Transformadas integrales

Leonardo Fernández
Matemática Aplicada, ETSI Navales, Universidad Politécnica de Madrid

1. Transformadas de Laplace

La **transformada de Laplace** de $f(t)$ es $F(s) = \displaystyle\int_0^\infty dt\, e^{-st} f(s)$.

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(s)}$	$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(s)}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	$f^{n)}(t)$	$s^n F(s) - \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} s^i f^{n-1-i)}(0)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, $s > a$	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
t^n, $n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{n)}(s)$
t^α, $\alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$	$f(t)$ de periodo T	$\frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$f(t)/t$, $\lim\limits_{t\to 0} g(t)$ finito	$\int_s^\infty F(u)\, du$	$\int_0^t f(t)\, dt$	$\frac{F(s)}{s}$
$\theta_a(t)$, $a > 0$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$f(t-a)\theta(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
$\delta_a(t)$, $a \geq 0$	e^{-as}	$\big(f * g\big)(t)$	$F(s)G(s)$

La función **Gamma de Euler**: $\Gamma(x) := \displaystyle\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$. Para $n \in \mathbb{N}$: $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Convolución (Laplace) de dos funciones $\big(f * g\big)(t) := \displaystyle\int_0^t f(u) g(t-u)\, du$. Es asociativa y distributiva.

Función paso, escalón o de Heaviside: $\theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$. $\quad \theta_a(t) := \theta(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$

Función característica o filtro constante de $[a,b]$: $\chi_{[a,b]}(t) = \theta(t-a)\theta(b-t) = \begin{cases} 0 & t \notin [a,b] \\ 1 & t \in [a,b] \end{cases}$.

Actuación de f sobre funciones prueba: $f[\phi] := \displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(t)\phi(t)\, dt$.

Derivada generalizada: $f'[\phi] := -\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(t)\phi'(t)\, dt$.

Delta de Dirac, impulso: $\delta_a(t) = \delta(t-a) = \theta_a'(t)$. $\quad \delta_a[f] = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty \delta(t-a) f(t)\, dt = f(a)$.

Propiedades: $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \delta(t-a) = 1$. $\quad f(t)\delta_a(t) = f(a)\delta_a(t)$.

Función de transferencia de $a_0 x^{n)} + \cdots + a_n x = f(t)$: $X_I(s) = \dfrac{1}{P(s)}$ con $P(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n$.

Respuesta al impulso $\delta(t)$: $x_I(t)$.

Solución de $a_0 x^{n)} + \cdots + a_n x = f(t)$, $\quad x(0) = x'(0) = \cdots = x^{n-1)}(0) = 0$:

$x(t) = \big(x_I * f\big)(t)$ con $X(s) = \dfrac{F(s)}{P(s)} = X_I(s) F(s)$.

2. Transformada de Fourier

Transformada de Fourier de $f(t)$: $F(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t} f(t)$. Se precisa $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$

Transformada inversa de Fourier de $F(\omega)$: $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega t} F(\omega)$.

Identidad de la energía o de Plancherel: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega$.

Transformadas sucesivas: $F = T(f)$, $\quad \tilde{f} = T^2(f)$, $\quad f = T^3(F)$, $\quad f = T^4(f)$ donde $\tilde{f}(t) = f(-t)$.

Convolución (Fourier) de dos funciones $\big(f * g\big)(t) := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(t-u)\, du$. Es asociativa y distributiva.

Propiedades: $|(f * g)(t)| \leq \sqrt{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt} \sqrt{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\, dt}$.

Correlación de f, g: $(f * * g)(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u)} g(u+t)\, du$. $\qquad f * * g = \bar{\tilde{f}} * g$.

Autocorrelación de f: $f * * f$. Propiedades: $|f * * f(t)| \leq \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} f(t)\, dt = (f * * f)(0)$.

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F}(\omega)$	$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F}(\omega)$
$f'(t)$	$i\omega F(\omega)$	$f^{n)}(t)$	$(i\omega)^n F(\omega)$
$t^n f(t)$	$i^n F^{n)}(\omega)$	$F(t)$	$f(-\omega)$
$f(t-a)$	$e^{-ia\omega} F(\omega)$	$e^{iat} f(t)$	$F(\omega - a)$
$\big(f * g\big)(t)$	$\sqrt{2\pi} F(\omega) G(\omega)$	$f(t) g(t)$	$(F * G)(\omega)/\sqrt{2\pi}$
$\delta_a(t)$	$e^{-ia\omega}/\sqrt{2\pi}$	e^{iat}	$\sqrt{2\pi}\delta(\omega - a)$
$\big(f * * g\big)(t)$	$\sqrt{2\pi}\, \overline{F(\omega)} G(\omega)$	$\big(f * * f\big)(t)$	$\sqrt{2\pi}\, \lvert F(\omega) \rvert^2$