

## Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

### Ecuaciones de primer orden

1. Hallar la solución general de la ecuación  $txx' + 1 + x^2 = 0$ . Hallar la solución que verifica  $x(0) = 0$  y la que verifica  $x(1) = 0$ .
2. Hallar la solución general de la ecuación  $(x^2 + tx^2)x' + t^2 - t^2x = 0$ .
3. Resolver la ecuación  $t^2x' = tx + 3x^2$ . Hallar la solución que verifica  $x(0) = 0$ , la que verifica  $x(0) = 1$  y la que verifica  $x(1) = 0$ .
4. Resolver la ecuación  $(x + 3t + 1)x' = x - t - 3$ .
5. Resolver la ecuación  $x' = (x + 2t)^{-2} - 2$ . Hallar la solución que verifica  $x(0) = 1$ .
6. Resolver la ecuación  $(x + t)^2x' = a^2$ ,  $a > 0$ .
7. Hallar la solución general de la ecuación  $(x + t - 2)x' + 2x + 2t - 1 = 0$ .
8. Resolver la ecuación  $(6t^2x + 4x^3)x' + 3t^2 + 6tx^2 = 0$ . Hallar la solución que verifica  $x(0) = 1$ .
9. Resolver la ecuación  $x(t^2 + 2x^2)x' + t(2t^2 + x^2) = 0$ .
10. Resolver la ecuación  $(t - t^2x)x' = x$ .
11. Resolver la ecuación  $x' = e^t - x/t$ . Hallar la solución que verifica  $x(1) = 1$ .
12. Resolver la ecuación  $x' + 2x = t^2 + 2t$ .
13. Resolver la ecuación  $x' = x \tan t + \cos t$ .
14. Resolver la ecuación  $x' = -x + e^{-t}x^2$ .
15. Resolver la ecuación  $3tx' - 2x = t^3/x^2$ .
16. Resolver la ecuación  $x' = t\sqrt{x} + 4x/t$ . ¿Para qué valores  $t_0$ ,  $x_0$  tiene solución única el problema de valores iniciales  $x(t_0) = x_0$ ? Hallar la solución del problema de valores iniciales correspondiente a  $x(1) = 0$ .
17. Resolver la ecuación  $(1 + t^3)x' + 2tx^2 + t^2x + 1 = 0$ .
18. Resolver la ecuación  $x' = x^2 + (1 - 2t)x + t^2 - t + 1$ .
19. Hallar la solución general de la ecuación  $t^2x' = x^2$  por tres métodos distintos. ¿Para qué valores  $x_0 = x(t_0)$  el problema de valores iniciales tiene solución única? Hallar las soluciones de la ecuación que verifican, respectivamente,  $x(0) = 0$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x(1) = 0$ ,  $x(1) = 1$ . Buscar soluciones de la forma  $x(t) = A$ . Buscar soluciones de la forma  $x(t) = Bt$ . ¿Alguna de ellas es una integral singular?
20. Hallar la solución general de la ecuación  $x^2x' = t^2$  por tres métodos distintos. ¿Para qué valores  $x_0 = x(t_0)$  el problema de valores iniciales tiene solución única? Hallar las soluciones de la ecuación que verifican  $x(0) = 0$ ,  $x(1) = 0$ ,  $x(0) = 1$ . Buscar soluciones de la forma  $x(t) = A$ . Buscar soluciones de la forma  $x(t) = Bt$ . ¿Alguna de ellas es una integral singular?

21. Resolver por tres métodos al menos la ecuación  $2txx' + x^2 + t^2 = 0$ . ¿Para qué valores  $t_0, x_0$  tiene solución única el problema de valores iniciales  $x(t_0) = x_0$ ? Buscar soluciones lineales  $x(t) = At$ . Hallar la solución del problema de valores iniciales correspondiente a  $x(1) = 1$ .
22. Resolver por dos métodos al menos la ecuación  $(x + 2t)x' + 2x + 4t + 2 = 0$ . ¿Para qué valores  $t_0, x_0$  tiene solución única el problema de valores iniciales  $x(t_0) = x_0$ ? Hallar la solución del problema de valores iniciales correspondiente a  $x(0) = 1$ .
23. Resolver la ecuación  $tx' + x + 2t = 0$  por tres métodos distintos.
24. Resolver la ecuación  $tx'/x^2 - 1/x - 1 = 0$ . Buscar soluciones constantes de la ecuación. ¿Hay alguna integral singular?, ¿para qué valores tiene solución única el problema de valores iniciales  $x(t_0) = x_0$  para esta ecuación? Resolver el problema de valores iniciales para  $x(0) = 0, x(0) = 1, x(0) = -1, x(1) = 0, x(1) = 1$ .
25. Resolver la ecuación  $2e^{-t}xx' - e^{-t}x^2 - 4t^3$  por dos métodos. ¿Para qué valores  $t_0, x_0$  tiene solución única el problema de valores iniciales  $x(t_0) = x_0$ ? Resolver los problemas de valores iniciales  $x(0) = 1, x(0) = 0$ .
26. Sabiendo que  $x_1(t) = t^2 + t$  y  $x_2(t) = t^2 + 2t$  son soluciones de una ecuación lineal  $x' = a(t)x + f(t)$ , obtener la solución general de la ecuación. Obtener  $a(t), f(t)$ .
27. Resolver la ecuación  $(t + x^2e^x)x' = x$  para  $t(x)$  en lugar de para  $x(t)$ .
28. Hallar la ecuación diferencial que verifican las circunferencias de ecuación  $x^2 + y^2 = R^2$ . ¿Y la de las hipérbolas equiláteras  $xy = k$ ?
29. Demostrar que la ecuación lineal  $x' = a(t)x + f(t)$  admite un factor integrante que sólo depende de  $t$ . Usar este hecho para obtener la solución general de la ecuación.
30. Sean  $h_1(t), h_2(t)$  dos soluciones de una ecuación de Ricatti,  $x' = a(t)x^2 + b(t)x + f(t)$ . Demostrar que  $x = h_1(t) + 1/y$  es un cambio de variable que reduce la ecuación a una lineal. Demostrar que  $1/(h_2(t) - h_1(t))$  es una solución de dicha ecuación lineal.
31. Problema de la isócrona: Consideremos una partícula descendiendo por la gráfica de una función  $z(x)$  de modo que la velocidad vertical de caída es constante. ¿Cuál es la función  $z(x)$ ?
32. Problema de la tractriz: ¿Cuál es la función  $y(x)$  cuya tangente en cada punto de su gráfica tiene longitud constante  $a$  entre el punto de tangencia y el eje  $X$ ?