Sistemas y ecuaciones de orden superior

Leonardo Fernández
Matemática Aplicada, ETSI Navales, Universidad Politécnica de Madrid

1. Sistemas lineales de n ecuaciones

Existencia y unicidad: $x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ \ldots, \ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n)$. Notación: $X' = F(t, X)$.
Problema de valores iniciales de sistemas: $x_1(t_0) = x_{10}, \ \ldots, \ x_n(t_0) = x_{n0}$. Notación $X(t_0) = X_0$.
Teorema de existencia y unicidad: Si f_i y $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$, son continuas en un entorno de $(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0})$, entonces existe solución única de $X' = F(t, X)$, $X(t_0) = X_0$ en un entorno de t_0.
P.V.I. de ecuaciones: $x^{n)} = f\left(t, x, x', \ldots, x^{n-1)}\right), \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_0', \ \cdots \ x^{n-1)}(t_0) = x_0^{n-1)}$.
Corolario: Si f y $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial x'}, \ldots$ son funciones continuas en un entorno de $\left(t_0, x_0, x_0' \ldots, x_0^{n-1)}\right)$, entonces existe solución única del problema de valores iniciales en un entorno de t_0.

2. Reducción de orden de ecuaciones de orden superior

- $x^{n)} = f\left(t, x', \ldots, x^{n-1)}\right)$. El cambio $y(t) = x'(t)$ la reduce a $y^{n-1)} = f\left(t, y, \ldots, y^{n-2)}\right)$.
- $x^{n)} = f\left(t, x^{p)}, \ldots, x^{n-1)}\right)$. El cambio $y(t) = x^{p)}(t)$ la reduce a $y^{n-p)} = f\left(t, y, \ldots, y^{n-p-1)}\right)$.
- **Ecuaciones autónomas**: $x^{n)} = f\left(x, x' \ldots, x^{n-1)}\right)$. El cambio $y(x) = x'(t)$ rebaja el orden:
  $\dfrac{dx}{dt} = y, \qquad \dfrac{d^2x}{dt^2} = y\dfrac{dy}{dx}, \qquad \dfrac{d^3x}{dt^3} = y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y^2\dfrac{d^2y}{dx^2}.$

3. Sistemas de n ecuaciones lineales

Sistemas lineales: $X' = A(t)X + F(t), \ A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, con $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$ continuas.
Matriz fundamental de $X' = AX$: matriz regular $W(t) = \big(X_1(t), \ldots, X_n(t)\big)$ con $\{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$ soluciones de $X' = AX$ (n soluciones linealmente independientes).
Teorema: Si $W(t)$ es matriz fundamental de $X' = AX$, su solución general es $X_h(t) = W(t)K$ con $K = (k_1, \ldots, k_n)^t$. Es decir $X_h(t) = k_1X_1(t) + \cdots + k_nX_n(t)$.
Solución general del sistema $X' = A(t)X + F(t)$:
$X(t) = W(t)K + X_p(t)$ con $X_p(t)$ una solución particular del sistema inhomogéneo.
Fórmula de Lagrange: $X_p(t) = W(t)\int W(t)^{-1}F(t)\,dt$. O bien $X(t) = W(t)\int W(t)^{-1}F(t)\,dt + W(t)K$.

4. Sistemas lineales con coeficientes constantes

Exponencial de una matriz cuadrada A: $e^A := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \mathbb{I} + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots$.

- **Matriz diagonal**: $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad e^D = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$.
- $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}, \qquad e^{B+C} = e^Be^C$ si $BC = CB$.
- **Cambio de base** $A = PBP^{-1}$, con P regular: $e^A = Pe^BP^{-1}$.

Teorema: El sistema homogéneo $X' = AX$ tiene por matriz fundamental $W(t) = e^{At}$. La solución general del sistema es $X_h(t) = e^{At}K$.

Fórmula de Lagrange: La solución general de $X' = AX + F(t)$ es $X(t) = e^{At}K + e^{At}\displaystyle\int e^{-At}F(t)\,dt$.

Caso $n = 2$: λ, μ autovalores de A con autovectores v_λ, v_{λ_μ}. Casos:

- $\lambda \neq \mu$: A es diagonalizable: $P = (v_\lambda, v_\mu)$. Matriz fundamental $W(t) = Pe^{Dt}$.
- $\lambda = \mu$ y A diagonal: Ecuaciones de orden uno desacopladas.
- $\lambda = \mu$ y A no diagonal: $W(t) = Pe^{Jt}$, $\quad e^{Jt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$, $\quad P = (w_\lambda, v_\lambda)$, $\quad v_\lambda = (A - \lambda\mathbb{I})w_\lambda$.
- $\lambda = a + ib$, $\mu = \bar{\lambda} = a - ib$, $b > 0$: $P = (v_\lambda, \overline{v_\lambda})$. Matriz fundamental $W(t) = Pe^{Dt}P^{-1}$.
  Solución general real: $X_h(t) = k_1X_1(t) + k_2X_2(t)$ con $X_1(t) = \Re\left(e^{\lambda t}v_\lambda\right)$, $\quad X_2(t) = \Im\left(e^{\lambda t}v_\lambda\right)$.

Método de coeficientes indeterminados para buscar solución del sistema inhomogéneo:

- $f_i(t) = e^{at}p_{m\,i}(t)$, con $p_{m\,i}(t)$ polinomio de grado m:
  Si a no es autovalor, buscar $x_{p\,j}(t) = e^{at}q_{m\,j}(t)$, $j = 1, \ldots, n$, con $q_{m\,j}(t)$ polinomios de grado m.
  Si a es autovalor de multiplicidad g, buscar $x_{p\,j}(t) = e^{at}q_{m+g\,j}(t)$.
- $f_i(t) = e^{at}\big(p_{m\,i}(t)\cos bt + \tilde{p}_{m\ i}(t)\sin bt\big)$ con $p_{m\,i}(t)$, $\tilde{p}_{m\,i}(t)$ polinomios de grado m:
  Si $a + ib$ no es autovalor, buscar $x_{p\,j}(t) = e^{at}\big(q_{m\,j}(t)\cos bt + \tilde{q}_{m\,j}(t)\sin bt\big)$.
  Si $a + ib$ es autovalor de multiplicidad g, buscar $x_{p\,j}(t) = e^{at}\big(q_{m+g\,j}(t)\cos bt + \tilde{q}_{m+g\,j}(t)\sin bt\big)$.

5. Ecuaciones lineales de orden superior

Solución general de $x^{n)} + a_1(t)x^{n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0$: $x(t) = k_1x_1^*(t) + \cdots + k_nx_n^*(t) + x_p(t)$ con $x_1^*(t), \ldots, x_n^*(t)$ soluciones de la ecuación homogénea con $|W(t)| = \begin{vmatrix} x_1^*(t) & \cdots & x_n^*(t) \\ x_1^{*\prime}(t) & \cdots & x_n^{*\prime}(t) \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ x^{*\,n-1)}_1(t) & \cdots & x^{*\,n-1)}_n(t) \end{vmatrix} \neq 0$ y $x_p(t)$ solución de la ecuación inhomogénea.

Reducción de orden: Si $x_1(t)$ es una solución de la ecuación lineal homogénea, el cambio $x(t) = x_1(t)y(t)$ reduce una unidad el orden de la ecuación para y.

6. Ecuaciones con coeficientes constantes

Ecuación de coeficientes constantes: $x^{n)} + a_1x^{n-1)} + \cdots + a_nx = f(t)$.
Su **ecuación característica**: $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1)} + \cdots + a_n = 0$, proporciona n autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Casos:

- Autovalores distintos: La solución general de la ecuación homogénea es $x_h(t) = k_1e^{\lambda_1 t} + \cdots + k_ne^{\lambda_n t}$.
- Autovalores complejos: $\lambda = a + ib$, $\bar{\lambda} = a - ib$, $b > 0$: $ke^{\lambda t} + \bar{k}e^{\bar{\lambda}t} = ce^{at}\cos bt + de^{at}\sin bt$.
- λ autovalor de multiplicidad g: Aporta a la solución general $(k_1t^{g-1} + \cdots + k_{g-1}t + k_g)e^{\lambda t}$.

Método de coeficientes indeterminados para buscar solución de la ecuación inhomogénea:

- $f(t) = e^{at}p_m(t)$, con $p_m(t)$ polinomio de grado m:
  Si a no es autovalor, buscar $x_p(t) = e^{at}q_m(t)$, con $q_m(t)$ un polinomio de grado m.
  Si a es autovalor de multiplicidad g, buscar $x_p(t) = t^ge^{at}q_m(t)$.
- $f(t) = e^{at}\big(p_m(t)\cos bt + \tilde{p}_m(t)\sin bt\big)$, con $p_m(t)$, $\tilde{p}_m(t)$ polinomios de grado m:
  Si $a + ib$ no es autovalor, buscar $x_p(t) = e^{at}\big(q_m(t)\cos bt + \tilde{q}_m(t)\sin bt\big)$ con $q_m(t)$, $\tilde{q}_m(t)$ polinomios de grado m.
  Si $a + ib$ es autovalor de multiplicidad g, buscar $x_p(t) = t^ge^{at}\big(q_m(t)\cos bt + \tilde{q}_m(t)\sin bt\big)$.

Ecuaciones de Euler: $t^nx^{n)} + a_1t^{n-1}x^{n-1)} + \cdots + a_{n-1}tx' + a_nx = 0$ con el cambio $t = e^s \Leftrightarrow s = \ln t$, se reducen a ecuaciones con coeficientes constantes: $t\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx}{du}$, $\qquad t^2\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d^2x}{du^2} - \dfrac{dx}{du}, \ldots$