Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Transformada de Laplace y de Fourier

1. Hallar la tranformada de Laplace de la función característica del intervalo $[a, b]$, $\chi_{[a,b]}(t) = 1$ si $t \in [a, b]$, $\chi_{[a,b]}(t) = 0$ si $t \notin [a, b]$.

2. Calcular la transformada de Laplace de las funciones $f(t) = \sinh at$, $g(t) = \cosh at$.

3. Demostrar que si la transformada de Laplace de la función $f(t)$ es $F(s)$, entonces la transformada de la función $g(t) = f(at)$, $a > 0$, es $G(s) = F(s/a)/a$.

4. Calcular la transformada de la función $f(t) = \int_0^t t \sin t \, dt$.

5. Calcular la transformada de la función $f(t) = (e^{-t} - e^{-2t)})/t$.

6. Obtener la transformada de Laplace de la función $h(t) = te^t \sin t$.

7. Calcular la transformada de Laplace de la función f que toma valores $f(t) = t$ para $t < 1$ y $f(t) = 2t + 1$ para $t \geq 1$. Calcular la transformada de $f'(t)$.

8. Calcular la transformada de Laplace de la función $f(t) = \ln t$, sabiendo que la integral $\int_0^\infty e^{-x} \ln x \, dx = -\gamma$, siendo γ la constante llamada gamma de Euler. ¿Y la de $g(t) = t \ln t$?

9. Calcular la transformada de Laplace de la función $f(t) = |\sin t|$.

10. Hallar la transformada de Laplace de $f(t) = \int_0^t \frac{\sin^2 t}{t} \, dt$.

11. ¿De qué función es transformada de Laplace $F(s) = 1/(s^2 + 1)^2$?

12. Hallar la transformada inversa de Laplace de $F(s) = 1/(s^4 - 1)$.

13. Resolver el problema de valores iniciales $x''' + x' = e^t$ con $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

14. Resolver el problema de valores iniciales $x'' + 2x' + 5x = f(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, donde $f(t) = 1$ para $t \in [1, 2)$ y $f(t) = 0$ para $t \notin [1, 2)$.

15. Resolver el problema de valores iniciales, $x'' + x' = f(t)$, $f(t) = t + 1$ para $t \in [0, 1]$, $f(t) = 3 - t$, $t \geq 1$, con $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.

16. Hallar la solución general de la ecuación $x'' - 2x' + 2x = f(t)$, donde $f(t) = 0$ para $t \in [0, \pi)$ y $f(t) = 1$ para $t \geq \pi$. Resolver el problema de valores iniciales con $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$.

17. Hallar la solución general de la ecuación $x''' - 7x'' + 15x' - 9x = e^{2t}$. Hallar la solución que verifica $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$. Resolver el apartado anterior por transformada de Laplace.

18. Hallar la solución general de la ecuación $x'' - 2x' + 5x = 16te^{-t}$. Hallar la solución que verifica $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ a partir de la solución general y también por transformación de Laplace.

19. Consideremos la ecuación $x'' - 6x' + 9x = f(t)$. Obtener la solución general de la ecuación para $f(t) = e^{3t}$. Obtener la solución del problema de valores iniciales para $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. Resolver el apartado anterior por transformada de Laplace. Obtener la función de transferencia del problema (transformada $X_I(s)$ de la solución del problema $x'' - 6x' + 9x = \delta(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. Resolver el problema del apartado 2 como convolución con la respuesta al impulso $x_I(t)$.

20. Resolver el sistema $x' = 2y + 3$, $y' = 2x - 2t$ con condiciones iniciales $x(0) = 0 = y(0)$.

21. Sea el problema de valores iniciales dado por la ecuación $x'' - 2x' + x = t^2 e^t$ y las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. Obtener la solución general de la ecuación. Obtener la solución del problema de valores iniciales directamente y por transformada de Laplace. Expresar la ecuación como un sistema lineal de primer orden y resolver el correspondiente sistema homogéneo.

22. Resolver el sistema $x' = 2x + 3y + 3e^{2t}$, $y' = -x - 2y$. Hallar la solución que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

23. Resolver el sistema $x' = x + y + 2$, $y' = -x - y$. Hallar la solución que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

24. Consideremos el sistema $x' = x - 9y$, $y' = x + y - e^t$. Resolver el sistema. Hallar la solución del sistema que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, a partir de la solución general. Resolver el apartado anterior por transformada de Laplace.

25. Consideremos el sistema formado por las ecuaciones $x' = -3x + 2y + 2e^t$, $y' = -4x + 3y + 2e^t$. Obtener la solución general del sistema. Obtener la solución que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$. Obtener la solución del anterior problema de valores iniciales por transformada de Laplace.

26. Hallar la solución general del sistema $x' = -x - y$, $y' = 4x + 3y - 2e^t$. Hallar la solución del problema de valores iniciales correspondiente al sistema anterior con las condiciones $x(0) = 0$, $y(0) = 0$. Hallar la solución del problema anterior por transformada de Laplace.

27. Resolver el sistema $x' = -y + 1 - \theta(t - \pi)$, $y' = x + 1 - \theta(t - \pi)$ con condiciones iniciales $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

28. Resolver el problema de valores iniciales $x'' + x = \delta(t - \pi)$ con $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. Lo mismo para $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

29. Resolver el problema de valores iniciales $x'' + 2x' + 2x = \delta(t - \pi)$ con $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

30. Hallar la solución general de la ecuación $tx'' + x' = 0$ directamente y por transformada de Laplace. Comparar los resultados e interpretarlos.

31. Hallar la solución general de la ecuación $tx'' + (t - 1)x' - x = 0$.

32. Resolver la ecuación integral $x(t) = t^3 + \displaystyle\int_0^t \sin(t - u)x(u)\,du$ para $x(t)$.

33. Hallar las transformadas de Fourier de las siguientes funciones de variable real:

33.1 $\chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 0 & t \notin [a,b] \\ 1 & t \in [a,b] \end{cases}$. b) $g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-at} & t \geq 0 \end{cases}$, $a > 0$.

c) $h(t) = \dfrac{1}{t^2 + a^2}$. d) $j(t) = e^{-t^2/2}$. e) $m(t) = \dfrac{t}{t^2 + a^2}$.

34. Hallar la transformada de Fourier de la función $f(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$. Usar el resultado para calcular la transformada de las funciones $g(t) = te^{-a|t|}$, $h(t) = \text{signo}\,(t)e^{-a|t|}$, $j(t) = |t|e^{-a|t|}$.