ANÁLISIS Y CÁLCULO

1. INTRODUCCIÓN

El estudio del comportamiento estructural de objetos, como los edificios, se traduce en el manejo de un gran número de valores de variables, tanto de tipo *geométrico*[1], posiciones de los puntos, dilataciones, curvaturas, como de tipo *mecánico*, o fuerzas, bien aplicadas desde el exterior al conjunto estudiado, (acciones y reacciones), bien como interacciones entre zonas del objeto, solicitaciones (de sección) o tensiones (de punto).

Las variables citadas están ligadas entre sí, por reglas bien conocidas. Unas relacionan variables de un mismo tipo, geométricas o mecánicas, y otras las de un tipo contra las de otro, a saber:

1. El sistema mecánico aplicado a la totalidad del objeto, o a cualquiera de sus partes, incluyendo acciones e interacciones, debe formar un sistema nulo. Se conoce como condición de *equilibrio*.

2. El movimiento de cada punto o sección debe ser único, independientemente de considerarlo formando parte de una u otra de las piezas que concurren en él. Se conoce como condición de *compatibilidad*.

3. La deformación entre cada par de puntos define inequívocamente la tensión que existe entre ellos, de acuerdo con el material que sea[2]. Es lo que se conoce como *relación de tensión a deformación*[3]. Puede referirse a secciones, y entonces es la relación, por ejemplo, de solicitación a curvatura. Si es entre puntos, para algunos materiales o niveles de tensión, puede expresarse como un simple coeficiente, que mide la relación, constante, entre tensión y deformación, denominado módulo de elasticidad, simbolizado con **E**. En general la cuantificación de esta cualidad se denomina *rigidez*.

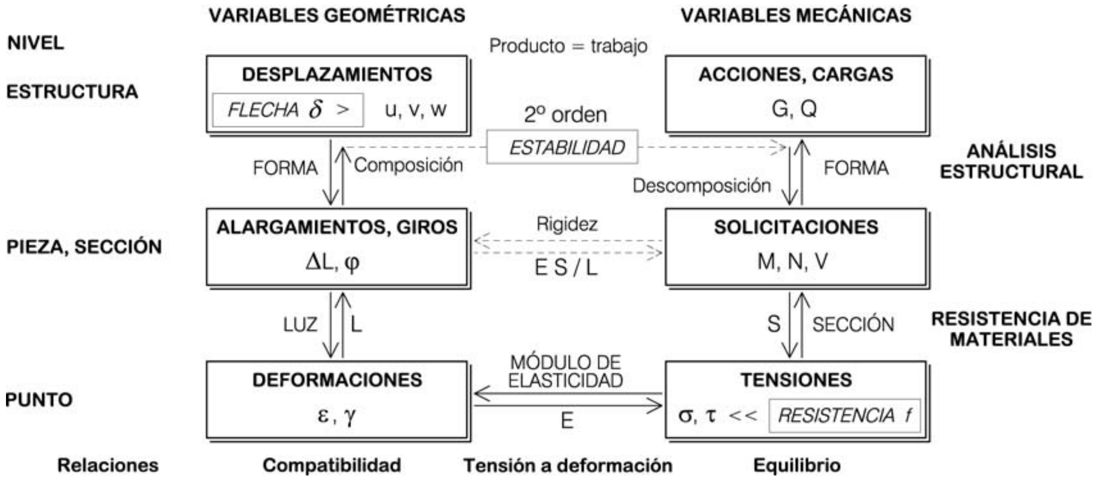


Figura 1. Relaciones entre las variables estructurales

[1] En algunos textos etiquetadas de *cinemáticas*. Deformación se refiere al cambio de forma, no a movimiento como tal.

[2] No necesariamente al revés; la tensión puede no determinar inequívocamente la deformación, aunque siempre cabe algún artificio para conseguirlo, alterando levemente la precisión del cálculo.

[3] En algunos documentos esta relación se califica como *ley constitutiva* o *ecuación constitutiva*, barbarismo, que en castellano, como poco es un anacoluto.

A su vez, existen condiciones limitativas para el valor que pueden alcanzar estas variables.
En las de tipo mecánico los requisitos se refieren a una limitación de la tensión, de acuerdo con la resistencia del material. Hasta hace unas décadas, la condición se predicaba de la tensión existente en cualquier punto, criterio conocido como de *tensiones admisibles* (que todavía sobrevive, aunque enmascarado, en relación con el terreno). El concepto de seguridad se establecía por entonces, sin cuantificar expresamente, asignando a cada material tensiones admisibles convencionalmente seguras, que no debían superarse en ningún punto.
Debido a que en general la seguridad del conjunto no se corresponde con la de un punto, ya que cuando sólo uno sobrepasa la tensión admisible, el conjunto tiene todavía, por acomodaciones plásticas, mucho margen, en la actualidad el criterio de seguridad es el del alcance de una *situación límite*[1]. Se dice que la estructura tiene un coeficiente de seguridad, **X**, cuando, considerando[2] acciones **X** veces mayores que las previstas[3], se alcanza una situación límite, tal como un colapso parcial o total, o una deformación o movimiento incontrolado. No una cierta tensión, sino un patrón de agotamiento global.
El valor[4] de **X**, explícito, puede matizarse, a partir de factores específicos no sólo para cada material, sino para cada variable implicada, por ejemplo para cada acción o combinación de acciones, de acuerdo a su diferente probabilidad de ocurrencia, o para cada método de cálculo usado, de acuerdo con su fiabilidad, o para cada modalidad de colapso, según su grado de fragilidad, o capacidad de aviso o readaptación plástica posible, etc. El sistema de establecer el grado de seguridad a partir del producto de varios factores recibe el nombre de método de *coeficientes parciales.*

En las variables estructurales de tipo geométrico, las limitaciones son a los movimientos macroscópicos o integrales, tales como *flecha* o *desplome*, entre otras cosas para confirmar que, del objeto, se ha adoptado un modelo estructural acertado, ya que estructura no es sino lo más rígido de entre lo que compite para serlo, y por tanto sus movimientos deben ser pequeños. En otro caso, lo considerado no sería la verdadera estructura del objeto, papel que estaría siendo suplantado por otras partes que suministran una respuesta más rígida. Sobre los movimientos locales, deformaciones, en tanto están ligados a las tensiones, ya limitadas, no hace falta imponer condiciones explícitas. Las limitaciones geométricas se imponen para las acciones previstas[5], sin coeficiente de seguridad alguno, entre otras cosas, porque con las acciones correspondientes a la situación de colapso, en pleno proceso de desplazamiento incontrolado, por definición, las deformaciones pueden ser indeterminadas.

El itinerario o la manera de ensamblar las reglas que relacionan las variables del problema, y de cuándo o cómo introducir las limitaciones antedichas, depende de qué sea lo que se conozca o adopte como dato, y lo que se pretenda deducir del proceso, o incógnita. No es lo mismo resolver el problema de proyecto (la solución estructural es la incógnita) que el de peritaje (la incógnita es el coeficiente de seguridad). En los apartados que siguen se explica cada uno de ellos, y las ventajas o aplicaciones específicas de cada método.
El conjunto de variables y sus relaciones, que deben respetarse en cualquier método, se esquematiza en la figura 1.
En el itinerario directo, a partir de las acciones, (**G, Q**) el equilibrio por descomposición condiciona las solicitaciones[6] en cada sección (**M**, **N**, **V**) y en último término, las tensiones ($\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\tau}$). De las tensiones se puede pasar a las deformaciones, ($\boldsymbol{\varepsilon}$) a través de las relaciones del material, e integrando éstas, a los desplazamientos de los puntos (**u**, **v**, **w**).

---

[1] Aunque que para algunos materiales, como madera, o problemas, como inestabilidad, el alcance de cierta tensión en un solo punto ya significa una situación límite.

[2] En algunos casos, como fábricas, no sensibles al valor de la tensión, pero si a la posición geométrica de la solicitación, hay que definir otro criterio para cuantificar la seguridad, por ejemplo, de tipo geométrico.

[3] Las establecidas en los códigos. Sin perjuicio de que, al dar los de las acciones variables, se tome el valor máximo con una probabilidad dada, (valor *característico*), lo que supone otro sesgo del lado de la seguridad.

[4] Como símbolo para el coeficiente de seguridad se suele usar la letra griega $\boldsymbol{\gamma}$ (gamma), que en ocasiones puede referirse a peso específico (del terreno), o deformación unitaria angular, como aparece en la figura 1.

[5] Si el valor de las acciones variables es el *característico* o máximo probable, para el cálculo de deformaciones se usa un valor *medio*, generalmente definido como una fracción del anterior.

[6] En algunos textos antiguos reciben el nombre, completo y muy adecuado, de *solicitaciones intermedias.*

En sentido inverso, si el dato son los desplazamientos, por comparación o resta de los de puntos próximos, se pueden deducir las deformaciones, de éstas las tensiones, y por equilibrio, la composición o suma de las de cada elemento, se puede deducir la carga que actúa sobre él. (Véase ejemplo 1)
El lector podrá encontrar por su cuenta otras maneras híbridas de llegar al valor de cualquiera de las variables en unos puntos si se conocen los de otras en número suficiente.

En la figura 1, de arriba abajo, las magnitudes de la fila superior corresponden al nivel de estructura, las de en medio, al de elemento, como barra, y las de la fila inferior, al de punto. Las de la columna izquierda son las geométricas y las de la columna derecha las mecánicas. La relación o cociente de cada mecánica a su correspondiente geométrica es la rigidez, de punto (módulo de Elasticidad), barra o estructura. El producto expresaría el trabajo de deformación, asimismo a nivel de punto, de barra o de la totalidad de la estructura. El paso de la primera a la segunda fila implica a los términos de configuración geométrica, o *forma*, por ejemplo ángulo entre barras, que es lo que sirve a los propósitos de composición de movimientos y descomposición de fuerzas. (Véase ejemplo 2) En el de la segunda a la tercera intervienen las variables locales, de sección en lo mecánico, y de luz en lo geométrico[1]. La ciencia que trata de las relaciones entre las dos casillas superiores es el *Análisis Estructural*, mientras el de las dos inferiores, determinando capacidades resistentes de diferentes tipos de secciones y materiales, se conoce como *Resistencia de Materiales*.
La comprobación de las limitaciones geométricas (de *rigidez*) se hace a partir de los desplazamientos (casilla superior izquierda), y las mecánicas, (de *resistencia*), a partir de las de tensión del material (casilla inferior derecha), o de la capacidad resistente de sección o pieza, si se ha procedido a determinarlas independientemente. Las de *estabilidad* se ocupan de que no haya círculo vicioso que incremente imparablemente tensiones y deformaciones por acople de ambas.

2. ANÁLISIS LINEAL

Si el problema es *isostático*, se puede pasar numéricamente de cualquier variable a la inmediata, en ambas direcciones. Se puede ir de carga (si es el dato) a desplazamiento y viceversa. Y se puede decidir la sección sobre la marcha, a base de la condición de resistencia. Los únicos procesos de cálculo son los de descomposición de fuerzas en solicitaciones, y composición de alargamientos en desplazamientos.
Pero en general no se puede pasar numéricamente de las cargas a solicitaciones por descomposición, porque hay más incógnitas que condiciones; considerando sólo la condición de equilibrio, hay infinitas soluciones. Se dice entonces que el modelo estructural es *redundante* o *hiperestático*. Siempre se puede pasar de desplazamientos a cargas, pero usualmente el dato es lo segundo y lo primero es desconocido. En ese caso, sólo cabe una estrategia compleja, mezclando el camino directo y el inverso[2]. Se recorre el camino de desplazamiento a carga en forma algebraica, con los desplazamientos como incógnitas. Al final, identificando la resultante mecánica en cada punto con la carga que actúa en él, se establece un sistema con igual número de ecuaciones que incógnitas. (Véase ejemplo 3)

Y aquí está la clave de la denominación de *lineal* para este tipo de análisis. La descomposición o composición de fuerzas por equilibrio (regla 1) es lineal: doble dato da lugar a resultado doble. La composición de movimientos (regla 2) no es estrictamente lineal, pero si se consideran sólo desplazamientos pequeños (era una condición intrínseca a la condición de estructura), puede considerarse lineal[3]. Y queda el material (regla 3). Basta pues restringir el análisis a cuando se puede simular la relación de tensión a

[1] El lector sabrá disculpar que, en esta presentación simplista, se obvien fenómenos peculiares, como pandeo, que tendrán su tratamiento adecuado oportunamente, y que si se intentan considerar ahora, pondrían en peligro la comprensión del discurso principal.

[2] En algunos documentos, asimismo antiguos, se presentaba con el nombre de *método semiinverso*.

[3] No sólo las deformaciones, sino además los desplazamientos o cambios de forma deben ser pequeños, en comparación con las dimensiones correspondientes de la *forma* original. En otro caso, podrían alterar sensiblemente el valor de las solicitaciones, caso típico en compresión (pandeo). En esos problemas la estructura debería analizarse en la situación deformada, (análisis de *2º orden*), lo que complica mucho el proceso. Cabe resolver el problema iterativamente, pero no puede determinarse de antemano que converja, lo que llevaría a una situación de *inestabilidad*.

deformación con un valor fijo. Con estas premisas, el sistema algebraico resultante es lineal, de ecuaciones[1] del tipo $\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{F}_j$ que relacionan desplazamientos con fuerzas. Puede comprobarse, con un caso sencillo, que los coeficientes **K** representan la rigidez, o cociente de la fuerza en un punto al desplazamiento en otro. Y de ahí el nombre de *matriz de rigidez* con que se conoce a ese conjunto de valores.
De un sistema lineal está establecido cómo saber si tiene solución[2], y cómo obtenerla, para lo que basta, con una rutina matemática bien conocida, invertir la matriz[3], obteniendo los desplazamientos desconocidos en función de las acciones conocidas. Y, como se tienen las claves de la descomposición de fuerzas, ya que se ha obtenido su composición, recorriendo ahora el camino directo, que es más corto, se puede llegar a las tensiones, y el caso queda resuelto.

En sistemas estructurales de barras, el modelo suele adoptar cada una de ellas como un elemento, resultando un número prefijado de antemano. El de ecuaciones es directamente el de barras, multiplicado por el de incógnitas de cada una, que es el orden de la matriz de rigidez, (o número de *grados de libertad*), por lo que el método recibe también la denominación de *Análisis Matricial*.
Si el sistema es continuo, como en losas, en dos dimensiones, o macizos, en tres, para el análisis se procede a representar el continuo por elementos discretos de tamaño arbitrario, en número que procede de un pacto entre la viabilidad de cálculo, por tamaño del sistema de ecuaciones y velocidad de proceso, contra la precisión. La matriz no representa pues tanto la rigidez de la estructura cuanto del modelo usado, y caben muchos. El método, generalización del anterior, que en ocasiones se programa para aceptar tanto barras como elementos de tamaño discreto, se conoce como *Método de Elementos Finitos*[4].

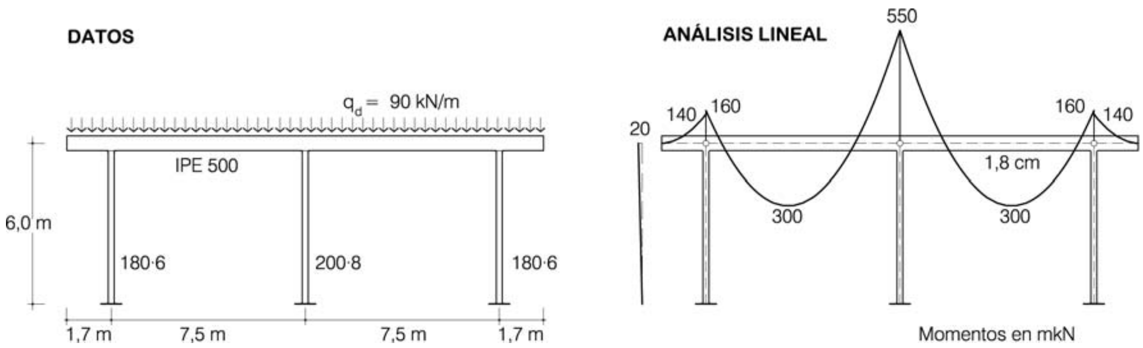


Figura 2. Análisis lineal de un pórtico de acero

El análisis lineal tiene un campo específico de aplicación. No resuelve cualquier problema, sino uno muy determinado, aunque pueda tratar de utilizarse para otros, pero, como veremos, con eficacia cuestionable.
El análisis lineal se destina al problema de conocer tensiones y deformaciones de un sistema estructural, siempre que éste respete las condiciones establecidas antes: deformaciones pequeñas y material lineal.
Para el análisis lineal, son datos las acciones y la definición geométrica completa del sistema: disposición estructural, luces y secciones, así como el material de cada elemento. Los resultados, véase la figura 2 con un ejemplo, son las solicitaciones mecánicas, (a nivel de sección) o tensiones (de punto), y las deformaciones o desplazamientos correspondientes[5].

---

[1] Para simplificar la notación se usa el convenio de Einstein. Cuando en un producto aparece un subíndice repetido, se debe entender que representa el sumatorio para todos los valores de ese subíndice.

[2] Si el determinante de la matriz es nulo, no hay solución, (no hay matriz inversa) y la explicación física es que la estructura es inestable (es un mecanismo), y puede sufrir desplazamientos ilimitados sin respuesta mecánica.

[3] Antes de la aparición de ordenadores, (hacia 1970), no era viable la resolución de sistemas de más allá de seis u ocho ecuaciones, por lo que se usaban métodos de aproximaciones sucesivas, como el que propuso H. Cross hacia 1930 y que lleva su nombre.

[4] La traducción del inglés no es muy acertada. El término "*finitos*" no se refiere, por ejemplo, a lo opuesto a "*gruesos*". Quiere expresar lo opuesto a infinitos, o en número infinito, es decir de tamaño limitado o finito, como lo opuesto a tamaño infinitesimal. Sería por tanto más propio decir *método con un número finito de elementos* o *método de los elementos de tamaño discreto.* En castellano los numerales no se disponen en plural (en inglés los adjetivos no tienen plural)

[5] Los valores están expresamente redondeados. Como se verá luego, apenas 1 mm de imperfección, algo imperceptible, puede afectar a la decena de mkN. Las solicitaciones corresponden a la carga *de cálculo* (mayorada), y la flecha a la carga real.

El método parece incuestionable, y el más universal, o al menos el más implantado en ordenadores, dado que, al proceder de una formulación sistemática, es muy fácil de programar en lenguajes algebraicos ordinarios. Pero esconde algún que otro equívoco, y tiene varios puntos débiles, que conviene destacar.

2.1 El equívoco

No es inmediato detectarlo, pero aunque parece que el análisis lineal resuelve todo, en realidad no sirve para calcular nada. Hay que darle, como dato, todo decidido. Sólo sirve para conocer cómo se comporta una estructura completamente definida, y comprobar si satisface los requisitos esperados. No sirve para dimensionar, porque tiene que estar antes todo dimensionado. Con el análisis no se obtiene la respuesta a qué sección dar a cada pieza. Deben estar decididas. Y menos aún para diseñar. No ofrece respuestas a la pregunta de qué hacer, o sea, si poner o no soportes, cuántos o dónde. Eso debe estar determinado, y el análisis sólo sirve para poner a prueba algo perfectamente detallado.

El predominio, abusivo, de que el análisis lineal figure como método de análisis por excelencia, tiene un resultado perverso. Fija, incorrectamente, la idea de que las solicitaciones proceden de un cálculo y que son siempre incógnitas que deben obtenerse de un proceso. Y no es así. En efecto, con análisis lineal, las secciones se deciden, y los momentos flectores se calculan. Pero en otros problemas, con otro itinerario, puede que sea al revés, y que los momentos flectores se decidan y sean las secciones las que se calculen. En rigor decidir y calcular se diferencian en poco. Se dice decidir a los valores que se determinan al principio del proceso, cuando hay mucho margen de maniobra, y calcular a los del final, cuando su valor está fuertemente condicionado por los anteriores o casi inequívocamente determinado por ellos. Como sucede al resolver un crucigrama. Pero, como en el crucigrama, al final, si el conjunto satisface todas las reglas, no importa en qué orden se procedió.

Si el análisis necesita partir de valores definidos de las secciones, para determinarlas debe utilizarse otro procedimiento previo, diferente. El análisis no sirve para el propósito del dimensionado. Evidentemente se puede aplicar reiteradamente a diferentes dimensionados hasta encontrar uno que satisfaga. Pero nótese que, en cuanto a solución estructural se refiere, quedarse corto, con secciones insuficientes, no es válido, y pasarse significa una solución más costosa. De manera que lo que se pretende es algo así como "*acertar*". Y si el problema tiene, como es usual en edificios, unos centenares de piezas, acertar en todas al tiempo, probando un dimensionado tras otro, sin orden ni método, es inviable. Conviene pues acortar el proceso, partiendo de una solución medianamente razonable o próxima a una aceptable. Y para determinar ese dimensionado de partida, no sirve el análisis.

En cualquier caso, el lector habrá ya advertido que, para una configuración estructural dada, no hay *una* solución de dimensionado (ya que cada una conduce a solicitaciones diferentes), sino muchas, y encontrar una de ellas o saber cuántas hay, no es algo calculable a través del análisis. El análisis todo lo que puede confirmar es si la adoptada es válida. Nada más, aunque no sea poco. Mediante el análisis no se calcula la estructura; se apuesta por una y ese proceso suministra la puntuación de cómo cumple.

2.2 Los puntos débiles. Comprobación del grado de seguridad.

Matizando lo anterior, el análisis lineal ni siquiera sirve siempre para concluir acerca de la validez de una solución. O, con más rigor, sirve siempre para confirmar si la solución adoptada es válida, pero no siempre si es inválida. El resultado del análisis de una estructura dimensionada, ofrece el resultado de tensiones y deformaciones. Y con los valores de las deformaciones sí se pueden comprobar las limitaciones geométricas. Pero puede no servir para comprobar las mecánicas.
Porque el análisis lineal (Cross, matricial, elementos en número finito) no accede a obtener siempre cuánta es la seguridad, ni siquiera si la hay. Evidentemente, si tras el análisis, se comprueba que todos los puntos (secciones) tienen tensiones (solicitaciones) soportables, es decir seguras, puede concluirse

que el conjunto tiene *al menos* tanta seguridad como la que se pretendía. Pero el inverso no es cierto. Si, no sucede eso, como en el caso de la figura 2, en el que la viga del dintel no puede soportar el momento que hay sobre el soporte central[1], de ahí no se deduce necesariamente que a la solución le falte seguridad. En ese caso el análisis no sirve para dar ninguna respuesta. Aunque a través del análisis se puede proceder, con reservas, a resolver el problema de proyecto, para lo que es totalmente incapaz es para dar respuesta al problema del peritaje. En cuanto a validar o invalidar, como sucede con otras pruebas que operan de un lado, como la "*regla del nueve*", el análisis sirve para lo primero, pero no para lo segundo.

La clave es la locución *al menos*. Si todo sale seguro, el análisis puede concluir que al menos se tiene una cierta seguridad, pero no cuánta más. Y si no todo sale seguro, como en este ejemplo, y puede haber más seguridad, no se sabe si es suficiente o no[2]. Cuando la seguridad se predicaba como propiedad de punto (tensiones admisibles), el método de análisis lineal era concluyente para eso. Pero desde hace décadas, el coeficiente de seguridad se mide a través de coeficientes parciales aplicados a las variables del proceso, cuando se detecta que el sistema estructural alcanza una situación límite. Y en muchos materiales, antes de llegar a ese punto, se ha tenido que pasar por fases en las que se ha perdido la proporcionalidad entre tensión y deformación, y eso, por definición, es inabordable por el análisis lineal.

En acero laminado esto es algo rotundo, al menos en flexión y en secciones robustas, como las que se usan habitualmente en obras de arquitectura. Véase el ejemplo de la figura 2. Se parte del pórtico dimensionado[3], y se realiza el análisis. Las deformaciones entran en lo tolerable. En cuanto al requisito mecánico, la sección más solicitada, la central, tiene un momento insoportable. ¿El pórtico es inseguro? Con el análisis lineal no se puede saber. Aplicando otros métodos más potentes, que llegan más lejos, se podrá concluir que la solución no sólo no es insegura, ni estrictamente segura; sino que es incluso *sobresegura,* o sea más segura que lo requerido. Le sobra seguridad y se podrían reducir las secciones.

El análisis ha realizado el proceso con un módulo de elasticidad, o lo que es lo mismo, suponiendo proporcionalidad entre tensión y deformación, operando sólo con la rama inicial del diagrama del material. ¿Qué sucede si se considera el siguiente tramo, con tensión constante y deformación prácticamente ilimitada? Pues que el pórtico acepta más carga. Al aumentar la carga, en la sección central se mantienen las tensiones de los bordes, pero pueden aumentar las del interior, incrementando la capacidad resistente de la sección. Eso sí, perdiendo la proporcionalidad de momento a curvatura. Y aun es posible más carga, ya que la sección central puede girar plásticamente, manteniendo el momento, mientras las demás aumentan la solicitación, pero con otra relación distinta de incremento de carga a deformación.
El análisis lineal no permite pues obtener el grado de seguridad de la solución.
En hormigón armado, la ganancia de seguridad por readaptación plástica está acotada, pero no es nada desdeñable, y la conclusión es conceptualmente la misma.
En madera, sin embargo, no caben plastificaciones. El estado límite se asocia al alcance, en alguna sección, de un cierto valor de tensión, y por tanto el uso del análisis lineal no plantea reservas[4] (salvo las que luego se verán a propósito de las imperfecciones inevitables).

La conclusión es que el análisis lineal es el apropiado al sistema de comprobación de tensiones admisibles, pero puede no contestar a cuál es la seguridad si ésta se formula en términos de estados límite. Es por eso, que tras haberse implantado en programas de ordenador, a mediados del siglo pasado,

---

[1] Una viga de perfil IPE 500, aun con una tensión en bordes igual a la máxima posible, la resistencia de cálculo del material (S275), tiene una capacidad de sólo 480 mkN, e incluso con la sección completamente plastificada (habiéndose perdido la linealidad), no llegaría más que a 520 mkN, y la sección citada está solicitada por 550 mkN.

[2] Lo sorprendente no es pues que circulen infinidad de proyectos obtenidos a través del análisis lineal, algo que, como veremos, tiene alguna coartada, sino que de manera sistemática, se presenten peritajes en pleitos judiciales millonarios, (firmados incluso por conspicuos miembros de la comunidad universitaria) de edificios de hormigón armado, que concluyen la invalidez de dimensionados ya hechos, y lo obtienen a partir de un análisis lineal, algo que le es absolutamente inaccesible a esa herramienta. De ahí el equívoco de denominarlo "*cálculo*". Si se dice haber "*calculado*" la estructura, con el resultado de que no tiene la seguridad pretendida, la confusión está servida. El análisis lineal no permite sacar esa conclusión, y menos con hormigón armado.

[3] Como puede comprenderse, hay trampa. A ese dimensionado se llegó tras varios tanteos de análisis previo.

[4] Aunque, por lo general, en madera lo que abundan son las soluciones isostáticas, en las que de todas maneras, no hace falta análisis como tal.

debería haberse revisado profundamente su aplicabilidad cuando se estableció en acero y hormigón que la comprobación era con ese sistema, y que se podían aprovechar las readaptaciones plásticas de su modelo de material[1], en términos de sección o de pieza. Inexplicablemente, se sigue usando tal como se formuló originalmente.

Evidentemente, para adecuarse a este contexto plástico de comprobación en estados límite en los que hay implicadas readaptaciones plásticas, se podría seguir usando las rutinas del análisis lineal, modificando la rigidez de las piezas afectadas, una tras otra, hasta llegar a una situación límite. Pero es un proceso difícilmente automatizable y en general no disponible. Contando con que a su vez, debe hacerse con toda la batería de los dimensionados que se ponen a prueba, la solución no resulta viable, ya que supone un número desorbitado de cálculos, comparado con las alternativas que se verán posteriormente.

2.3 La asimetría

El otro punto débil del análisis lineal es la asimetría de rigidez de algunos materiales, como fábricas u hormigón (en masa, dejando aparte la armadura). Este tipo de materiales presenta una rigidez extremadamente diferente a tracción y compresión. En realidad, para compresiones o tracciones diminutas, el módulo de elasticidad puede ser el mismo. Pero la resistencia a tracción es muy pequeña. Así que para estiramientos grandes, el material ha roto y no presenta respuesta a tracción, de manera que para el análisis es como si tuviera rigidez nula.
Eso distorsiona todo el procedimiento. Nótese que el método de análisis lineal representa el material con un valor de rigidez, uno único, que al multiplicar a acortamientos da lugar a tensiones de compresión y a alargamientos a tracción. Pero como, en todo el proceso, la variable de deformación es incógnita, se usa un término algebraico, sin saber si es acortamiento o alargamiento hasta el final, cuando se despeje su valor. Así que el método no permite implantar el distingo de si tracción o compresión. Tiene, necesariamente, que manejar ambas cosas de igual manera, porque el método describe el material en términos sólo de rigidez, aceptando un único coeficiente para ello.

Si se aplica el método de análisis lineal, tal cual, a materiales como la fábrica de ladrillo, desatina. La manera más directa de verlo es vía trabajo. Para la parte final del proceso del análisis suele utilizarse la formulación en trabajo, que es más sencilla de computar, aplicando el principio, equivalente al equilibrio, de que la solución es la que conduce a un mínimo de trabajo de deformación. Que, en cada punto no es sino el producto de tensión ($\boldsymbol{\sigma}$), por deformación ($\boldsymbol{\varepsilon}$), que se puede poner como $\boldsymbol{\sigma}/\mathbf{E}$. Y naturalmente, en tracción, si $\mathbf{E}$ es nulo, el trabajo es infinito. Así que la solución debe huir de la tracción. La solución, si la hay, debe estar formada, con preferencia o sólo por partes comprimidas.
Era de prever. Si lo estructural es lo más rígido de lo que haya, cuando el material presenta rigidez nula a tracción, hará todo lo posible para encontrar el equilibrio sólo a base de compresiones. Pero el análisis lineal, enfrentado a ese problema, buscará la solución en un pacto similar entre tracciones y compresiones. Disparata.

El error no proviene del planteamiento de método, que es impecable, sino del procedimiento de buscar la solución. Tal como se suele programar, el método pide un único valor de rigidez, monta la matriz, y la invierte, despejando el valor y signo de cada deformación. O lo que es lo mismo, supone que la rigidez es simétrica. Cuando el material tiene diferente rigidez a compresión y tracción debería buscar el mínimo del trabajo de manera explicita, computando por separado el de tracción y compresión.

Veámoslo con el dintel de la figura 3, una pieza sometida a carga uniforme y sustentada en los extremos En esos puntos puede o no echar mano del rozamiento. El caso **A** corresponde al clásico de la viga simplemente apoyada. Las líneas representan la trayectoria de solicitaciones, compresión por arriba y tracción por debajo, con un máximo de **N**. Cabe que haya algo de rozamiento, por ejemplo de valor **N**,

[1] En acero se establece desde la primera norma publicada (MV-103 en 1972), aunque todavía no aparecía la denominación de *estados límite*. En hormigón, con la norma de 1973, explicitando ya esa denominación (aunque aparecía incorrectamente traducida como *estados límites*, locución que todavía se sigue copiando).

como se muestra en el caso **C**, lo que reduce las tracciones a **N**/2, a costa de aumentar las compresiones a 1,5·**N**. El caso extremo sería el **E**, sin tracciones, pero con una compresión máxima de valor 2·**N**.

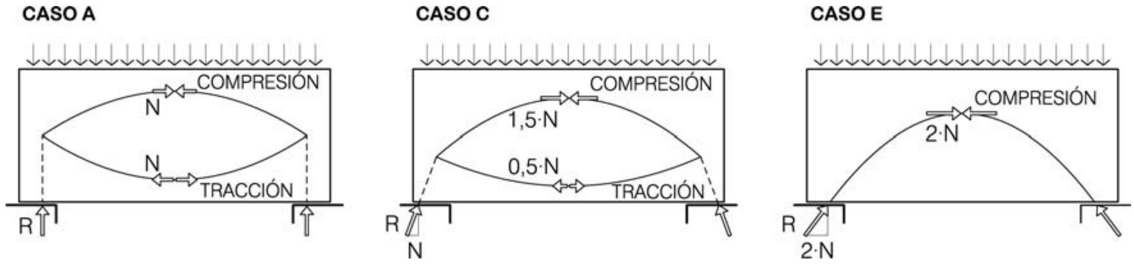


Figura 3. Distintas soluciones de un dintel apoyado

¿Cuál es la solución? La que conduzca al mínimo de trabajo de deformación (suma de productos de tensión por deformación, extendida a todos los puntos). Dado que todos los términos de la integración del trabajo son proporcionales, bastará proceder con el del punto central. Simbolizando la rigidez a compresión con **K** y a tracción con **K**', recordando que la deformación es la solicitación partida por la rigidez, y partiendo de, por ejemplo, **N** = 4 (el valor es indiferente), los resultados serían:

Caso	**Trabajo de deformación**	**K'=K**	**K'** = **K**/100
A:	**W** = 4 · 4 /**K** + (-4)·(-4/**K'**) = 16 / **K** + 16 / **K'**	32 / **K**	1616 / **K**
B:	**W** = 5 · 5 /**K** + (-3)·(-3/**K'**) = 25 / **K** + 9 / **K'**	34 / **K**	925 / **K**
C:	**W** = 6 · 6 /**K** + (-2)·(-2/**K'**) = 36 / **K** + 4 / **K'**	40 / **K**	436 / **K**
D:	**W** = 7 · 7 /**K** + (-1)·(-1/**K'**) = 49 / **K** + 1 / **K'**	50 / **K**	149 / **K**
E:	**W** = 8 · 8 /**K** + (-0)·(-0/**K'**) = 64 / **K** + 0 / **K'**	64 / **K**	64 / **K**

Por tanto, en un material de rigidez simétrica, el mínimo es el **A** (aunque por poco), que es lo que obtiene el análisis lineal programado por inversión. Si la programación fuera por búsqueda del mínimo, y se le da como semilla la solución **C**, rápidamente hubiera deducido que, quitando rozamiento, pasando a la **B**, disminuye el trabajo, por lo que al final hubiera llegado igualmente a la **A**.
Pero si el material es asimétrico, como la piedra, y la rigidez a tracción es mucho menor, (pongamos por caso **K**' = **K**/100), los segundos sumandos de la cuenta anterior pesan más (son cien veces mayores), y el mínimo corresponde a otro caso. Si el programa de cálculo matricial es clásico, para que analice en piedra, todo lo que hace es cambiar el módulo de elasticidad, pero seguirá respondiendo que la solución es la **A**. Si se le pudiera decir que la rigidez a tracción es incomparablemente menor que a compresión, y el programa buscara el mínimo, al darle como semilla el caso **C**, inmediatamente viraría hacia **D**, y acabaría encontrado el mínimo en **E**. Justo lo contrario del que no contempla la asimetría de rigidez y procede por inversión de la matriz.
El comportamiento de los materiales frágiles no pueden expresarse en términos de un solo valor de rigidez, por lo que, con ellos, no cabe análisis lineal que proceda por inversión.

En resumen, el análisis lineal normal dice que la solución es la **A**, tanto si es acero como si es piedra. Un programa inteligente diría que con acero es la **A**, con tracciones iguales a compresiones, sin echar mano de rozamiento, y con piedra la solución es la **E**, con sólo compresiones echando mano del máximo rozamiento para ello. Con materiales frágiles, el análisis lineal normal encuentra la solución en el extremo opuesto; corrige en la dirección equivocada.
Por eso, cualquier análisis con piedra, ladrillo u hormigón, que se haya hecho con método matricial, debe ponerse inicialmente bajo sospecha.

3. CÁLCULO PLÁSTICO

Para comprobaciones de deformación, con las cargas reales, las tensiones suelen estar en la parte elástica del diagrama, por lo que, si no hay reservas como las comentadas, el análisis lineal ofrece una formulación que ensambla todas las reglas y permite llegar de cargas a desplazamientos y viceversa.

Pero si se intenta comprobar resistencia, para las cargas *de cálculo* (las reales multiplicadas por la seguridad), y el requisito se establece como una situación límite, las tensiones pueden haber invadido la zona plástica, y se pierde la proporcionalidad en relación de tensión a deformación. Las variables y su forma de relacionarse siguen siendo las de la de la figura 1, pero ya no pueden ensamblarse y dejan de valer las expresiones del análisis lineal (fórmulas, ecuaciones, sistema, matriz, inversión). Como mucho el análisis podría contestar si hay seguridad, pero ni cuánta, ni que no la hay. Para ello hace falta otro procedimiento, que puede denominarse cálculo, adjetivado de *plástico*, como contraposición al análisis lineal que opera en *elástico*.

El ejemplo de la figura 2 sirve perfectamente a los propósitos de explicar este método. El dintel alcanzará una situación límite cuando, tras plastificaciones de sección, y giros plásticos en la primera sección que alcance esa situación[1], ambas secciones, la de vano y la situada sobre soporte el central, hayan llegado al máximo momento que son capaces de soportar. En ese instante no caben ya incrementos de momento (de tensión) y sí un crecimiento imparable de deformación.

Para determinar esa carga, como se parte del dato de cuál es la sección, (seguimos en un problema de comprobación), se puede proceder a determinar (si no está ya tabulado previamente), cuál es la capacidad resistente a flexión, a partir de un diagrama de tensiones de tracción en media sección y compresiones en la otra media, iguales en todos los puntos a la resistencia del acero.

A partir de ese valor se puede reconstruir el diagrama de momentos que en ambas secciones tenga ese valor (y en la del soporte extremo la correspondiente al vuelo), véase figura 4. La identificación de la sagita de la parábola con el valor $\mathbf{q}\cdot\mathbf{L}^2/8$ permite deducir el valor de carga[2] que produce esa situación límite.

Y por fin el cociente de esa carga última a la realmente actuante, es el coeficiente de seguridad buscado.

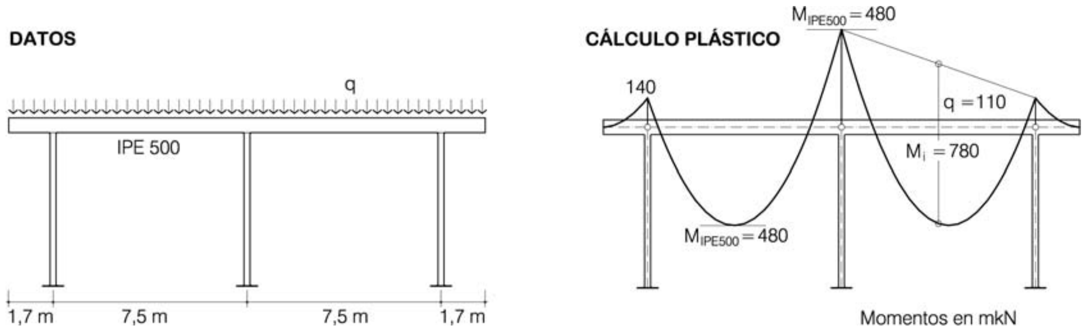


Figura 4. Comprobación del coeficiente de seguridad por cálculo plástico

Como puede observarse, lo que se ha hecho es recorrer, de abajo a arriba, de tensión a carga, la columna derecha de la figura 1, con los valores correspondientes a la situación límite analizada.

En este ejemplo, aunque no se han usado los resultados del análisis lineal, y en efecto, podría no haberse hecho, se barruntaba que la estructura podía ser segura, y porqué y dónde tenía margen adicional. Sin ese precedente, debería haberse procedido a recorrer completo todo el itinerario de la figura 1, desde desplazamientos, a carga, todo bajo el enfoque de analizar una situación límite. El procedimiento partiría de la deformación **u**, pero no en valor, sino simplemente de la consideración de que es ilimitado en el centro de vano. Introduciendo el resto de condiciones geométricas del problema, eso lleva, por

[1] Ni siquiera hay que saber cuál es, aunque de los resultados del análisis elástico hecho, se puede deducir que es la situada sobre el soporte central. Pero las conclusiones de cuánto valga el coeficiente de seguridad no dependen de cuál sea.

[2] En general, esta parte del proceso, que no es sino el de plantear el equilibrio, y que en este caso es inmediato, sobre todo con sistemas que exigen manejar tres dimensiones, como losas, se formula mejor en término de trabajo. La paternidad del planteamiento y método puede atribuirse a K.W. Johansen, en su tesis *Brudlinieteorier* (líneas de rotura) de 1943.

comparación, a giros ilimitados en al menos vano y sección de soporte central. Y eso hubiera llevado a deformación ilimitada en todas las fibras de esas dos secciones, y proseguiría como se ha mostrado.
Nótese que el método de cálculo plástico no realiza análisis alguno en el sentido del análisis lineal, no depende de la rigidez (ésta sólo interviene en el valor de la deformación para la carga real actuante), y no tiene complejidad algebraica (no tiene que resolver ningún sistema de ecuaciones, ni invertir ninguna matriz). Es directo, parte de datos numéricos, y con operaciones numéricas, llega al resultado. (Véase ejemplo 3b)

Sin embargo mirando con atención, este método no obtiene realmente el coeficiente de seguridad de la estructura, sino de la situación límite considerada. Y eso implica, como no podía ser menos, algunos puntos débiles específicos.
Lo que se obtiene con este cálculo plástico no *es* el valor de seguridad. Permite concluir que la estructura tiene, *como mucho*, ese margen. La carga no puede superar el valor obtenido, porque el sistema colapsaría como se ha considerado, pero podría suceder que colapsara antes, con una carga menor, con un mecanismo diferente. Por ejemplo, en el caso de la figura 2, no, pero con otra combinación de carga contra luz, podría fracasar antes por cortante. Si el método *elástico* opera del lado de la seguridad, y cuando se ha comprobado una estructura, se concluye que tiene esa seguridad o algo más, con el *plástico* se concluye que tiene la seguridad obtenida o menos. Opera del lado opuesto al otro. Si el elástico obtiene una cota inferior del coeficiente de seguridad, que podría ser mayor, el plástico obtiene una cota superior; más no puede tener, pero no se sabe cuánto menos. Es una desventaja crucial. En sistemas estructurales no explorados previamente, no es fácil saber si el resultado da o no seguridad. Podría dar una respuesta optimista y la estructura ser mucho peor.

Así que si puede haber otra situación límite peor, no basta un cálculo; hay que hacer varios, o muchos. O parametrizar previamente las posibilidades y explorarlas metódicamente todas. O conseguir demostrar cuál es la pésima, algo que sólo se ha conseguido en unos cuantos problemas canónicos. En sistemas de barras, el número es necesariamente discreto, la exploración simple, y en general ya se sabe cuál, o entre cuáles puede estar la peor, rentabilizando mucho el uso del sistema. Pero por ejemplo, en sistemas continuos, como las losas, el número de posibles configuraciones de agotamiento es ilimitado, y eso representa un reto formidable, debiéndose manejar el método con pies de plomo, o circunscribirse sólo a los problemas conocidos. La configuración exactamente pésima suele ser matemáticamente inalcanzable. Y todo lo que se puede demostrar es que se está suficientemente cerca. Habrá que conformarse con eso.

Pero siempre el resultado final del coeficiente de seguridad obtenido es un límite superior y el real siempre será, aunque poco, inferior al que se obtenga con cualquier cálculo[1]. En problemas consuetudinarios, y de barras, como pórticos, como el del ejemplo, se sabe de antemano cuántas situaciones límite puede haber, y cuál es la peor, por lo que no se corre ningún riesgo.

Pero no hay más opciones. El análisis elástico (Cross, matricial, elementos de tamaño discreto), se queda por debajo del coeficiente de seguridad (en general muy por debajo), y el cálculo plástico algo por encima (en casos usuales muy poco). En comprobaciones, el análisis elástico sirve siempre para validar, pero generalmente no para invalidar, y el cálculo plástico al revés, sirve seguro para saber si está mal, pero podría no acceder con precisión a saber si está bien[2].

Para problemas habituales, interviniendo flexión, en hormigón y acero, es el cálculo plástico el que permite decidir atinadamente acerca de la seguridad.

---

[1] Por eso no está de más que, en el modelo, se introduzcan algunos sesgos del lado seguro, que compensen el tipo de tendencia del método. Por ejemplo, en el caso planteado, se ha despreciado lo que pueda suceder en el soporte extremo, como si la viga fuera pasante y estuviera simplemente apoyada en él. Probablemente admitirá más momento, pero, como el vuelo no, sería a costa de flexión en el soporte, que, estando ya comprimido, puede dar muy poco margen. Pero alguno sí dará.

[2] Puede muy bien suceder que se acabe en tierra de nadie, y no se haya podido determinar que es válido, pero tampoco demostrar que es inválido. En esos casos sólo vale afilar la punta del lápiz, para reducir la distancia entre los resultados de ambos métodos, o simplemente reconocer que los métodos disponibles no tienen porqué abarcarlo todo.

4. DIMENSIONADO

Los métodos anteriores responden al problema de comprobación. Ambos parten de la estructura completamente definida, y sólo responden a la pregunta de si se cumplen los requisitos o limitaciones establecidas. En general con el análisis elástico se comprueban los de deformación, y con cálculo plástico los mecánicos[1].

Queda pendiente algún método para dimensionar las secciones, que es realmente lo que se necesita al proyectar. Para la configuración general (tipo estructural, dónde se ponen soportes, qué material se elige para cada pieza, etc,), cabe suponer que se procede por reglas de diseño establecidas por exploración sistemática sobre precedentes o casos similares.

Dimensionar a través de análisis lineal es tortuoso. Se puede partir de un predimensionado, hecho a ojo de buen cubero, proceder al análisis, comprobar, y corregir, para volver a empezar. No es fácil converger en una solución viable. Aumentar las secciones que han resultado tener sección resistente insuficiente puede, en algunos casos, empeorar las cosas. En general al incrementar la sección, cambia también la rigidez, y eso altera las solicitaciones, con consecuencias difícilmente previsibles. En algunos casos la estrategia acertada es reducir las secciones de las piezas insuficientes porque eso reduce la solicitación a mayor velocidad. O puede que el sistema vaya dando tumbos de un lado para otro, sin llegar a ningún resultado plenamente satisfactorio. Cuando hay muchas piezas, el sistema es poco viable.
Y teniendo en cuenta además que el análisis lineal puede no acceder al valor real del coeficiente de seguridad de la solución, no parece un buen candidato para dimensionar.

Cuando es aplicable, el método de cálculo plástico tiene muchas más posibilidades, ya que, con un pequeño cambio de interpretación, los mismos o parecidos cálculos que se usan para comprobar pueden transformarse en los cálculos para dimensionar.
Sea el caso del pórtico analizado en la figura 2. La pregunta es, dada la carga, qué perfil poner. Es inmediato. Basta trazar la parábola correspondiente a $\mathbf{q}\cdot\mathbf{L}^2/8$, que pase por el momento del vuelo, y conduzca al mismo valor en vano y sobre soporte central[2]. Y luego elegir el perfil que tiene esa capacidad. En la figura 5 se muestra el resultado. En efecto, si se había concluido que el dimensionado original tenía seguridad sobrada, se comprueba que basta con un perfil menor.
En términos del diagrama de variables de la figura 1, se ha pasado de arriba a abajo, de cargas a tensiones, en la columna derecha. Con análisis lineal no se podía pasar de cargas a solicitaciones porque el problema era redundante. En plástico se puede. Se ha pasado de acciones a solicitaciones, decidiendo *arbitrariamente* la descomposición. Puesto que la plasticidad rompe la linealidad, la redundancia no se decide en clave de rigidez. La plasticidad transforma la dependencia de tensión con la deformación, en un valor constante, independiente de la deformación, y por tanto la regla adicional de la descomposición en casos de redundancia, es en clave de resistencia, no de rigidez. Pero si lo que se busca es que todo acabe teniendo asimismo suficiente resistencia, se concluye que el reparto puede ser arbitrario. Si la descomposición debe hacerse en base a la resistencia, para que acabe teniendo suficiente resistencia, vale cualquiera[3]. (Véase ejemplo 3c)

---

[1] En madera, ambos se comprueban con análisis lineal. Con fábricas, el análisis elástico, basado en modelar el material con un solo coeficiente de rigidez, es totalmente inviable. Así que lo que hay son estrategias peculiares de comprobación, de tipo plástico, que sólo sirven a los propósitos de los requisitos mecánicos. Nótese que el código actual de fábricas renuncia a establecer requisitos de tipo geométrico, más que nada porque, aunque se puede esperar que las deformaciones sean muy pequeñas, no hay método para calcularlas.

[2] Para algunos problemas de este tipo hay formulación disponible. En cualquier caso cabe proceder por tanteos, pero la respuesta que se busca se ahorquilla rápidamente.

[3] No sólo el cálculo plástico es más sencillo que el análisis lineal, sino que el enfoque de considerar una situación límite, reduce el número de variables relevantes. Por ejemplo, un nudo típico en hormigón con viga a ambos lados de un soporte, se considera rígido para el análisis, aunque posteriormente se dispone armadura pasante en la viga. Si las cargas o luces de ambos lados son diferentes, el análisis lineal predice momentos en el soporte. Pero si se intenta obtener la carga con la que se llega a la situación límite de flexión, como los momentos de agotamiento a ambos lados son iguales, el soporte quedará desprovisto de ellos. El cálculo plástico "borra" los momentos del soporte. La comprobación del soporte en estado último puede hacerse en compresión simple. Aunque con reservas. En fases intermedias, con momento, puede haber pasado por una situación peor. Todo apunta a que el concepto de seguridad no está cuantificado en casos como éste, en el que para llegar al agotamiento, las solicitaciones se reducen. Otro caso similar es el de análisis elástico de losas, que suministra como respuesta momentos flectores y los, mal

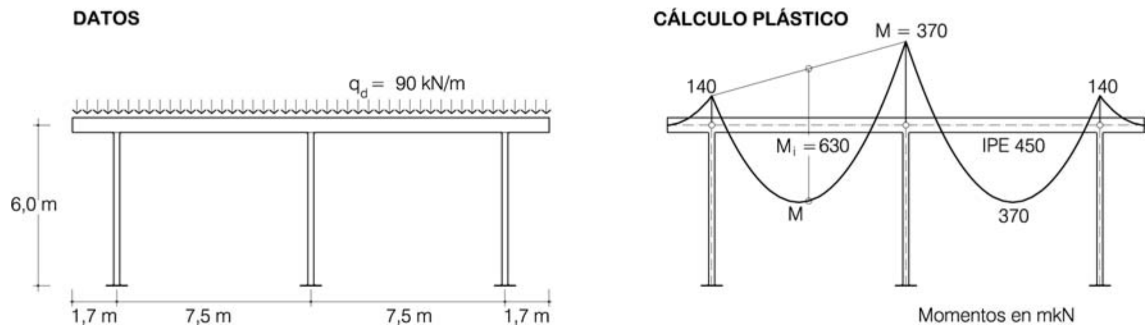


Figura 5. Dimensionado por cálculo plástico

Podría pues formularse el método de manera mucho más simple. En el caso de la figura 2, basta dibujar la parábola de $\mathbf{q}\cdot\mathbf{L}^2/8$, a partir de *cualquier* valor de momento sobre el soporte. Si el de vano resulta inferior, el perfil se decide por el de soporte, que es mayor. Si el que resulta sobre el soporte es inferior al de vano, se elige por éste. En cualquiera de los dos casos, comprobando por cálculo plástico, dado que son las mismas operaciones, la conclusión es inmediata. Siempre el perfil es suficiente, y en tanto ambos momentos sean diferentes, le sobra seguridad. Así que cuando sean iguales se obtendrá el perfil mínimo, que es la respuesta al problema de dimensionado.

En cualquiera de las soluciones de dimensionado, a partir de un valor *arbitrario* de momento sobre el soporte, el análisis elástico diría que una de las secciones (y no hace falta saber cuál) tiene seguridad holgada y la otra escasa, pero en el proceso de carga, ésta alcanzará antes el agotamiento, pero girará plásticamente hasta que la otra (y no sabemos cuál es), llegue asimismo a ese estado, situación que ya es límite. Y como eso necesariamente es con más carga que la de los momentos que cubrían valores menores en alguna de las secciones críticas, hay más seguridad de la pretendida. Y por tanto siempre es un dimensionado válido. ¿El mejor? Si por tal entendemos el de menos sección, el que tenga momentos iguales, y como es inmediato, ahí los procesos de comprobación y dimensionado son absolutamente idénticos. El análisis elástico produce *una* solución; el cálculo plástico *muchas*. Podría entenderse el cálculo plástico como una teoría general que incluye el análisis lineal como un caso particular.

Dimensionando con cálculo plástico, los momentos se deciden, y las secciones de calculan, justo al revés que con el análisis lineal. Como se adelantaba en 2.3, los momentos no siempre son resultado de un cálculo.

La gran ventaja de usar el dimensionado con este sistema, es que pueden darse por automáticamente satisfechos los requisitos mecánicos (de resistencia). Sólo para las comprobaciones geométricas (de deformación), tendrá que acudirse al análisis lineal[1]. Pero ni siquiera inevitablemente. Dado que, para estas limitaciones, existen procedimientos indirectos de comprobación, tales como los de relación luz a canto[2] bien establecidas, el análisis lineal puede quedar vacío de aplicabilidad[3].
Cuanto más redundante es el problema, más se complica el análisis lineal, y más se simplifica el dimensionado a través del cálculo plástico.

---

llamados, torsores. Sobre todo, en el borde, parece evidente que hay torsores. Pero en el cálculo en situación de agotamiento, por *líneas de rotura*, sólo intervienen flectores. De nuevo los torsores pueden entenderse como “ruido” del análisis, algo que el análisis detecta, pero es espurio. Es algo de lo que se puede prescindir cuando se quiere determinar si la losa es segura.

[1] Las comprobaciones de deformación son más groseras que las de resistencia. Además, aunque haya deformación holgada, no es posible mejorar el diseño con menos sección (coste), manteniendo la capacidad resistente, y permitiendo más deformación, ya que, si la sección es **S** y el canto es **h**, lo primero depende de $\mathbf{S}\cdot\mathbf{h}$ y lo segundo de $\mathbf{S}\cdot\mathbf{h}^2$.

[2] No es una expresión que correlacione bien con flecha; *es* la expresión de la flecha. La limitación es de flecha con relación a la luz, y por tanto adimensional. Dejando de lado factores fijos, o de valor predecible, lo que queda es una relación de longitudes que puede expresarse en términos de luz y canto.

[3] Para la solución del caso de la figura 2, dado que el dimensionado se puede hacer por cálculo plástico, y la relación luz a canto es ampliamente aceptable, el análisis lineal carece de utilidad alguna.

5. EL CASO DEL HORMIGÓN ARMADO

Con hormigón armado suele utilizarse un procedimiento peculiar que enturbia el entendimiento cabal de lo que se está haciendo, y del significado de los resultados.
Para hacer lo que se denomina análisis lineal, y que, como veremos, en rigor no lo es, se parte de la estructura definida a medias: sólo la sección del hormigón y no la de las armaduras. Así que la rigidez se simula con una estructura con la misma geometría aparente, pero de hormigón en masa, y especial, porque se le reconoce igual rigidez a tracción que a compresión, y sin fragilidad. Posteriormente, con los resultados de este *pseudoanálisis*, se remata la definición completa de la estructura[1], determinando las armaduras de cada sección para que ninguna alcance una situación límite si actuara esa solicitación. El proceso queda completamente mixtificado.

Naturalmente, con ese sistema, el análisis no es tal, y las solicitaciones que dice obtener no son las de la estructura. Como se ha visto en relación con la asimetría, las verdaderas solicitaciones proceden de establecer el mínimo de trabajo de deformación. Si por ejemplo, una viga continua de sección de hormigón constante, acaba teniendo no sólo armadura variable, sino diferente en la sección máxima de momentos positivos y negativos, como la rigidez real, híbrida entre la bruta y la fisurada, puede ser proporcional a la armadura dispuesta, su valor no es constante, y el de la solicitación redundante, a partir de ese dato equivocado, no puede ser sino erróneo[2]. Si hay piezas comprimidas y piezas flectadas, simular en todas la rigidez por la de la sección de hormigón, es disparatado; en unas la rigidez real puede ser vez y media la supuesta y en las otras la quinta parte. Puede que en algunos casos la disparidad en resultados sea pequeña, pero lo que se puede decir de este procedimiento en general es que tiene el error incontrolado. Por eso suele ser habitual que, tras ese supuesto atípico análisis, se acepte o casi se recomiende variar algo los resultados[3], con la intención de corregir en parte ese error. Pero tal y como se procede con ese recurso, hay casos en que podría acrecentarlo.

Y si los resultados de este pseudoanálisis, en términos mecánicos, de solicitación, están sesgados, en las deformaciones la incongruencia es peor. No son en absoluto las correspondientes a la estructura. El código de hormigón incluye un artículo acerca de cómo se obtienen las deformaciones, explicitando que debe usarse una rigidez calculada expresamente para ese fin, en la que intervienen no sólo las armaduras, sino además el grado de fisuración, en función de lo que el momento actuante supere al de fisuración. En términos de la figura 1, es el paso de solicitación a desplazamiento, con una formulación claramente *no lineal*[4]. Lo que no es fácil de percibir es que, tal como se formula, sólo puede aplicarse a elementos isostáticos, en los que las solicitaciones están inequívocamente definidas por sólo equilibrio. Aplicar esas expresiones a piezas con solicitaciones determinadas por análisis con otra rigidez no puede llevar sino a incoherencias y absurdos[5].

---

[1] La confusión se acrecienta porque este proceso, que es más bien el de *cálculo* de las armaduras, porque opera en clave de lo que aquí se ha denominado con ese nombre, recibe por algunos autores, la denominación de dimensionado (suele usarse la sesquipedalia de *dimensionamiento*). Para la decisión previa de la sección de hormigón, estos autores han tenido que buscar otro término diferente, tal como predimensionado.

[2] En obras de ingeniería civil no es infrecuente pretensar, y por durabilidad, acabar imponiendo que no haya descompresión, por lo que todas las secciones acaban comprimidas en su totalidad, de manera que no se produce, o no con tanta importancia, el error que se indica.

[3] El proceso se conoce con el término de *redistribución*, que suele limitarse a una fracción del resultado obtenido, pero que no está formulado más que para el caso de vigas, y sólo para los efectos de la acción gravitatoria. Ni para acción horizontal en pórticos, ni para arcos, ni mucho menos para forjados reticulados o losas está definido cómo *redistribuir*.

[4] Aunque si se hace con una estructura de acero no hay nada que objetar, es frecuente ver documentaciones de obras de hormigón, y más grave aún, informes periciales en pleitos, que aportan los resultados de un análisis lineal de este tipo, incluyendo, como deformaciones, lo que sale del programa como términos que necesita para resolver la matriz, basada en una rigidez incorrecta. Es algo totalmente inaceptable, y poco ético.

[5] La incoherencia suele pasar desapercibida porque los ajustes de compatibilidad se hacen a base de los giros en los extremos, y como deformación se miden descensos en vano. Pero si se analiza un emparrillado, lo que se compatibiliza son los descensos, y lo que se quiere acotar es asimismo esa variable. Si en un forjado reticulado se intenta calcular, con el procedimiento normado, el descenso de una encrucijada de nervios, y se parte de los momentos procedentes del análisis como hormigón en masa, se llega a un valor diferente por cada itinerario que se elija para llegar a él desde un punto fijo, evidenciando que no se ha podido determinar la flecha.

La pregunta clave es ¿una estructura resuelta con ese sistema, es segura? La respuesta es afirmativa. Las solicitaciones pueden no ser tales, pero al menos forman un sistema equilibrado. En estructuras de edificios usuales, enormemente redundantes, uno entre los miles o millones posibles.
Si, en la segunda parte del proceso, se toman las solicitaciones del *análisis* como dato de partida, y se calculan secciones de hormigón armado para que no se alcancen situaciones límite, se está procediendo con las reglas que aquí se han denominado de "*cálculo plástico*". En la realidad, unas secciones, que tienen más solicitación de lo supuesto, irán por delante, al llegar a su agotamiento, plastificarán y esperarán a las otras, llegándose a la situación límite cuando todas alcancen su capacidad última.

Pero eso significa que el método se ha tomado un trabajo desproporcionadamente costoso, y que además confunde. Soluciones equilibradas hay montones ¿Porqué partir de las obtenidas en un análisis como hormigón en masa? Una contestación puede ser que, como el hormigón tiene una plasticidad acotada, mejor será no hacer una descomposición cualquiera, sino una que no exija demasiado giro plástico. Es sólo una explicación bienintencionada. Nada hay nada que garantice que, en general, las solicitaciones de hormigón en masa están cerca de las reales, e independientemente de cómo se arme luego.
La confusión es que el método incita a que se suponga que las solicitaciones obtenidas son las de la estructura, y que sólo queda armar. Si al hacerlo se constata que la decisión de la sección de hormigón no era muy acertada, puede pensarse que no es posible cambiarla a última hora, sin rehacer el análisis. Nada es menos cierto. En rigor, es después de armar, con la estructura totalmente definida, cuando se podría o debería analizar la estructura[1]. El dilema es que entonces aparecerían incoherencias entre la sección armada y la solicitación actuante, incoherencias que sólo se podrían salvar por una comprobación con cálculo plástico. Volver a armar y analizar de nuevo, llevaría a un proceso de convergencia ingobernable. Así que antes o después habría que asumir esa incoherencia y salvarla con cálculo plástico.

Si es así, mejor antes que después. O sea en la primera pasada. O mejor aún, antes. Nada se opone a realizar un análisis, mejor dicho, una *determinación* de solicitaciones, sin presuponer rigidez alguna, tomando decisiones que sólo cumplan el equilibrio. Y con esas solicitaciones decidir luego, al mismo tiempo, la sección de hormigón y el armado que sean más eficaces para cada pieza. Sigue siendo cálculo plástico, pero sin subterfugios.
Dado que, en hormigón, la ductilidad, o readaptación plástica es acotada, para este proceso de determinación de solicitaciones, no pueden decidirse valores cualesquiera, arbitrarios. Sólo valen los que se encuentren en una horquilla relativamente moderada alrededor de los reales[2]. En problemas en los que no hay experiencia, el primer método, el del análisis con la rigidez del hormigón en masa, es de consecuencias incontroladas, pero para el segundo hay que tener en cuenta, por prudencia, reglas que no están formuladas. Con ninguno de los dos se puede augurar mucho éxito. Pero si el problema es habitual, como por ejemplo, los de soluciones porticadas de edificios, hay en la literatura técnica suficientes reglas como para determinar con tino solicitaciones con las que partir para calcular las secciones de hormigón y acero[3].

Lo que en la práctica se viene haciendo con hormigón armado, a la luz de estos comentarios, aunque se autodenomina análisis lineal, en el fondo es cálculo plástico encubierto, e innecesariamente complejo.

[1] Desgraciadamente no podría ser un análisis *lineal,* ya que eso implica rigidez constante, y la rigidez depende a su vez de la solicitación, en un círculo vicioso que da lugar a un análisis no lineal o incremental, complicadísimo, y que nadie propugna.

[2] Paradójicamente, para la aplicación práctica no importa decir que pueden ser totalmente arbitrarios, contando con que esa libertad se usará para decidir una solución lo más eficaz y económica posible, y eso significa, casi necesariamente, situarse dentro de la horquilla citada.

[3] Por ejemplo, desde que hay normas, en forjados, de acuerdo con la propuesta plástica de J. Lahuerta, se acepta que, como solicitaciones para el cálculo, se pueden adoptar las que proceden de igualar, en valor absoluto, los momentos de continuidad con los de vano. En losas, desde siempre, se ha venido aceptando un margen muy amplio, permitiendo casi cualquier combinación de capacidad a momento de ambos signos y direcciones; la acotación de ese margen venía y viene de la mano de las prescripciones acerca de armadura mínima.

6. LA INFLUENCIA DE LAS IMPERFECCIONES

Los apartados anteriores se refieren al estudio y definición estructural sobre el papel, en fase de proyecto. Queda por ver si, construyendo lo que se ha obtenido del proceso, la obra real puede tener o no la seguridad e indeformación deducida en el cálculo. Es decir, cuál es la fiabilidad y aplicabilidad de la teoría a construcciones reales, con imperfecciones inevitables que no puedan considerarse explícitamente en los cálculos. Se trata de verificar en qué medida las imperfecciones afectan al valor de las tensiones y deformaciones del análisis elástico y a la carga última o coeficiente de seguridad del cálculo plástico.
Por imperfecciones se entiende aquí todo tipo de tolerancias en sección y longitud, y variaciones en la geometría supuesta, de rectitud, planeidad, verticalidad, etc, así como la influencia de tensiones parásitas, por laminación, contracción térmica, retracción de fraguado, etc.

En algunos problemas, como el pandeo, hasta que no se formuló considerando explícitamente las imperfecciones, los resultados del análisis del problema no se compadecían con la realidad. Lo que predecía el cálculo no sucedía, y lo que pasaba en la realidad, no tenía explicación. De ahí que la teoría de Euler fuera, durante un par de centenares de años, mera teoría matemática, sin aplicación práctica[1]. Los constructores, para conseguir estructuras seguras, aplicaban reglas que no tenían en cuenta la teoría del pandeo. Sólo cuando Dutheil establece una formulación del pandeo como ampliación de imperfecciones reales o latentes, puede usarse para predecir o explicar lo que les sucede a las obras reales.

El problema de las imperfecciones que afectan al análisis, está magistralmente planteado por J. Heyman, presentado como el caso de *"la mesa de cuatro patas"*. Dice este autor que si la mesa tuviera tres patas, el análisis de qué compresión tiene cada una es inmediato, ya que es isostático, e incluso, posteriormente el de las solicitaciones del tablero, simple. Con cuatro patas se convierte en inmanejable. El de cuánta carga tiene cada pata es hiperestático. Pero, aunque sobre el papel es resoluble, no hay manera de que sus resultados se vean corroborados en la práctica. Una mesa real de cuatro patas, sobre un suelo real, siempre cojea. Las patas que bailan alternan entre carga nula y finita, y los momentos del tablero en esa dirección oscilan entre un valor positivo y otro negativo, lo que pulveriza la posibilidad de que el análisis pueda dar cuenta de lo que pasa. Será imposible medir los valores deducidos del análisis; no se encontrarán. Y si bajo la pata corta, se dispone una cuña blanda para evitar la cojera, ni siquiera se puede saber cuánto se apoya en cada pata. Todo indica que lo que le pasa a la mesa real, o a cualquier objeto estructural, es inaccesible al análisis.

6.1 Imperfecciones despreciables

En la figura 6 se representa el extremo de un dintel, depositado sobre un elemento tal como poste o muro. El material ahora no importa. Debido a la flexión de la pieza de dintel, ésta se vence del lado de la esquina interior del soporte, punto C, de manera que la tensión es mayor ahí que bajo el extremo del dintel, punto A, donde incluso podría ascender. El problema es endiabladamente complejo de plantear[2], pero para el dintel no importa mucho. La resultante de las presiones de sustentación parece que debe encontrarse en un punto intermedio entre B y C. Para el estudio del dintel, con por ejemplo 6 m de distancia entre caras internas de soporte, no saber si la luz es cinco o diez centímetros mayor, tiene poca relevancia. El dintel no tendrá exactamente el coeficiente de seguridad calculado, ni la misma deformación que la obtenida, pero con toda probabilidad, la solución será igualmente aceptable.

Ahora bien, si el dintel no es recto, o los asientos no están en un mismo plano, o ambas cosas, la pieza puede descansar inicialmente en A, o hacerlo en C, e independientemente en cada extremo. De todas maneras, al cargarse, flectará, y aunque sólo sea por aplastamiento, ablandará su superficie de apoyo. En este caso el margen de desconocimiento de dónde se sitúa la reacción es mucho mayor. Estadísticamente es más probable que esté entre B y C, pero nada se opone a que esté entre A y B.

---

[1] No obstante, sigue siendo imprescindible para entender el pandeo, y para estudiar casos en los que no hay conjetura disponible acerca de las imperfecciones. Y en cualquier caso conviene recordar que las expresiones con imperfección expresa tienen como asíntota o valor límite la compresión crítica de Euler.

[2] La mayoría de los programas no lo admiten; sólo con algunos de propósito general muy refinados, podría intentarse.

Considerando las imperfecciones inevitables, para reproducir o predecir lo que le sucede al dintel, debería tenerse en cuenta una variación de luz mayor que cuando no se consideran. Pero de todas maneras unos centímetros más o menos de luz no tienen mucha relevancia. Lo mismo sucedería si el soporte se dispone no vertical sino con una leve inclinación: la luz que describe lo que le pasa al dintel real sería un poco mayor o menor.

Figura 6. Imperfecciones en la posición de la reacción de una viga apoyada

En este el tipo de problemas, las imperfecciones, si son pequeñas, afectan poco al resultado, y si son algo mayores, más, pero en todo caso el error que se comete es proporcionado a la imperfección. La imperfección puede afectar, como mucho, a la *segunda* cifra significativa del resultado[1]. De un problema como éste, poco sensible a las imperfecciones, se dice que es *robusto*.

6.2 Imperfecciones relevantes

Otros problemas salen peor parados. Tómese de nuevo el de la figura 2. La viga recta, se dispone, corrida, sobre tres soportes. Las conclusiones del análisis, sobre el papel, son las ya mostradas.
Pero en la realidad, los soportes pueden no tener *exactamente* la misma longitud, o la viga puede no ser *perfectamente* recta, o las cabezas de los soportes no encontrarse *completamente* en el mismo plano, o mezclas de las tres cosas. De acuerdo con las tolerancias usualmente admitidas, cabe esperar que haya variaciones centimétricas de ese tipo de imperfecciones. Por ejemplo, supongamos que la viga tiene una una curvatura tal que al presentarla sobre los soportes extremos, le falte algo para asentar en el central. Por poco que sea el error, comenzará como viga de luz doble, lo que significa que, con los primeros escalones de carga, flectará aparatosamente[2], y en cuanto toque al tercer soporte, para los sucesivos incrementos de carga, se comportará conforme al modelo analizado.

Puede comprobarse que incluso sólo el peso propio del perfil, operando con la luz doble, produce una flecha de 5 mm. Eso significa que la simple presentación de la viga, borrará los primeros 5 mm de la imperfección si la hubiere. Desde esta perspectiva, incluso concluir si la viga es recta, puede ser indecidible. Puede que parezca que descansa en los tres soportes, pero, como en la mesa de cuatro patas, no se puede saber cuánto apoya de verdad en cada uno[3].

---

[1] Si el coeficiente de seguridad es 1,5 las sobrecargas de uso son de 2 kN/m^2 o 3 kN/m^2, y la flecha se limita a 1/400 o 1/500, es presuntuoso expresar resultados de cálculos estructurales con más de dos cifras significativas. En esto la introducción del ordenador ha prestado un flaco servicio, ya que, a menos que se invierta un esfuerzo adicional, escribe muchas más. Es frecuente ver listados de salida con cuatro y cinco cifras significativas. Da mala impresión.

[2] El asunto fue ya detectado por Galileo, en su famoso dictamen sobre la columna que, acopiada, se partió espontáneamente. Según narra, dedujo que se debió a que se dispusieron tres apoyos o cuñas de madera, y al pudrirse o asentar el del extremo, la columna pasó a quedar con la mitad en vuelo, y fue eso la que la rompió.

[3] En obras de cierta envergadura, como son muchas de ingeniería civil, en los apoyos se disponen células de carga que permiten saber cuánta es la reacción en cada instante, o extensómetros que miden tensión, o se monitorizan anclajes, para variar la tensión según de miden deformaciones de lo que se va construyendo. En definitiva, que se pueden neutralizar los efectos de las imperfecciones, ajustando la obra al modelo teórico analizado. En obras usuales de arquitectura no se dispone, y no sería rentable disponer, de este tipo de recursos, por lo que son mucho más dependientes de las imperfecciones.

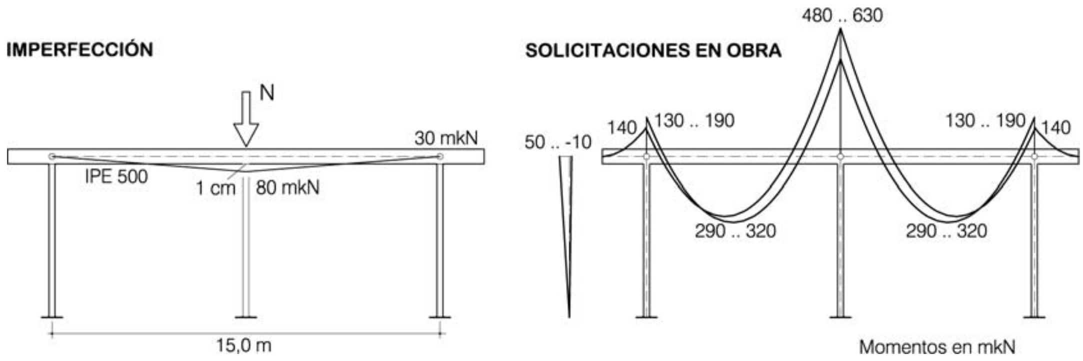


Figura 7. Incidencia de las imperfecciones

¿Qué pasaría con una imperfección de hasta 1 cm? Y que conste que la tolerancia de este caso podría ser del doble. Bastaría encontrar qué carga puntual permitiría a la viga, de luz doble, deformar 1 cm. El resultado aparece en la figura 7. Sería como sumar o restar al resultado del análisis teórico, que, según la figura 2, tenía un máximo de 550 mkN, una ley de momentos con un máximo de 80 mkN. Así que el momento en ese punto que realmente haya en la obra construida podría estar entre 470 mkN y 630 mkN. La imperfección supuesta afecta pues a la *primera* cifra significativa del resultado del análisis
Si en la obra construida, se intentan medir tensiones o flechas, no se detectarán las correspondientes a un momento de 550 mkN, sino a uno cualquiera entre 470 mkN y 630 mkN.

La pregunta es, de nuevo, si la obra construida es tan segura como se suponía. Y la contestación, como antes, es que sí. Porque los incrementos, espurios, de solicitación por imperfección, lo son de más en una sección y en la otra de menos. Si sobre el soporte central se alcanza 630 mkN, en vez de los 550 mkN, es porque en vano hay 290 mkN en vez de los 300 mkN del modelo teórico. Así que, aunque la sección central vaya por delante, y llegue antes a su momento capaz, rotará, esperando a que la de vano lo alcance. Así que lo que a una le falta se compensa con lo que le sobra a la otra. Y como el diagrama isostático es el mismo, se deduce que la carga última es igual, y por tanto la estructura construida mantiene el coeficiente de seguridad que se suponía. En otras palabras, las imperfecciones no afectan al valor de la carga última. Las imperfecciones en este caso afectan a los resultados del análisis lineal[1], pero no a los del cálculo plástico. Una ventaja más que apuntar en la cuenta de este procedimiento. Por análisis no se puede saber los momentos que habrá en la obra, y todo lo que se puede hacer, en proyecto, para concluir acerca de la seguridad de la pieza es una comprobación por cálculo plástico[2], por lo que la fase de análisis elástico sobra por completo. Esa es la paradoja; vale hacer análisis elástico, pero sus resultados sólo son concluyentes si se toman como cálculo plástico.

En general, los elementos redundantes a flexión, como vigas continuas, y más aún losas, son tan sensibles a las imperfecciones que el análisis elástico no puede dar cuenta de lo que les pasa[3]. De ahí que, sobre todo en losas o forjados, en acero u hormigón, se opte directamente, sin ambages, por cálculo plástico como manera de dimensionar y comprobar, renunciando desde el principio al análisis elástico como método.

[1] Afectan pues a la flecha, si no fuera porque en rigor no se busca el valor de la deformación que realmente se produce. Lo que se quiere es un indicador de la sensibilidad de la solución a la carga, o *rigidez* de la estructura. Y eso no queda afectado por las imperfecciones.

[2] Puede que esta sea la justificación de definir la seguridad en términos de capacidad plástica, y hacerlo con carga artificialmente afectada del coeficiente, ya que las solicitaciones reales no pueden obtenerse con fiabilidad. Podría decirse que a lo que accede el análisis no es a las solicitaciones o tensiones, sino al *cambio* que se produce con la carga, sobre las producidas previamente por las imperfecciones y condiciones reales de sustentación, desconocibles, que forman un sistema nulo o autoequilibrado, como sucede con las tensiones parásitas.

[3] En materiales como vidrio, sumamente frágil, en el que no caben incursiones plásticas, no se puede confiar en absoluto en el análisis lineal, así que para conferir seguridad no queda otra opción que remitirse a eliminar la influencia de imperfecciones, intercalando calzos y separadores. F. Candela dice que las estructuras sobreviven no por el análisis que hacemos, que no es fiable, sino por la ductilidad.

6.3 Imperfecciones esenciales

Hay problemas mucho más afectables por las imperfecciones. Posiblemente uno de los casos más irreductibles al cálculo, y muy simple en apariencia, es el de la figura 8. El extremo del dintel presentado en el soporte de la figura 6, pero ahora visto desde el elemento soportante.
Como se ha comentado antes, aun con una pieza ideal, no es sencillo resolver la ambigüedad de dónde se sitúa la reacción de sustentación del dintel. Y para la comprobación resistente del elemento soportante, no es lo mismo, ni muchísimo menos, que esté en B o en C, y si se consideran imperfecciones en cuanto a la rectitud de la viga, o la horizontalidad del plano de asiento, podría estar hasta en A. La comprobación del soporte depende críticamente de dónde se sitúe la acción.

Si consideramos el caso del soporte extremo del pórtico de la figura 2, el momento del análisis lineal del modelo teórico, que estaba en 20 mkN, considerando una imperfección de la viga de 1 cm de flecha hacia arriba o hacia abajo, pasaría a estar como entre ¡50 mkN y -10 mkN! Como en la mesa de cuatro patas, por análisis no se puede saber siquiera el signo que tendrá en la realidad. Las imperfecciones en este caso afectan no a la *segunda* ni a la *primera* cifra del resultado. Afectan *al* resultado[1].
La conclusión es que la posición de la resultante de sustentación, o el momento que produce la viga en el soporte, no son objeto de análisis. No se pueden determinar por análisis. No son accesibles al análisis[2]. Lo que se obtenga de estas variables en el análisis es puro *ruido* comparado con el término fundamental que parece ser el producido por la imperfección.

Figura 8. Un caso inaccesible al análisis

En fábricas, que son más sensibles a excentricidades, la regla para este problema oscila entre convenir, por ejemplo, que la reacción se sitúa en el medio de la mitad interior de la entrega, (figura 8, izquierda) o admitir, del lado seguro, que se sitúa tan lejos del centro como lo permite la capacidad resistente del material del muro (figura 8, derecha)
De ahí también las reglas de excentricidad mínima o excentricidad accidental con las que se deben comprobar, por ejemplo, los soportes de hormigón, y que en buena parte de casos cubre holgadamente las solicitaciones de cálculo.

Nótese que este último caso, de imperfecciones con repercusión esencial, está profundamente vinculado al pandeo. Las imperfecciones en luz (figura 7) son poco importantes. Las de excentricidad de compresión (figura 8) son cruciales. El pandeo se trata ya explícitamente en clave de imperfección. El análisis de solicitaciones todavía no ha llegado a ello.

[1] Esta disfunción se puede controlar disponiendo un *aparato de apoyo* o instrumentando la obra, algo casi inviable en arquitectura, pero usual en obra civil de cierta importancia.

[2] Puede que por esta especial dificultad de tratamiento, en los textos al uso de acero no es fácil encontrar el detalle constructivo, por otra parte el más racional, sencillo, eficaz y competitivo, universal e inevitable en madera o ladrillo, de viga encima de soporte. No está bien establecido cómo deben hacerse los cálculos. Se usa mucho otro tipo de detalle, disponiendo la viga de lado, que *parece* saberse cómo se trata, pero, que en cuanto se analiza desde el punto de vista de las imperfecciones, se comprueba que está sometido a las mismas incertidumbres.

7. SINOPSIS

En obras de arquitectura las piezas isostáticas son raras. Lo habitual ha sido y son las soluciones enormementes redundantes o hiperestáticas.

En un sistema estructural redundante se puede usar análisis lineal para determinar las tensiones o deformaciones si está totalmente definido, puede suponerse que las deformaciones van a ser pequeñas, y el comportamiento del material puede representarse por un solo coeficiente de rigidez (esto último no sucede con materiales frágiles como las fábricas)

Si el sistema estructural (celosías espaciales o cerchas), o el material (madera), o el tipo de sección (de pared delgada en acero), o el problema (inestabilidad), no tienen margen plástico, en elementos redundantes no cabe otro método de exploración estructural que el análisis, en su caso lineal, tras su definición completa, y por tanto el dimensionado debe hacerse por prueba y error.

El análisis lineal es el método de comprobación apropiado a la limitación de tensiones admisibles (hoy en desuso). Si la seguridad se formula en términos de estados límite, (el reglamentado hoy día), referidos a secciones completas o piezas, por poderse dar un comportamiento dúctil, el método apropiado de comprobación es el cálculo plástico.

En soluciones habituales de edificios en hormigón armado, el análisis lineal, a partir de la rigidez de las piezas consideradas como de hormigón en masa, conduce a una tergiversación descontrolada de lo que podrían ser las verdaderas solicitaciones, y por tanto su uso no es aconsejable.

En soluciones habituales de hormigón armado o acero laminado, tratar de comprobar que cada sección tiene una capacidad resistente apropiada a la solicitación actuante, podrá ser algo suficiente, pero no es en absoluto necesario para proyecto. Para peritaje eso no permite concluir que la estructura es inválida.

Hacer un análisis como si las piezas tuvieran una cierta rigidez y comprobar que las solicitaciones corresponden a una situación última, en la que, por definición la rigidez se ha anulado, es incoherente.

En acero laminado, el uso de los resultados del análisis elástico para comprobar sección a sección, conduce a soluciones innecesariamente costosas en material o complejidad de ejecución. Es por tanto una respuesta éticamente rechazable. La solución es mucho más eficaz si se deciden las secciones a partir de cálculo plástico.

En hormigón armado, usar los resultados de un sediciente análisis lineal para armar las secciones en consecuencia, es una mixtificación. Ni las incógnitas del sistema son las deformaciones, ni lo obtenido son las solicitaciones, ni es forzoso armar para ellas. La validación de lo que resulte sólo tiene una justificación plástica. Para ese objetivo es más sencillo, fiable y eficaz, y por tanto ético, decidir las solicitaciones por criterios plásticos, determinando posteriormente secciones de hormigón y armaduras que las resistan.

En acero u hormigón armado, dimensionando por cálculo plástico, la comprobación de los requisitos de deformación exige un análisis riguroso, (en hormigón armado teniendo en cuenta la rigidez fisurada, y por tanto no lineal), o el uso de indicadores simples, como pueden ser los de relación de luz a canto.

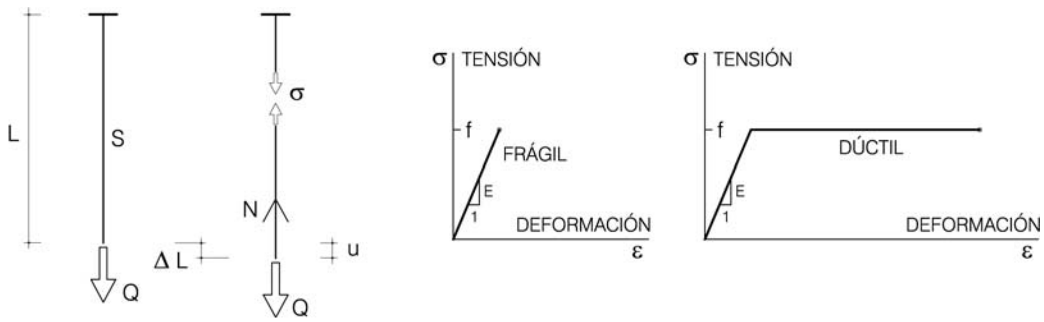
En las piezas a flexión, las imperfecciones de la obra afectan, a veces notablemente, a la fiabilidad de los resultados del análisis, cuyos resultados no pueden contrastarse en la realidad. Pero las imperfecciones no tienen influencia en el valor de la carga con la que se llega a una situación límite, y por tanto los resultados del cálculo plástico sí son fiables.

Para la comprobación resistente de piezas a compresión puede resultar conveniente establecer un modelo explicito de imperfecciones, al modo como se hace con el pandeo. En otro caso, éstas pueden arruinar por completo la precisión del cálculo. Alternativamente la comprobación puede basarse en reglas convencionales acerca de la excentricidad o en una excentricidad mínima.

ANEXO 1. EJEMPLOS

Ejemplo 1. Cable vertical

Sea un cable vertical, sin peso, de longitud **L**, colgado del techo, sometido a una carga **Q** en el extremo libre. Se conoce tanto la sección, **S**, cuanto el material, cuyas condiciones de deformabilidad se pueden representar por un módulo de Elasticidad, **E**.



Se pide determinar tensión del cable, y descenso del punto cargado.

Si la carga es **Q**, por equilibrio la tracción total del cable es **N = Q**. *El problema es isostático.*
Si la tracción total es **N**, y la sección **S**, la tensión del cable es **σ** = **N/S** [1]
Si la tensión del cable es **σ** y el módulo de Elasticidad es **E**, la deformación del cable es **ε** = **σ/E**
Si la deformación del cable es **ε** y su longitud es **L**, el alargamiento total es **ΔL** = **ε·L**
Si el alargamiento del cable es **ΔL**, y el extremo superior es fijo, el inferior desciende **u** = **ΔL**

Problema inverso: se conoce el descenso **u** y se pregunta por la carga **Q** que lo produce.

Si el desplazamiento del extremo es **u**, el cable alarga **ΔL** = **u**
Si el alargamiento del cable es **ΔL** y su longitud **L**, la deformación es **ε** = **ΔL/L**
Si la deformación del cable es **ε** y el módulo de Elasticidad es **E**, la tensión del cable es **σ** = **ε·E** [2]
Si la tensión del cable es **σ** y su sección es **S**, la tracción total es **N** = **σ·S**
Si la tracción total del cable es **N**, por equilibrio, la carga es **Q** = **N**

Notas:
[1] En este punto se podría haber procedido a determinar la sección, con la condición de resistencia del material, o sea para que se verifique que **σ** ≤ **f**, por lo que la sección estricta sería la que cumpla **f = N/S** con el coeficiente de seguridad establecido.
[2] En este punto debe suceder que la tensión sea menor que la resistencia del material, **f**. Si es mayor, y el material es frágil, el desplazamiento **u** lo ha roto. Si es dúctil está en desplazamiento incontrolado, y los cálculos siguientes deben hacerse con **σ** no mayor que **f**.

En resumen:

	Problema directo		**Problema inverso**	
Dato	**Q**		**u**	
	N = **Q**		**ΔL** = **u**	
	σ = **N/S**	= **Q/S**	**ε** = **ΔL/L**	= **u/L**
	ε = **σ/E**	= **Q/S·E**	**σ** = **ε·E**	= **u·E/L**
	ΔL = **ε·L**	= **Q·L/S·E**	**N** = **σ·S**	= **u·S·E/L**
	u = **ΔL**	= **Q·L/S·E**	**Q** = **N**	= **u·S·E/L**
Resultado	**u** = **Q·L/S·E**		**Q** = **u·S·E/L**	

Ejemplo 2. Carga que cuelga de dos cables

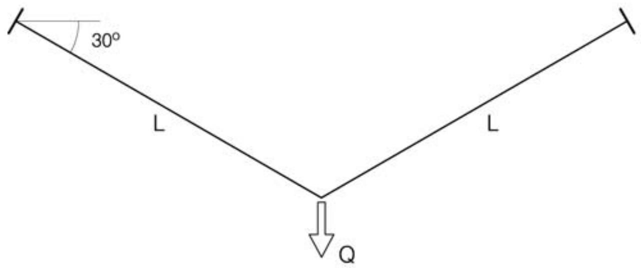
Sean dos cables iguales, de longitud **L**, sin peso, colgados del techo, de cuyo punto de unión cuelga una carga **Q**. Se conoce tanto la sección, **S** de cada cable, cuanto el material, cuyas condiciones de deformabilidad se pueden representar por un módulo de Elasticidad, **E**.

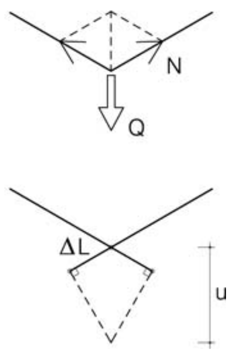
Se pide determinar tensiones de los cables y descenso del punto cargado.

Si la carga es **Q**, por equilibrio, descomponiéndola en las direcciones de los dos cables, (regla del paralelogramo), la solicitación de tracción de cada uno es: **N = Q**. *El problema es también isostático.*
Como en el ejemplo 1, **σ** = **N/S**, **ε** = **σ/E,** y Δ**L** = **ε·L**
Si el alargamiento de cada cable es Δ**L,** componiendo ambos, (trazando curvas con centro el otro extremo, o aproximándolas por perpendiculares), el punto común desciende **u** = 2·Δ**L**

Problema inverso: se conoce el descenso **u** y se pregunta por la carga **Q** que lo produce.

Si el desplazamiento del punto cargado es **u**, descomponiéndolo, cada cable alarga Δ**L** = **u**/2
Como en el ejemplo 1, **ε** = Δ**L/L**, **σ** = **ε·E**, y **N** = **σ·S**
Si la tracción total de cada cable es **N**, por equilibrio, componiendo ambas, la carga es **Q** = **N**



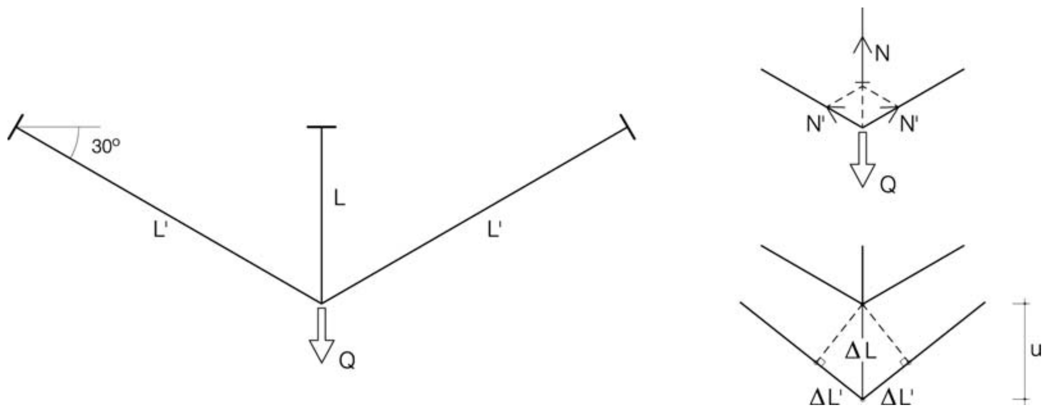


En resumen:

	Problema directo		Problema inverso	
Dato	**Q**		**u**	
	N = **Q**		Δ**L** = **u**/2	
	σ = **N/S**	= **Q/S**	**ε** = Δ**L/L**	= **u**/2·**L**
	ε = **σ/E**	= **Q/S·E**	**σ** = **ε·E**	= **u·E**/2·**L**
	Δ**L** = **ε·L**	= **Q·L/S·E**	**N** = **σ·S**	= **u·S·E**/2·**L**
	u = 2·Δ**L**	= 2·**Q·L/S·E**	**Q** = **N**	= **u·S·E**/2·**L**
Resultado	**u** = 2·**Q·L/S·E**		**Q** = **u·S·E**/2·**L**	

Ejemplo 3. Carga que cuelga de tres cables

Sean tres cables, uno vertical, de longitud **L**, y dos iguales oblicuos, ambos de longitud **L’**, sin peso, colgados del techo, de cuyo punto de unión cuelga una carga **Q**. Se conoce la sección, **S** de cada cable, y el material, cuyas condiciones de deformabilidad se pueden representar por un módulo de Elasticidad, **E**.



a) Análisis elástico. Se conoce **Q** y las secciones, **S**.

Se pide determinar tensiones de los cables y descenso del punto cargado.

Por equilibrio, no se puede deducir cómo se descompone la carga **Q** en las tres solicitaciones de tracción (por simetría sólo queda una condición y dos variables). *El problema es hiperestático o redundante.* Sólo cabe comenzar por el problema inverso, en términos algebraicos.

Problema inverso: se toma como incógnita el descenso **u** y se obtiene la carga **Q** que lo produciría.

Operando por separado para el cable vertical y los oblicuos (anotados con ‘):

Incógnita: descenso del extremo cargado	**u**	
	1. Cable vertical	2. Cables oblicuos
Incremento de longitud	$\Delta \mathbf{L} = \mathbf{u}$	$\Delta \mathbf{L'} = \mathbf{u}/2$
Deformación	$\varepsilon = \Delta \mathbf{L}/\mathbf{L} = \mathbf{u}/\mathbf{L}$	$\varepsilon' = \Delta \mathbf{L'}/\mathbf{L'} = \mathbf{u}/2 \cdot \mathbf{L'}$
Tensión	$\sigma = \varepsilon \cdot \mathbf{E} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}/\mathbf{L}$	$\sigma' = \varepsilon' \cdot \mathbf{E} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}/\mathbf{L'}$
Solicitación	$\mathbf{N} = \sigma \cdot \mathbf{S} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}/\mathbf{L}$	$\mathbf{N'} = \sigma' \cdot \mathbf{S'} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{S'} \cdot \mathbf{E}/2 \cdot \mathbf{L'}$
Carga, componiendo **N** y **N’**	$\mathbf{Q} = \mathbf{N} + \mathbf{N'}$	
Condición	$\mathbf{Q} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}/\mathbf{L} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{S'} \cdot \mathbf{E}/2 \cdot \mathbf{L'}$	

Se despeja el valor del descenso $\mathbf{u} = \mathbf{Q} / (\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}/\mathbf{L} + \mathbf{S'} \cdot \mathbf{E}/2 \cdot \mathbf{L'})$

Y se sustituye su valor en las variables que se quieran obtener en valor numérico.

NOTA: El proceso tiene limitada su aplicabilidad a cuando ambas tensiones son inferiores a la resistencia del material. Las expresiones son las ya obtenidas en los ejemplos 1 y 2 anteriores.

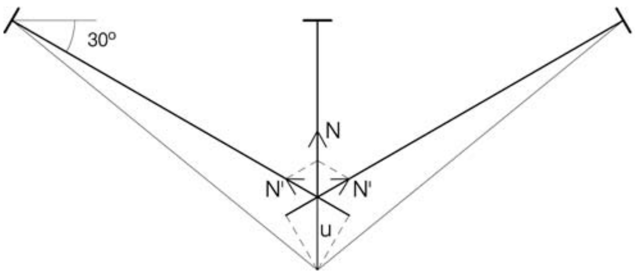
b) Cálculo plástico: Se conocen las secciones, **S** y la resistencia del material, **f**
Se supone que el material es *dúctl*, manteniendo la resistencia con deformación ilimitada.
Se pide determinar la carga última, $\mathbf{Q}_u$ que puede soportar el conjunto.

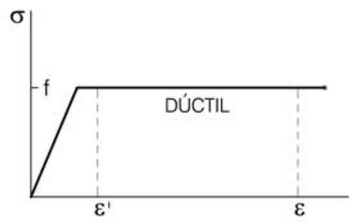
Si la carga es la última, el descenso está en régimen descontrolado. El proceso anterior lleva a:
Dato: descenso del extremo cargado $\mathbf{u} = \infty$

	1. Cable vertical	2. Cables oblicuos
Incremento de longitud	$\Delta\mathbf{L} = \mathbf{u} = \infty$	$\Delta\mathbf{L'} = \mathbf{u}/2 = \infty$
Deformación	$\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\mathbf{L}/\mathbf{L} = \infty$	$\boldsymbol{\varepsilon}' = \Delta\mathbf{L'}/\mathbf{L'} = \infty$
Tensión	$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}\ (< \mathbf{f}\ ) = \mathbf{f}$	$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\varepsilon}'\cdot\mathbf{E}\ (< \mathbf{f}\ ) = \mathbf{f}$
Solicitación	$\mathbf{N} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{S} = \mathbf{f}\cdot\mathbf{S}$	$\mathbf{N'} = \boldsymbol{\sigma}'\cdot\mathbf{S'} = \mathbf{f}\cdot\mathbf{S'}$
Carga, componiendo las **N**	$\mathbf{Q}_u = \mathbf{N} + \mathbf{N'}$	

Resultado $\mathbf{Q}_u = \mathbf{f}\cdot\mathbf{S} + \mathbf{f}\cdot\mathbf{S'}$

NOTA: Al tener los tres cables deformación ilimitada, la tensión es necesariamente igual a la resistencia, por lo que la carga última es, directamente, igual a la resultante de las capacidades resistentes de los cables, independientemente de la sección que tengan.





c) Dimensionado: Se conoce la carga **Q**, y la resistencia del material, **f**
Se pide determinar secciones, **S** que permitan soportar la carga **Q** con seguridad γ.

El conjunto debe ser capaz de soportar en situación límite una carga $\mathbf{Q}_d = \mathbf{Q}\cdot\gamma$.
Repitiendo el proceso del caso b), pero en sentido inverso, resulta:

Dato: carga de cálculo $\mathbf{Q}_d$
Descomponiendo la carga $\mathbf{Q}_d = \mathbf{N}_d + \mathbf{N}_d'$

	1. Cable vertical	2. Cables oblicuos
Solicitación	$\mathbf{N}_d$	$\mathbf{N}_d'$
Tensión	$\boldsymbol{\sigma}_d = \mathbf{N}_d/\mathbf{S} = \mathbf{f}$	$\boldsymbol{\sigma}_d' = \mathbf{N}_d'/\mathbf{S'} = \mathbf{f}$
Resultado	$\mathbf{S} = \mathbf{N}_d/\mathbf{f}$	$\mathbf{S'} = \mathbf{N}_d'/\mathbf{f}$

NOTA: La descomposición es *arbitraria*; vale *cualquier* valor de $\mathbf{N}_d$, por lo que el resultado no es único. Hay infinitos pares de valores **S** y **S'** que cumplen lo pedido. Cuestión bien diferente es cuál es la mejor, o la óptima. Si el problema es hiperestático, el análisis se complica, pero el dimensionado, con cálculo plástico, se simplifica.

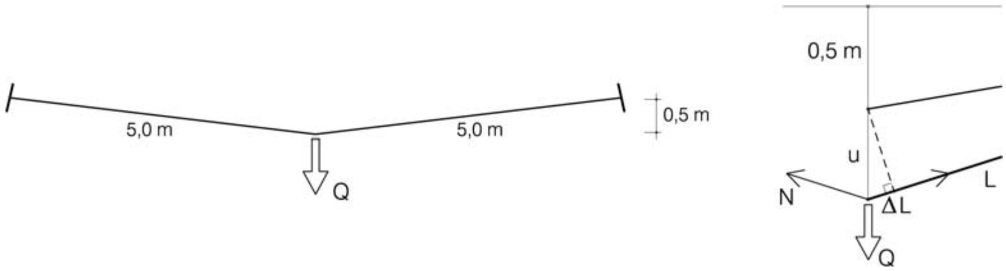
NOTA: Si se desea conocer el descenso, una vez hecho el dimensionado, puede procederse como se ha indicado en el caso a), con la carga **Q**.

ANEJO 2. PROBLEMAS PROPUESTOS

Con objeto de que el lector ponga a prueba sus conocimientos en este tema, se le sugiere que intente resolver los siguientes problemas.

Problema 1. Carga sobre un cable con poca pendiente.

El cable de la figura, sin peso, de sección **S** = 1000 mm^2, realizado en un material muy resistente pero muy deformable, **E** = 20.000 N/mm^2, sostiene una carga **Q** = 40 kN.
¿Cuál es la tensión del cable y el descenso del punto cargado?

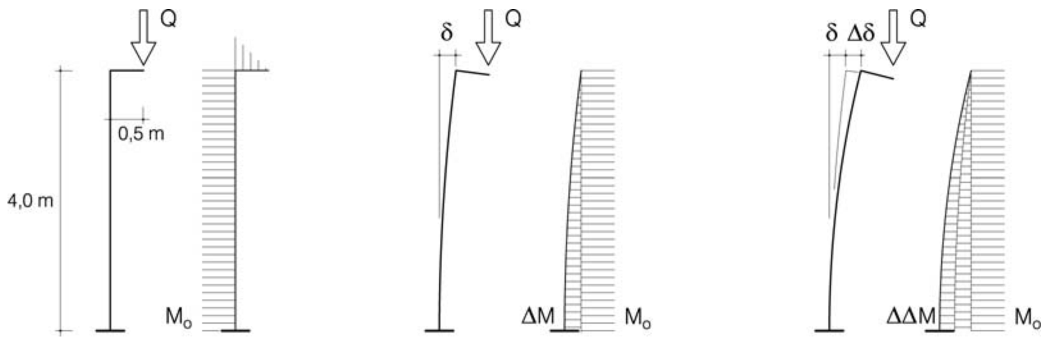


Sugerencia: Todo indica que se puede proceder con el sistema del ejemplo 1, pero se obtendrá un descenso que altera sensiblemente la forma del sistema estructural, lo que obligará a aplicarlo de nuevo con las propiedades geométricas de la forma alterada, lo que llevará a una alteración distinta, y así sucesivamente. Como cada nuevo cálculo se sitúa entre los dos anteriores, el resultado estará entre los dos primeros.
Puede asimismo probarse a adoptar como incógnita la situación deformada, o encontrar la ley de la sucesión, con lo que se puede obtener su límite, o cargar poco a poco. Con una hoja de cálculo es inmediato.

Resultado: 140 N/mm^2; 0,23 m

Problema 2. Soporte con ménsula corta

El soporte de la figura, de acero, con **E** = 21000 kN/cm^2, con sección de tubo 100·100·4, sección **S** = 16 cm^2, e inercia **I** = 256 cm^4, soporta una carga **Q** = 50 kN, en el extremo de la ménsula corta, con un vuelo **a** = 0,50 m, dispuesta en su cúspide, con igual sección.
¿Cuál es desplazamiento horizontal del punto de aplicación de **Q**?

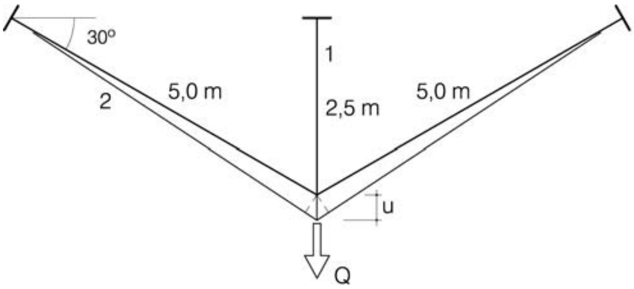


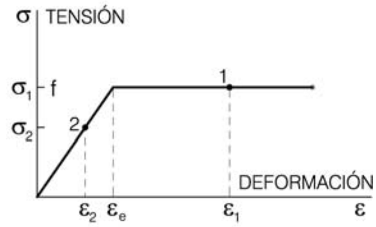
Sugerencia: Se puede proceder a establecer, con la formulación de barras, el desplazamiento debido a un estado de flexión del soporte, que es isostático, e inicialmente de valor constante $\mathbf{M_o} = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{a}$. La expresión es $\delta = \mathbf{M_o}\cdot\mathbf{L}^2/2\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{I}$. Pero ese desplazamiento, se suma al vuelo **a**, cambiando la forma del conjunto. Es como si el soporte estuviera sometido además a una ley de incremento de momen-to curva, con máximo $\Delta\mathbf{M} = \mathbf{Q}\cdot\delta$ en la base. Para ese tipo de ley, se puede tomar, aproximadamente, $\Delta\delta = 0{,}4\cdot\Delta\mathbf{M}\cdot\mathbf{L}^2/\mathbf{E}\cdot\mathbf{I}$.
Como en el problema 1, la alteración de forma induce cambio en la solicitaciones y otro cambio de forma. Sólo que en este caso, cada nuevo cálculo lleva un poco más allá, por lo que no puede establecerse un límite, a menos que se aplique indefinidamente, o se encuentre la ley de la sucesión, obteniendo su suma (a partir de Δδ es una sucesión geométrica). Vale también tantear en la situación final, y usar una hoja de cálculo.

Resultado: 0 96 m

Problema 3. Carga soportada por tres cables

El sistema estructural de los tres cables de la figura, de acero, **E** = 210.000 N/mm^2, con sección igual a 100 mm^2, sin peso, se somete a la acción de **Q** = 40 kN. El acero tiene una resistencia **f** = 250 N/mm^2, que en cuanto la alcanza, la mantiene para deformaciones ilimitadas.
¿Cuáles son las tensiones y deformaciones de los cables, y el descenso del punto cargado?



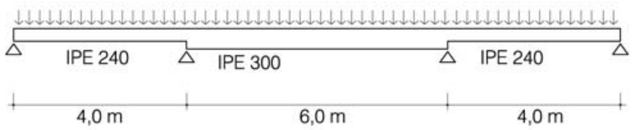


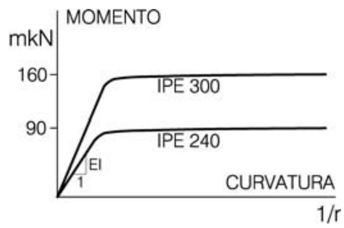
Sugerencia: Aunque formalmente se parece al ejemplo 3, ni los tres cables alcanzan todos la resistencia, ni tienen, todos, tensión inferior a la resistencia, por lo que es un caso intermedio, que exige proceder por escalones de carga. El primero, con los tres cables hasta que uno (por lo que se obtiene en el ejemplo citado, el central), alcanza la resistencia, y otro escalón, con sólo los dos cables extremos (ya que el central puede aumentar su deformación, pero no su tensión).

Resultado: 250 N/mm^2, 150 N/mm^2; 0,7 cm

Problema 4. Viga continua de tres tramos.

La viga continua de la figura tiene sección diferente en cada tramo. Se conoce la capacidad última a momento de cada perfil.
¿Cuál es la capacidad de carga uniforme última de la viga?



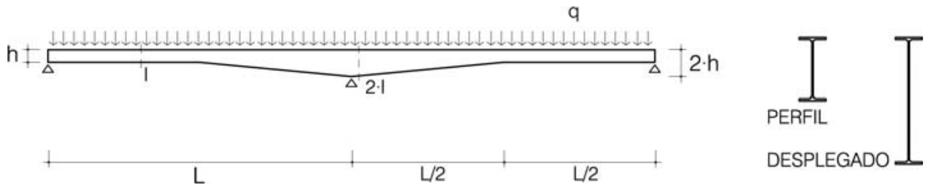


Sugerencia: Bastará trazar un diagrama de tres parábolas en continuidad, procedentes de la misma carga, y que no superen, en ninguna sección, la capacidad del perfil que hay en ese punto.

Resultado: 55 kN/m

Problema 5. Viga continua de sección variable.

La viga de la figura, de canto variable, está realizada con un perfil acartelado, obtenido por desplegado de una IPE, y está sometida a carga uniforme.
¿Cuál es, en términos de **q** y **L**, el momento flector, en régimen elástico, en el punto de continuidad? Como primera aproximación, se puede suponer que la inercia es proporcional al canto.

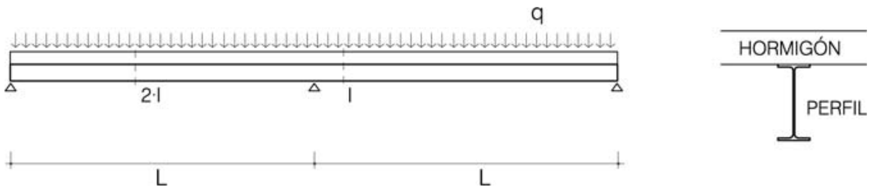


Sugerencia: Por simetría, el momento pedido no puede ser sino el de empotramiento, es decir el que conduce a giro nulo. Descomponiendo un tramo en un caso de carga uniforme y otro lineal, bastará imponer que el giro en el extremo en continuidad de ambos casos sea igual. Se recuerda que, según la teoría de barras, por analogía, los giros extremos son a la curvatura **M/EI**, lo que las reacciones de sustentación son a una carga repartida.

Resultado: $0{,}15 \cdot \mathbf{q} \cdot \mathbf{L}^2$

Problema 6. Viga mixta

La viga de la figura es mixta, formada por un perfil de acero, engarzado eficazmente a una cabeza de hormigón no armado, y por tanto, en las secciones con momentos que traccionan la fibra superior, la rigidez es sólo la del perfil.
¿Cuál es la fracción de luz que, en régimen elástico, está sometida a momentos que traccionan el perfil? Como primera aproximación, se puede suponer que la rigidez de la sección mixta es el doble de la del perfil por sí sólo.

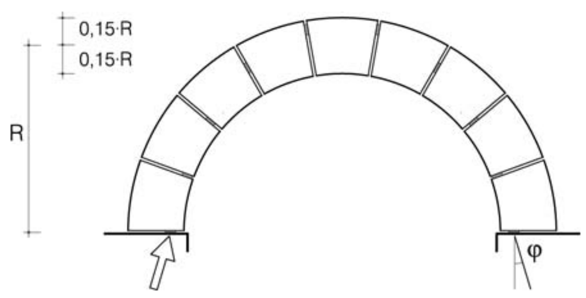


Sugerencia: Bastará suponer un diagrama de momentos tipo, tomando como incógnita el de continuidad, y forzar a que el giro en ese punto, teniendo en cuenta que el tramo de cada signo tiene distinta rigidez, sea nulo. El área de un segmento de parábola es 2/3 del rectángulo circunscrito. Como simplificación, la zona de momentos que traccionan el borde superior, puede suponerse recta.

Resultado: 0,9

Problema 7. Arco de dovelas de piedra

El arco semicircular de la figura está formado por dovelas de piedra. Se supone que la piedra (en rigor el mortero de las llagas) no tiene ninguna resistencia a tracción, pero admite una resistencia a compresión ilimitadamente alta.
¿Cuál es el mínimo coeficiente de rozamiento (cociente de componente de reacción paralela a perpendicular), de los arranques, que permite soportar su peso propio?

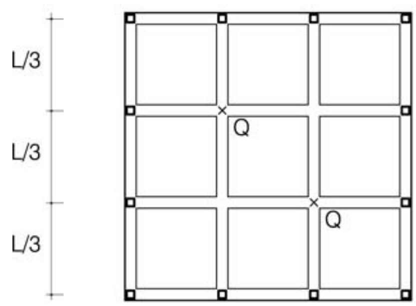


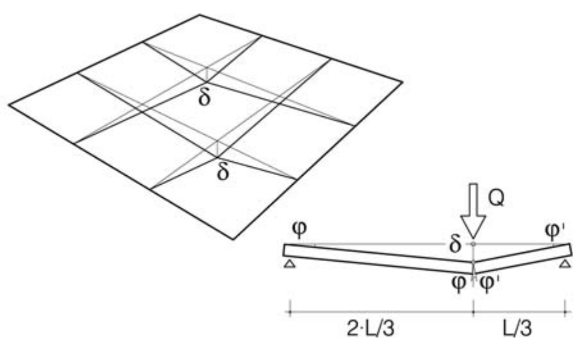
Sugerencia: Es suficiente plantear el equilibrio de medio arco, sometido a la interacción con el otro a través de una fuerza horizontal, la reacción oblicua en el arranque, y su peso propio. Mejor aún, menos la primera dovela. Si se supone resistencia ilimitada y la reacción se supone en la esquina interior, la trayectoria de cargas, oblicua, se saldría del arco. La primera llaga está en peores condiciones de tensión, pero en mejores de rozamiento. Para conocer la posición del centro de gravedad de un arco de círculo, puede usarse la propiedad de que su perímetro, por la longitud de la circunferencia que describe, igualaría a la superficie esférica que resulta de su revolución. Pero para lo que se pretende, basta una razonable aproximación de dónde está.
La suposición de una resistencia a compresión ilimitadamente alta se basa en que el resultado apenas varía si se supone discreta, como sería si necesitara quedar comprimida, por ejemplo, una sección del décimo del grueso del arco.

Resultado: 0,27

Problema 8. Emparrillado

El emparrillado de la figura, realizado todo él con la misma sección (de material dúctil), de peso despreciable, se sustenta en los puntos del perímetro, y está sometido a dos cargas, **Q**, perpendiculares al emparrillado, en los puntos señalados.
¿Cuál es, en términos de **Q** y **L**, la capacidad última a momento flector de la sección, suficiente para soportar dichas cargas?





Sugerencia: Bastará equilibrar el sistema estructural en régimen de descenso incontrolado, por ejemplo, con el esquema de la figura. El cálculo es más sencillo procediendo por trabajo, relacionando el de la carga por su desplazamiento, con el de los elementos del emparrillado en las secciones igualmente en cedencia, como son los contiguos a las cargas en las dos direcciones, sometidas al momento buscado.

Resultado: **Q**·**L**/9