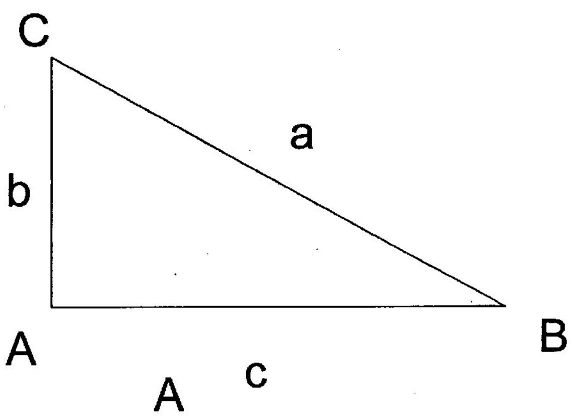
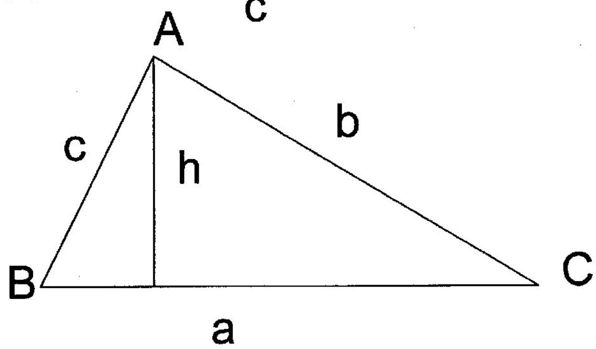
TRIGONOMETRIA





Sen B = b/a

Cos B = c/a

Tg B = b/c

T. SENO:a/senA = b/senB = c/senC

T. COSENO :

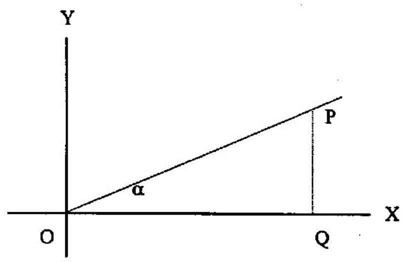
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

F. HERON :

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

NOCIONES DE TRIGONOMETRÍA

Fijado un sistema de coordenadas y una recta que pasa por el origen y que forma un ángulo α con OX si tomamos un punto cualquiera P de esta recta y trazamos la perpendicular al eje OX se nos forma un triángulo rectángulo POQ



Las razones trigonométricas del ángulo α

Seno de α

Es la relación entre los números que miden la ordenada y el radio vector OP correspondiente a P También podemos definirlo como razón del cateto opuesto a la hipotenusa en el triángulo OPQ

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{QP}{OP} \qquad (1)$$

Coseno de α

Es la relación del cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa, o la relación de la abscisa al radio

$$\cos\alpha = \frac{OQ}{OP} \qquad (2)$$

Tangente de α

Es la relación entre la ordenada y la abscisa $\qquad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{QP}{OQ} \qquad (3)$

Las razones inversas de estas son:

Cosecante α $\qquad \operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{OP}{QP}$

Secante α $\qquad \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{OP}{OQ} \qquad (4)$

Cotangente α $\qquad \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{OQ}{QP}$

Estas razones son independientes del punto P tomado sobre el lado OP del ángulo.
Entre las razones trigonométricas tenemos las siguientes relaciones:

$$\mathbf{sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha} = \frac{QP^2}{OP^2} + \frac{OQ^2}{OP^2} = \frac{OP^2}{OP^2} = 1$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{QP}{OQ} = \operatorname{tg}\alpha \qquad (5)$$

Existen otras relaciones deducidas de éstas. Así por ejemplo:

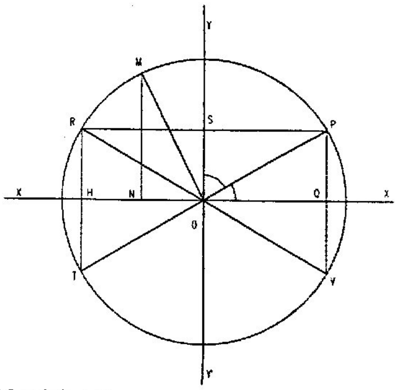
$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$$

y análogamente $\qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha \qquad (6)$

que se utilizan frecuentemente.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS Y SUPLEMENTARIOS

1º.- Conocidas las razones trigonométricas del ángulo α, hallar las del ángulo $(\pi/2 - \alpha)$



Sea: $QOP = \alpha$ y $POY = \pi/2 - \alpha$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{QP}{OP} = -\frac{OS}{OP} = \cos(\pi/2 - \alpha)$$

$$\cos\alpha = \frac{OQ}{OP} = \frac{SP}{OP} = \text{sen}\,(\pi/2 - \alpha)$$

$$\text{tg}\,\alpha = \text{ctg}\,(\pi/2 - \alpha) \qquad (7)$$

2º.- Calcular las razones de $(\pi/2 + \alpha)$ $XOM = (\pi/2 + \alpha)$

Los triángulos MON y OPQ son iguales, luego:

$$\text{sen}\,(\pi/2 + \alpha) = \frac{NM}{OM} = -\frac{OQ}{OP} = \cos\alpha$$

$$\cos(\pi/2 + \alpha) = \frac{ON}{OM} = \frac{QP}{OP} = -\,\text{sen}\,\alpha \qquad (8)$$

$$\text{tg}\,(\pi/2 + \alpha) = -\,\text{ctg}\,\alpha$$

3º.- Calcular las razones de $(\pi - \alpha)$ $XOR = (\pi - \alpha)$

$$\text{sen}\,(\pi - \alpha) = \frac{HR}{OR} = \frac{QP}{OP} = \text{sen}\,\alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = \frac{OH}{OR} = -\frac{OQ}{OP} = -\cos\alpha \qquad (9)$$

$$\text{tg}\,(\pi - \alpha) = -\,\text{tg}\,\alpha$$

4º.- Calcular las razones de $(\pi + \alpha)$ $XOT = (\pi + \alpha)$

$$\text{sen}\,(\pi + \alpha) = \frac{HT}{OT} = -\frac{QP}{OP} = -\,\text{sen}\,\alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = \frac{OH}{OT} = -\frac{OQ}{OP} = -\cos\alpha \qquad (10)$$

$$\text{tg}\,(\pi + \alpha) = \text{tg}\,\alpha$$

5º.- Calcular las razones trigonométricas del ángulo $(-\alpha)$ $XOV = (-\alpha)$

$$\text{sen}\,(-\alpha) = -\,\text{sen}\,\alpha$$

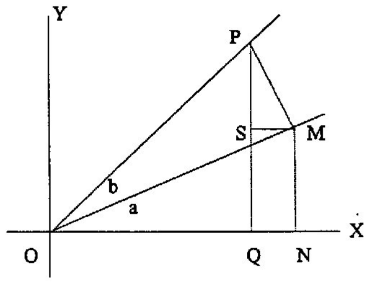
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad (11)$$

$$\text{tg}\,(-\alpha) = -\,\text{tg}\,\alpha$$

CONOCIDAS LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS a y b HALLAR LAS DEL ÁNGULO (a ± b)

Sea XOM = a y MOP = b

Tomemos sobre OP un punto P y tracemos por él las perpendiculares PQ a OX y PM a OM Si trazamos las perpendiculares por M a OX y PQ obtenemos los puntos N y S , se puede poner:



$$PQ = Y = PS + SQ = PS + MN = PM \cos a + OM \operatorname{sen} a = \mathbf{Y' \cos a + X' \operatorname{sen} a}$$

$$OQ = X = ON - QN = ON - SM = OM \cos a - PM \operatorname{sen} a = \mathbf{X' \cos a - Y' \operatorname{sen} a} \qquad (12)$$

siendo Y' = PM X' = OM por tanto

$$\mathbf{\operatorname{sen}(a+b)} = \frac{PQ}{OP} = \frac{Y'}{OP}\cos a + \frac{X'}{OP}\operatorname{sen} a = \mathbf{\operatorname{sen} b \cos a + \cos b \operatorname{sen} a}$$

$$\mathbf{\cos(a+b)} = \frac{OQ}{OP} = \frac{X'}{OP}\operatorname{sen} a + \frac{Y'}{OP}\cos a = \mathbf{\cos b \cos a + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a} \qquad (13)$$

y cambiando b por - b y teniendo en cuenta las:

$$\mathbf{\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b}$$

$$\mathbf{\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} \qquad (14)$$

y dividiéndolas:

$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{sen}(a \pm b)}{\cos(a \pm b)} = \frac{\operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b \pm \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$

y dividiendo numerador y denominador por cos a cos b

$$\mathbf{\operatorname{tg}(a \pm b)} = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \qquad (15)$$

Si hacemos **a = b** resultan las razones trigonométricas del **ángulo doble:**

$$\mathbf{\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a}$$

$$\mathbf{\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a}$$

$$\mathbf{\operatorname{tg} 2a} = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \qquad (16)$$

Para hallar las razones trigonométricas del **ángulo mitad** basta hacer $\mathbf{2a = A}$
$a = A/2$ y sustituyendo en (16)

$$\mathbf{sen\ A = 2\ sen\ A/2\ cos\ A/2}$$

$$\mathbf{cos\ A = cos^2 A/2 - sen^2 A/2} \qquad (17)$$

De la segunda de éstas y de (5)

$$1 = sen^2 A/2 + cos^2 A/2 \qquad \text{restando} \qquad 1 - cos\ A = sen^2 A/2 + sen^2 A/2$$

$$cos\ A = cos^2 A/2 - sen^2 A/2 \qquad \text{y sumando} \qquad 1 + cos\ A = cos^2 A/2 + cos^2 A/2$$

$$1 - cos\ A = 2\ sen^2 A/2 \qquad \mathbf{sen\ A/2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$1 + cos\ A = 2\ cos^2 A/2 \qquad \mathbf{cos\ A/2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \qquad (19)$$

que divididas dan $\qquad \mathbf{tg\ A/2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$

que son las razones trigonométricas del ángulo A/2 en función de cos A_o

De la 1ª de (5) y de la 1ª de (17), se obtienen estas razones trigonométricas en función de sen A, pero estas fórmulas se usan poco. Pueden obtenerse como ejercicio sin más que sumar y restar.

TRANSFORMACIÓN DE SUMA Y DIFERENCIA DE SENOS Y COSENOS EN PRODUCTO

De (13) y (14) por suma y diferencia, tenemos

$$sen\ (a + b) + sen\ (a - b) = 2\ sen\ a\ cos\ b$$

$$sen\ (a + b) - sen\ (a - b) = 2\ cos\ a\ sen\ b$$

$$cos\ (a + b) + cos\ (a - b) = 2\ cos\ a\ cos\ b$$

$$cos\ (a + b) - cos\ (a - b) = -\ 2\ sen\ a\ sen\ b$$

y haciendo $\quad \mathbf{a + b = A} \qquad a = \frac{A+B}{2}$

$\mathbf{a - b = B} \qquad b = \frac{A-B}{2}$ $\quad$ y sustituyendo en las anteriores

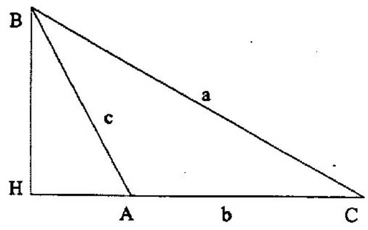
$$\mathbf{sen\ A + sen\ B = 2\ sen}\ \frac{A+B}{2}\ \mathbf{cos}\ \frac{A-B}{2}$$

$$\mathbf{sen\ A - sen\ B = 2\ cos}\ \frac{A+B}{2}\ \mathbf{sen}\ \frac{A-B}{2}$$

$$\mathbf{cos\ A + cos\ B = 2\ cos}\ \frac{A+B}{2}\ \mathbf{cos}\ \frac{A-B}{2}$$

$$\mathbf{cos\ A - cos\ B = -\ 2\ sen}\ \frac{A+B}{2}\ \mathbf{sen}\ \frac{A-B}{2}$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTILÍNEOS



Ya hemos visto que:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\,AH$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2b\,CH$

y como $AH = -\,c\cos A$
$CH = a\ \cos C$

resulta $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ba\cos C}$

(21) **Teorema del coseno**

El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de ambos por el coseno del ángulo que forman.

Por otra parte $BH = a\,\mathrm{sen}\,C = c\,\mathrm{sen}\,A$

$a / \mathrm{sen}\,A = c / \mathrm{sen}\,C$ y análogamente

$$\frac{a}{\mathrm{sen}\,A} = \frac{b}{\mathrm{sen}\,B} = \frac{c}{\mathrm{sen}\,C}$$ (22) **Teorema del seno**

Las relaciones (21) y (22) constituyen las fórmulas fundamentales de resolución de triángulos. Vamos a estudiar la resolución de estos.

De (21), resulta: $$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$2\,\mathrm{sen}^2 A/2 = 1 - \cos A = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc} = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$$

$$2\cos^2 A/2 = 1 + \cos A = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} = \frac{2p(p-a)}{bc}$$

siendo el perímetro $= 2p = a + b + c$ $\quad \mathbf{p = (a + b + c) / 2}$

$$\mathbf{sen\ A/2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \qquad \mathbf{cos\ A/2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

y dividiéndolas $$\mathbf{tg\ A/2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \qquad (23)$$

y análogamente por permutación circular obtenemos tg B/2 y tg C/2

De las fórmulas (22), resulta:

$$\frac{a+b}{\mathrm{sen}\,A + \mathrm{sen}\,B} = \frac{c}{\mathrm{sen}\,C} \qquad \frac{a+b}{c} = \frac{2\,\mathrm{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\,\mathrm{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{2\,\mathrm{sen}\left(90 - \frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}}{2\,\mathrm{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\mathrm{sen}\frac{C}{2}} \qquad (24)$$

y de la misma forma:

$$\frac{a-b}{\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B}=\frac{c}{\operatorname{sen}C} \qquad \frac{a-b}{c}=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{2\cos\left(90-\frac{C}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} \qquad (25)$$

dividiendo (24) y (25) $$\frac{a-b}{a+b}=\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} \qquad (26)$$

las fórmulas (22) (24) y (26), nos resuelven todos los casos de triángulos rectilíneos.

Primer caso.- Datos: **a b c** Incógnitas: **A B C**

$$\operatorname{tg}A/2=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \qquad \operatorname{tg}B/2=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \qquad \operatorname{tg}C/2=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

Segundo caso.- Datos: **a b C** Incógnitas: **A B c**

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}c\operatorname{tg}\frac{C}{2} \qquad A+B=180-C$$

de las cuales se despeja A y B
c puede obtenerse de (22), teniendo en cuenta que a estas ecuaciones satisface **c** y **180 - c**

Tercer caso.- Datos: **A B c** Incógnitas: **a b C**

$$C=180-(A+B) \qquad a+b=c\,\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}$$

$$a-b=c\,\frac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$ de las cuales se despeja **a y b**

Cuarto caso.- Datos: **A B a** Incógnitas: **c b C**

$$C=180-(A+B) \qquad \frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B}=\frac{c}{\operatorname{sen}C}$$

Quinto caso.- Datos: **a b A** Incógnitas: **C B c**

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B}$$ y se despeja **B**

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{a-b}{a+b}c\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}$$ y se halla **C**

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B}$$ El problema puede tener dos, una o ninguna solución.

CÁLCULO DE ÁREAS

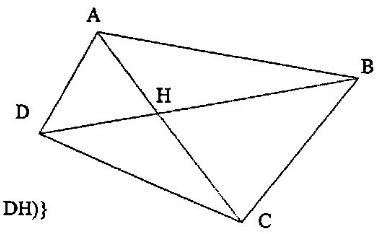
El área de un triángulo sabemos que es: $S = \frac{1}{2}\ a\ h_a$ y como $h_a = b \operatorname{sen} C$

resulta: $S = \frac{1}{2}\ a\ b \operatorname{sen} C$

Si fueran conocidos un lado y los ángulos adyacentes **a, B y C**

$b = a \dfrac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$ y resulta $S = \frac{1}{2} a^2 \dfrac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen}(B+C)}$

ÁREA DE UN CUADRILÁTERO CUALQUIERA



Superficie de AHB = ½ AH * BH sen H
Superficie de BHC = ½ BH * CH sen H
Superficie de CHD = ½ CH * DH sen H
Superficie de AHD = ½ AH * DH sen H

sumando

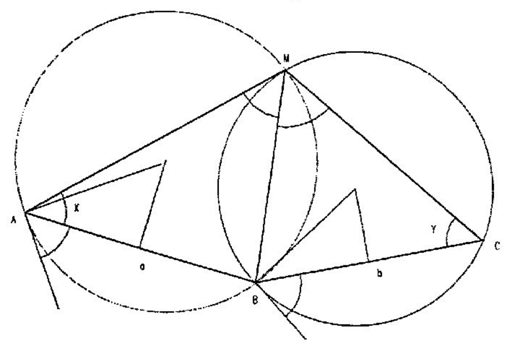
$$S = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} H \{AH\ (BH + DH) + CH(BH + DH)\}$$

$$\mathbf{S = \tfrac{1}{2}\ AC * BD \operatorname{sen} H}$$

Ejercicio: Dados los cuatro lados de un cuadrilátero inscriptible, calcular sus ángulos, sus diagonales, área y radio de la circunferencia circunscrita.

PROBLEMA DE POTENOT O DE LA CARTA

Dados tres puntos A B C, situados sobre un terreno y referidos a una carta geográfica, determinar sobre esta carta un punto M desde el cual se vean AB y BC bajo ángulos dados α y β. El punto M buscado está en la intersección de los arcos capaces de α y β trazados sobre AB y BC



El triángulo AMB nos da $MB = \dfrac{a \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \alpha}$

El triángulo CMB $MB = \dfrac{b \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} \beta}$

dividiendo $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \dfrac{b \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} \beta} = \operatorname{tg} \varphi$

siendo φ un ángulo auxiliar que calculamos

$$\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y} = \frac{\operatorname{tg}\varphi - 1}{\operatorname{tg}\varphi + 1}$$

$$\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}\ \operatorname{tg}(\varphi - 45) \qquad \frac{\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}} = \operatorname{tg}(\varphi - 45) \quad \text{y como}$$

$$\frac{x+y}{2} = \frac{360-(B+\alpha+\beta)}{2} = 180 - \frac{B+\alpha+\beta}{2}$$ y podemos despejar **x e y**