# Ecuaciones de primer orden

Leonardo Fernández
Matemática Aplicada, ETSI Navales, Universidad Politécnica de Madrid

**Ecuaciones separables**: $f(x)x' = g(t)$. Solución general: $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int g(t)\,dt + C$.

**Ecuaciones homogéneas**: $x' = f\left(\dfrac{x}{t}\right)$. El cambio $y(t) = \dfrac{x(t)}{t}$ la reduce a separable: $\dfrac{y'}{f(y)-y} = \dfrac{1}{t}$.

**Ecuaciones** $x' = f(at+bx)$: El cambio $y(t) = at + bx(t)$ la reduce a separable: $\dfrac{y'}{a+bf(y)} = 1$.

**Ecuaciones exactas**: $f(t,x)x' + g(t,x) = 0$ con $\dfrac{\partial g}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$. Solución general: $F(t,x) = k$, $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = f \\ \dfrac{\partial F}{\partial t} = g \end{cases}$

**Factor integrante**: función $Q(t,x)$ tal que $Qfx' + Qg = 0$ es exacta.

Si $\dfrac{1}{g}\left\{\dfrac{\partial f}{\partial t} - \dfrac{\partial g}{\partial x}\right\}$ depende sólo de $x$, $Q(x) = \exp\left(\displaystyle\int \dfrac{1}{g}\left\{\dfrac{\partial f}{\partial t} - \dfrac{\partial g}{\partial x}\right\} dx\right)$.

Si $\dfrac{1}{f}\left\{\dfrac{\partial g}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial t}\right\}$ depende sólo de $t$, $Q(t) = \exp\left(\displaystyle\int \dfrac{1}{f}\left\{\dfrac{\partial g}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial t}\right\} dt\right)$.

**Ecuaciones lineales**: $x' = a(t)x + f(t)$. Solución general: $x(t) = ke^{\int a(t)\,dt} + x_p(t)$, $x_p(t)$ solución particular de la ecuación.
**Fórmula de Lagrange**: $x_p(t) = e^{\int a(t)\,dt} \int e^{-\int a(t)\,dt} f(t)\,dt$.
**Variación de constantes**: Buscar $x_p(t) = k(t)e^{\int a(t)\,dt}$.
**Superposición lineal**: La solución general de $x' = a(t)x + f_1(t) + f_2(t)$ es $x(t) = x_h(t) + x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)$ con $x_h(t)$ solucion general de $x' = a(t)x$, $x_{p_1}(t)$ una solución de $x' = a(t)x + f_1(t)$, $x_{p_2}(t)$ una solución de $x' = a(t)x + f_2(t)$. Válido para sistemas y ecuaciones de orden superior.

**Ecuación de Bernoulli**; $x' = a(t)x + b(t)x^n$ con $n \neq 1$. El cambio $y(t) = x^{1-n}(t)$ la reduce a lineal: $y' = (1-n)a(t)y + (1-n)b(t)$.
**Ecuación de Ricatti**: $x'(t) = a(t)x + b(t)x^2 + f(t)$. El cambio $x(t) = x_p(t) + y(t)$ la reduce a Bernoulli: $y' = \big(a + 2bx_p\big)y + by^2$ si $x_p(t)$ es una solución.

**Teorema de existencia de Peano (corolario):** Si $f(t,x)$ es continua en un entorno de $(t_0,x_0)$, entonces existe solución del problema de valores iniciales $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ en un entorno de $t_0$.

**Teorema de existencia y unicidad de Picard (corolario):** Si $f(t,x)$ y $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ son continuas en un entorno de $(t_0,x_0)$, entonces existe solución única del problema de valores iniciales $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ en un entorno de $t_0$.