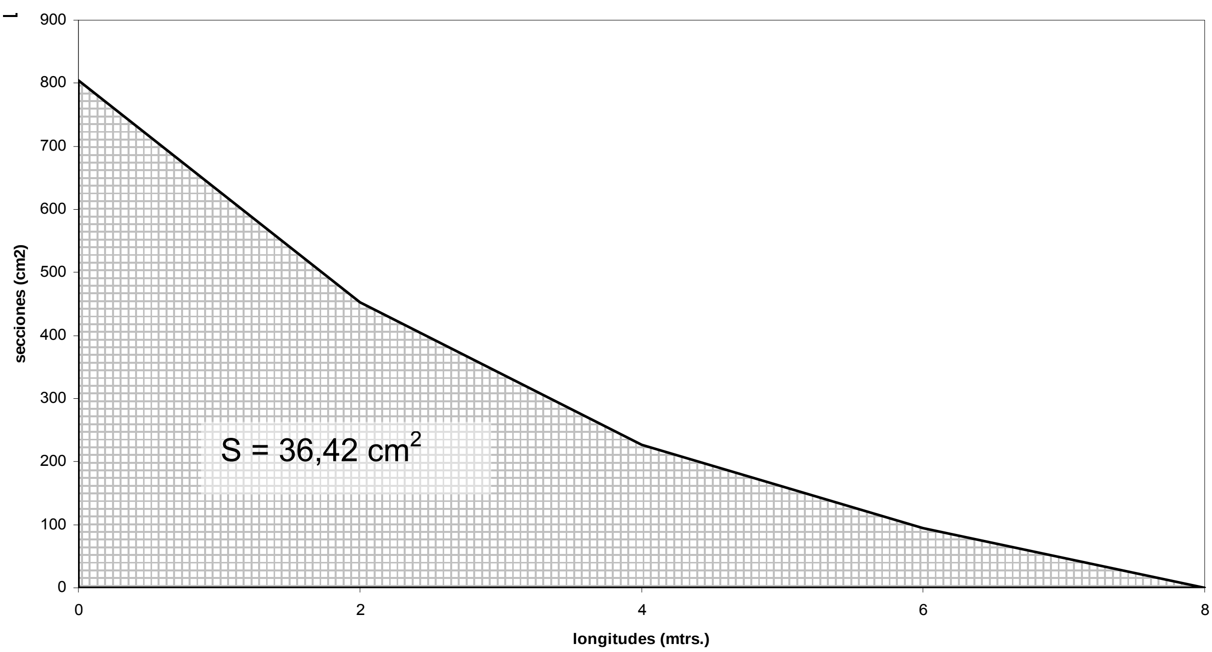
a) Meyer

$S_0 = \frac{\pi}{4} \cdot 32^2 = 804,24 \text{ cm}^2$ $S_1 = \frac{\pi}{4} \cdot 26^2 = 530,93 \text{ cm}^2$ $S_2 = \frac{\pi}{4} \cdot 24^2 = 452,39 \text{ cm}^2$

$S_3 = 346,36 \text{ cm}^2$ $S_4 = 226,98 \text{ cm}^2$ $S_5 = 153,93 \text{ cm}^2$ $S_6 = 95,03 \text{ cm}^2$

$S_7 = 28,27 \text{ cm}^2$ $S_8 = 0 \text{ cm}^2$

Representamos gráficamente sobre un eje de coordenadas en el eje de las "Y" las secciones correspondientes desde la base cada dos metros en cm^2 , y en el eje de las "X" las distancias desde la base a la que se encuentran.



El gráfico representado, es el de la evolución de la dimensión de secciones del árbol a lo largo de su longitud. Y la superficie (S) comprendida entre esa línea de perfil y los ejes de coordenadas será equivalente al volumen del árbol.

Tendremos que V = K · S (1)

Debemos hallar el coeficiente K de escala o conversión que transforma S en el volumen al que equivale en dm^3, para ello vemos que en el eje de ordenadas hemos representado 800 cm^2 en una longitud de6,7 cmtrs y en el de abcisas 8 metros en 14.9 cmtrs. Tendremos pues que:

100 cm^2 ≈ a 800 cm^2 x 800 cm. = 640000 cm^3 = **640 dm^3**

de donde (1) **640 dm^3 = K · 100 cm^2 ; $K = \frac{640\ dm^3}{100\ cm^2}$**

Planimetrando obtenemos que la superficie S bajo la línea de perfil de la evolución de las secciones es: 36,42 cm^2 , luego el volumen de dicho tronco obtenido por el método gráfico de Meyer o del planímetro será:

$$V_{Meyer} = 36{,}42\ cm^2\ \frac{640 dm^3}{100 cm^2} = \mathbf{233{,}1\ dm^3}$$

b) Aplicando la fórmula de <u>Huber</u>, el volumen del tronco citado sería:

$$V_{Huber} = \frac{\pi}{4} \cdot l\left(d_{m1}^{\ 2} + d_{m2}^{\ 2} + \cdots\cdots + d_{mn}^{\ 2}\right) = \frac{\pi}{4} \cdot 20 \cdot \left(2{,}6^2 + 2{,}1^2 + 1{,}4^2 + 0{,}6^2\right) = \mathbf{211{,}9\ dm^3}$$

c) Aplicando la fórmula de <u>Smalian</u>, el volumen del tronco citado sería:

$$V_{Smalian} = \frac{\pi}{8} \cdot l\left(d_1^{\ 2} + 2d_2^{\ 2} + 2d_3^{\ 2} \cdots\cdots + 2d_n^{\ 2} + d_{n+1}^{\ 2}\right) =$$
$$= \frac{\pi}{8} \cdot 20 \cdot \left(3{,}2^2 + 2 \cdot 2{,}4^2 + 2 \cdot 1{,}7^2 + 2 \cdot 1{,}11^2 + 0\right) = \mathbf{235{,}3\ dm^3}$$

d) Aplicando la fórmula de <u>Newton</u>, el volumen del tronco citado sería:

$$V_{Newton} = \frac{l}{6} \cdot \left(S_1 + 4 \cdot S_2 + S_3\right)$$

$$V_{Newton1} = \frac{20}{6} \cdot \left(8{,}04 + 4 \cdot 5{,}31 + 4{,}52\right) = 112{,}7\ dm^3$$

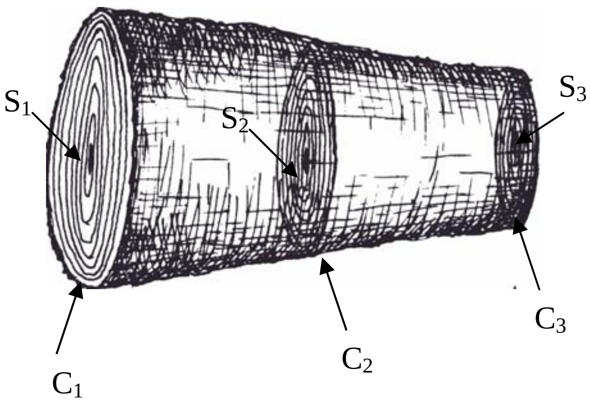
$$V_{Newton2} = \frac{20}{6} \cdot \left(4{,}52 + 4 \cdot 3{,}46 + 2{,}27\right) = 68{,}8\ dm^3$$

$$V_{Newton3} = \frac{20}{6} \cdot \left(2{,}26 + 4 \cdot 1{,}54 + 0{,}95\right) = 31{,}23\ dm^3$$

$$V_{Newton4} = \frac{20}{6} \cdot (0{,}95 + 4 \cdot 0{,}28) = 6{,}9 dm^3$$

$$\boxed{V_{Newton\ total} = 112{,}7 + 68{,}8 + 31{,}23 + 6{,}9 = \mathbf{219{,}63\ dm^3}}$$

e) Aplicando la fórmula de Duhamel, el volumen del tronco citado sería:



$$\boxed{C_m = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{3}}$$

$$\boxed{V = \frac{C_m^{\ 2}}{4 \cdot \pi} \cdot l}$$

Troza 1 $C_m = \frac{10{,}05 + 8{,}16 + 7{,}54}{3} = 8{,}58 dm. \triangleright V_{troza1} = \frac{(8{,}58)^2}{4 \cdot \pi} \cdot 20 = 117{,}16\ dm^3$

Troza 2 $C_m = \frac{7{,}54 + 6{,}59 + 5{,}34}{3} = 6{,}49 dm. \triangleright V_{troza2} = \frac{(6{,}49)^2}{4 \cdot \pi} \cdot 20 = 67{,}03\ dm^3$

Troza 3 $C_m = \frac{5{,}34 + 4{,}4 + 3{,}45}{3} = 4{,}396 dm. \triangleright V_{troza3} = \frac{(4{,}396)^2}{4 \cdot \pi} \cdot 20 = 30{,}76\ dm^3$

Troza 4 $C_m = \frac{3{,}45 + 1{,}88 + 0}{3} = 1{,}77 dm. \triangleright V_{troza4} = \frac{(1{,}77)^2}{4 \cdot \pi} \cdot 20 = 5{,}02\ dm^3$

$$\boxed{V_{Duhamel\ \ total} = 117{,}16 + 67{,}03 + 30{,}76 + 5{,}02 = \mathbf{219{,}97\ dm^3}}$$

e) Aplicando la fórmula del "tronco de cono", el volumen del tronco citado sería:

$$V_1 = \frac{20}{3} \cdot \left(8{,}04 + 4{,}52 + \sqrt{8{,}04 \cdot 4{,}52}\right) = 123{,}92\ dm^3$$

$$V_2 = \frac{20}{3} \cdot \left(4{,}52 + 2{,}27 + \sqrt{4{,}52 \cdot 2{,}27}\right) = 66{,}62\ dm^3$$

$$V_3 = \frac{20}{3} \cdot \left(2{,}27 + 0{,}95 + \sqrt{2{,}27 \cdot 0{,}95}\right) = 31{,}25\ dm^3$$

$$V_4 = \frac{20}{3} \cdot (0{,}95) = 6{,}33\ dm^3$$

$$\boxed{V_{\ total} = 123{,}92 + 66{,}62 + 31{,}25 + 6{,}33 = \mathbf{228{,}12\ dm^3}}$$