ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS NAVALES

ECUACIONES DIFERENCIALES

EXAMEN FINAL **14 ENERO 2015**

EDO **PUNTUACIÓN: 10 PUNTOS** **TIEMPO: 1h**

APELLIDOS: **NOMBRE:**

1. Obtener la solución general del sistema $x' = x + y + 2$, $y' = -x - y$. *(3 puntos)*
2. Hallar la solución que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$. *(1 punto)*
3. Resolver el apartado anterior por transformada de Laplace. *(2 puntos)*
4. Resolver la ecuación $x^{IV)} - 4x' + 3x = \cos t$. *(2 puntos)*
5. Hallar la solución general de $x'' + x = \delta'(t - \pi)$. Aplicarlo al caso $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. *(2 puntos)*

Solución:

1. Expresamos el sistema en forma matricial,

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4t \end{pmatrix} = AX + F(t).$$

Calculamos los autovalores de A,

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \Rightarrow \lambda = 0,$$

que es un autovalor doble.

Como A no es diagonal, habrá un único autovector linealmente independiente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_0 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pero para construir la base, es preferible comenzar por w_0, que tiene que ser un vector no autovector, tal que Aw_0 sea un autovector.

Tomamos un vector sencillo,

$$w_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_0 = Aw_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, una base que lleva A a la forma canónica de Jordan está formada por $B = \{w_0, v_0\}$ y la matriz de cambio de base será $P = (w_0, v_0)$ para obtener la matriz de Jordan, $A = PJP^{-1}$, con lo cual

$$W(t) = Pe^{Jt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1-t & -1 \end{pmatrix}.$$

Así pues, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = W(t)K = \begin{pmatrix} k_1 t + k_2 \\ k_1(1-t) - k_2 \end{pmatrix}.$$

Como cero es autovalor doble, buscamos una solución particular del sistema, de la forma

$$x_p(t) = at^2 + bt + c, \quad y_p(t) = dt^2 + et + f,$$

$$2at + b = (a+d)t^2 + (b+e)t + (c+f+2), \; 2dt + e = -(a+d)t^2 - (b+e)t - (c+f),$$

$$a=1,\ d=-1,\ e=2-b,\ f=b-c-2,\ \forall b,c,$$

y escogemos la más sencilla, con $b=0=c$,

$$x_p(t)=t^2,\quad y_p(t)=-t^2+2t-2,$$

con lo cual la solución general del sistema es

$$x(t)=k_1t+k_2+t^2,\quad y(t)=k_1(1-t)-k_2-t^2+2t-2.\ \square$$

2. La solución particular que verifica $x(0)=0$, $y(0)=0$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$0=k_2,\quad 0=k_1-k_2-2\Rightarrow k_1=2,\ k_2=0,$$
$$x(t)=2t+t^2,\quad y(t)=-t^2.\ \square$$

3. El problema se podría resolver también por transformada de Laplace de las ecuaciones,

$$sX(s)=X(s)+Y(s)+\frac{2}{s},\quad sY(s)=-X(s)-Y(s),$$

de donde podemos despejar las transformadas de la solución,

$$X(s)=\frac{2}{s^2}+\frac{2}{s^3},\quad Y(s)=-\frac{2}{s^3},$$

y teniendo en cuenta que la transformada de t^p es $p!/s^{p+1}$, podemos invertir fácilmente y obtener la solución del problema de valores iniciales,

$$x(t)=2t+t^2,\quad y(t)=-t^2.\ \square$$

4. Es una ecuación lineal de coeficientes constantes, con lo cual sus soluciones son de forma exponencial. La ecuación característica es

$$\lambda^4-4\lambda+3=0\Rightarrow\lambda=1,1,-1\pm\sqrt{2}i,$$

y, por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t)=k_1te^t+k_2e^t+k_3e^{-t}\cos\sqrt{2}t+k_4e^{-t}\sin\sqrt{2}t.$$

Buscamos una solución particular de la forma $x_p(t)=A\cos t+B\sin t$, ya que $\pm i$ no son autovalores y el término inhomogéneo es de la forma $\cos t$,

$$(4A-4B-1)\cos t+4(A+B)\sin t=0\Rightarrow A=-B=\frac{1}{8},$$

$$x(t)=k_1te^t+k_2e^t+k_3e^{-t}\cos\sqrt{2}t+k_4e^{-t}\sin\sqrt{2}t+\frac{1}{8}\cos t-\frac{1}{8}\sin t.\ \square$$

5. Necesitamos la transformada de $g(t)=f'(t)=\delta'(t-\pi)$, pero, como la transformada de $f(t)=\delta(t-\pi)$ es $F(s)=e^{-\pi s}$ y la transformada de $f'(t)$ es $sF(s)-f(0)$, tenemos que $G(s)=se^{-\pi s}$, dado que la delta se anula fuera de $t=\pi$.

   Transformamos la ecuación,

$$s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+X(s)=se^{-\pi s}\Rightarrow X(s)=\frac{sx(0)+x'(0)+se^{-\pi s}}{s^2+1},$$

expresión que nos permite recuperar la solución general sin más que realizar la transformada inversa,

$$\begin{aligned}x(t)&=x(0)\cos t+x'(0)\sin t+\theta(t-\pi)\cos(t-\pi)\\&=x(0)\cos t+x'(0)\sin t-\theta(t-\pi)\cos t,\end{aligned}$$

sin más que tener en cuenta que la transformada de $f(t-a)\theta(t-a)$ es $F(s)e^{-as}$.

   En el caso particular $x(0)=0=x'(0)$,

$$x(t)=-\theta(t-\pi)\cos t=\left\{\begin{array}{ll}0 & x<\pi\\ -\cos t & x\geq\pi\end{array}\right..\ \square$$

   Obsérvese que la solución ni siquiera es continua en $t=\pi$.

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS NAVALES

ECUACIONES DIFERENCIALES

EXAMEN FINAL **14 ENERO 2015**

EDP **PUNTUACIÓN: 10 PUNTOS** **TIEMPO: 1h**

APELLIDOS: **NOMBRE:**

Sea el problema mixto para $u(x,y)$, $y > 0$, $x \in (0,L)$, que verifica la ecuación $\Delta u = 0$, con condiciones $u(0,y) = 0$, $u(L,y) = 0$, $u(x,0) = f(x)$, $u_y(x,0) = g(x)$, siendo $L > 0$ constante.

1. Hallar la solución del problema en forma de serie. *(4 puntos)*
2. Aplicarlo al caso $L = \pi$, $u(x,0) = 0$, $u_y(x,0) = N^{-1}\sin Nx$, donde N es un número natural. Tomar el límite de la solución cuando N tiende a infinito. Interpretar el resultado. *(1 punto)*
3. Aplicarlo al caso $L = \pi$, $u(x,0) = 0$, $u_y(x,0) = x$. *(2 puntos)*
4. ¿Presenta fenómeno de Gibbs el desarrollo de la función anterior?, ¿dónde? *(1 punto)*
5. Hallar la solución de la ecuación $3x^2u_y + u_x = 6x^5$, que satisface $u(x,0) = h(x)$. Particularizar para el caso en el que $u(x,0) = x^3$. *(2 puntos)*

Solución:

1. Se trata de un problema mixto, ya que las dos primeras condiciones son de contorno y las dos últimas, iniciales, pensando en y como en una coordenada temporal.

   Intentaremos resolver la ecuación de Laplace por separación de variables, buscando soluciones de la forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$, que sustituidas en la ecuación,

$$0 = u_{xx} + u_{yy} = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) \Rightarrow -\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda,$$

   nos permiten separar las variables de la ecuación y reducirla a dos ecuaciones ordinarias,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad Y''(y) - \lambda Y(y) = 0.$$

   Las condiciones de contorno se traducen en condiciones de contorno para la primera ecuación ordinaria,

$$X(0) = 0, \qquad X(L) = 0.$$

   Resolvemos primero el problema para $X(x)$,

$$X''(x) + \lambda X(0) = 0, \qquad X(0) = 0, \quad X(L) = 0,$$

   que corresponde a condiciones de contorno de extremos fijos y ya lo hemos resuelto con anterioridad y tiene por autovalores y autofunciones

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

   y sus múltiplos.

   Por tanto, por superposición lineal de soluciones $u(x,y) = X(x)Y(y)$, obtendremos soluciones más generales

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

   Abordamos la otra ecuación, lineal ordinaria y homogénea, con valores de λ restringidos ya a los autovalores del problema de contorno,

$$Y_n'' - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Y_n = 0,$$

cuya solución general, dado que tiene autovalores $\pm n\pi/L$ es

$$Y_n(y) = a_n e^{n\pi y/L} + b_n e^{-n\pi y/L} = A_n \cosh\frac{n\pi y}{L} + B_n \sinh\frac{n\pi y}{L},$$

para $n = 1, 2, \ldots$. Usaremos la forma hiperbólica de la solución general. Por tanto,

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cosh\frac{n\pi y}{L} + B_n \sinh\frac{n\pi y}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L},$$

resuelve tanto la ecuación como las condiciones de contorno.
Falta utilizar las condiciones iniciales, $u(x,0) = f(x)$, $u_y(x,0) = g(x)$. Comenzamos con la primera,

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Por tanto, si $f(x)$ tiene desarrollo en serie de senos en el intervalo $[0,L]$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad f_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$

comparando ambas expresiones, como el desarrollo de Fourier es único, obtenemos los coeficientes $A_n = f_n$, $n = 1, 2, \ldots$
Los coeficientes B_n los obtenemos con la otra condición, para lo cual necesitamos la derivada,

$$u_y(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}\left(A_n \sinh\frac{n\pi y}{L} + B_n \cosh\frac{n\pi y}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L},$$

$$g(x) = u_y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Así pues, si $g(x)$ tiene desarrollo en serie de senos en el intervalo $[0,L]$,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad g_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$

comparando ambas expresiones, como el desarrollo de Fourier es único, obtenemos los coeficientes $B_n = Lg_n/n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$
Ya tenemos identificados todos los coeficientes de nuestra solución, así que podemos afirmar:
"El problema de la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ para $x \in (0,L)$, $y > 0$ con condiciones mixtas $u(x,0) = f(x)$, $u_y(x,0) = g(x)$, $u(0,y) = 0 = u(L,y)$ para $x \in (0,L)$, $y > 0$, tiene solución

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(f_n \cosh\frac{n\pi y}{L} + \frac{Lg_n}{n\pi}\sinh\frac{n\pi y}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L},$$

si las funciones $f(x)$, $g(x)$ admiten desarrollo convergente de Fourier en el intervalo $(0,L)$"

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad f_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad g_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx. \ \square$$

2. En el caso, $L = \pi$, las expresiones se simplifican

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(f_n \cosh ny + \frac{g_n}{n} \sinh ny \Big) \sin nx,$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin nx, \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin nx.$$

Si $f(x) = 0$, es obvio que todos los coeficientes f_n son nulos. Si $g(x) = N^{-1} \sin Nx$, la propia función es su desarrollo en serie, así que $g_N = 1/N$ y el resto de coeficientes son nulos. Por tanto, la solución en este caso es

$$u(x,y) = \frac{\sinh Ny \, \sin Nx}{N^2}. \ \square$$

Observamos que, si tomamos el límite N tendiendo a infinito, el dato inicial es trivial $u(x,0) = 0$, $u_y(x,0) = 0$, ya que el seno está acotado por la unidad, así que $g(x)$ decrece como $1/N$. La solución en ese caso es la trivial $u(x,y) \equiv 0$, como es fácil comprobar. Sin embargo, para $y \neq 0$, la solución $u(x,y) = N^{-2} \sinh Ny \, \sin Nx$ tiende a infinito como una exponencial e^{Ny}, en lugar de tender a cero.

Por tanto, las condiciones iniciales conducen a malos problemas para la ecuación de Laplace. Esto es razonable, ya que la ecuación de Laplace aparece en problemas estacionarios y, por ello, no tiene mucho sentido considerar la coordenada y como un tiempo. $\square$

3. En este caso $f(x) = 0$ y, por tanto, todos los coeficientes f_n son nulos. Y $g(x) = x$, con coeficientes

$$g_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x \cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n},$$

con lo cual la serie de la solución es

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2} \sinh ny \sin nx. \ \square$$

4. La serie de Fourier en senos en $[0, \pi]$ de $g(x) = x$, al ser de clase C^{∞}, converge a x para $x \in (0, \pi)$ y converge a cero en los extremos. Por tanto, la serie sólo converge a un valor distinto del de la función en $x = \pi$. $\square$

5. Los coeficientes de la ecuación, $a(x,y,u) = 1$, $b(x,y,u) = 3x^2$, $c(x,y,u) = 6x^5$, son funciones de clase C^{∞}.

   El dato inicial es $x(s,0) = f(s) = s$, $y(s,0) = g(s) = 0$, $z(s,0) = h(s)$ y cumple la condición de transversalidad,

$$\left| \begin{array}{cc} a & f'(s) \\ b & g'(s) \end{array} \right|_{(f(s),g(s),h(s))} = \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 3s^2 & 0 \end{array} \right| = -3s^2,$$

   por lo que tendrá solución única si $s \neq 0$. Es decir, el dato inicial presenta problemas en $x = 0$.

   El sistema característico es

$$\dot{x} = 1, \qquad \dot{y} = 3x^2, \qquad \dot{z} = 6x^5,$$

   y sus dos primeras ecuaciones se resuelven sucesivamente,

$$x(s,\tau) = \tau + \alpha(s) \text{ con } s = x(s,0) = \alpha(s) \Rightarrow x(s,\tau) = \tau + s,$$

$$\dot{y} = 3(\tau + s)^2 \Rightarrow y(s,\tau) = (\tau + s)^3 + \beta(s),$$

   e imponiendo las condiciones iniciales,

$$0 = y(s,0) = s^3 + \beta(s) \Rightarrow \beta(s) = -s^3 \Rightarrow y(s,\tau) = (\tau + s)^3 - s^3.$$

   Sustituyendo en la tercera ecuación,

$$\dot{z} = 6(\tau + s)^5 \Rightarrow z(s,\tau) = (\tau + s)^6 + \gamma(s),$$

como $z(s,0)=h(s)$, obtenemos

$$h(s)=z(s,0)=s^6+\gamma(s)\Rightarrow \gamma(s)=h(s)-s^6,$$

con lo cual tenemos la solución del problema en forma paramétrica,

$$x(s,\tau)=\tau+s,\quad y(s,\tau)=(\tau+s)^3-s^3,\quad z(s,\tau)=(\tau+s)^6-s^6+h(s).$$

Podemos eliminar los parámetros s,τ,

$$\tau+s=x,\qquad s^3=x^3-y,\qquad s=\sqrt[3]{x^3-y},\qquad \tau=x-\sqrt[3]{x^3-y},$$

y obtenemos la solución del problema, que es solución general, ya que depende de una función arbitraria de las variables,

$$u(x,y)=x^6-(x^3-y)^2+h(\sqrt[3]{x^3-y})=2x^3y-y^2+h(\sqrt[3]{x^3-y}).\ \square$$

En el caso en el que $h(x)=x^3$ la solución del problema de Cauchy es, sustituyendo,

$$u(x,y)=2x^3y-y^2+x^3-y.\ \square$$