Capítulo 1

Ecuaciones de primer orden

Problema 1.1 *Hallar la solución general de la ecuación* $txx' + 1 + x^2 = 0$. *Hallar la solución que verifica* $x(0) = 0$ *y la que verifica* $x(1) = 0$.

Solución:

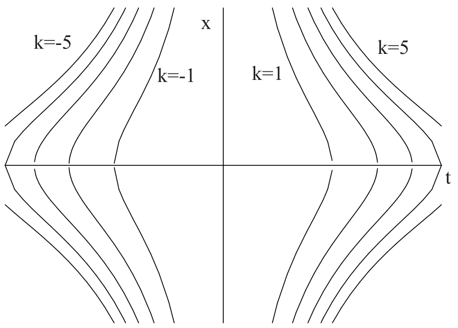

Figura 1.1: Soluciones de la ecuación $txx' + 1 + x^2 = 0$

La ecuación es separable,

$$\frac{x}{1+x^2}\,dx = -\frac{dt}{t} \Rightarrow \ln(1+x^2) = k - \ln t^2 \Rightarrow x(t) = \pm\sqrt{\frac{C}{t^2} - 1}. \ \square$$

Las gráficas de las soluciones de la ecuación son simétricas respecto a ambos ejes. Obviamente, la constante C tiene que ser positiva para que la raíz tenga sentido. Las soluciones están definidas para $t \in (0, \sqrt{C})$ o en $(-\sqrt{C}, 0)$.

El teorema de existencia y unicidad no se puede aplicar en $t = 0$ ni en $x = 0$, puesto que x' no está definida en dichos puntos. En $x = 0$ las soluciones tienen pendiente vertical. Para $t = 0$ las soluciones son singulares, por lo que no podemos imponer datos iniciales en este valor. $\square$

En cambio, para $x(1) = 0$,

$$0 = x(1) = \pm\sqrt{C-1} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow x(t) = \pm\sqrt{\frac{1}{t^2} - 1},$$

es decir, hay dos soluciones que se corresponden con esta condición, lo cual no es extraño, ya que en $x = 0$ no se aplica el teorema de existencia y unicidad. □

Problema 1.2 *Hallar la solución general de la ecuación* $(x^2+tx^2)x'+t^2-t^2x = 0$.

Solución:

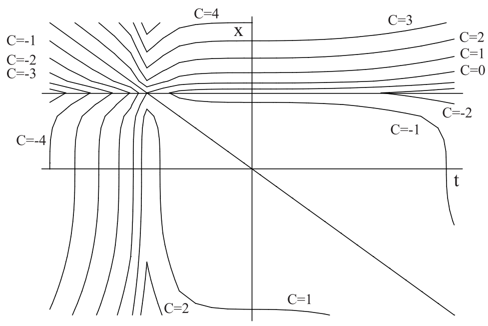

Figura 1.2: Soluciones de la ecuación $(x^2 + tx^2)x' + t^2 - t^2x$

La ecuación es separable,

$$\frac{x^2}{x-1}\,dx = \frac{t^2}{t+1}\,dt \Rightarrow \left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx = \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| = \frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| + C. \ \square$$

O, agrupando términos,

$$(x+t)\left(\frac{x-t}{2}+1\right) + \ln\left|\frac{x-1}{t+1}\right| = C.$$

Aparte, existen soluciones sencillas. Buscando soluciones de la forma $x(t) = A$, obtenemos la solución $x(t) = 1$, que se corresponde con el límite infinito de C, por lo que es una integral singular.

Asimismo, buscando soluciones de la forma $x(t) = Bt$, obtenemos la solución $x(t) = -t$.

El teorema de existencia y unicidad se puede aplicar a todos los puntos del plano, excepto a los correspondientes a $x = 0$ y a $t = -1$, donde x' no está definida.

Para $t = -1$, la ecuación implica $x = 1$, luego todas las soluciones pasan por el punto $(-1, 1)$, o bien x' es infinita.

Para $x = 0$, o bien $t = 0$, o bien x' es infinita.

Problema 1.3 *Resolver la ecuación* $t^2x' = tx + 3x^2$. *Hallar la solución que verifica* $x(0) = 0$, *la que verifica* $x(0) = 1$ *y la que verifica* $x(1) = 0$.

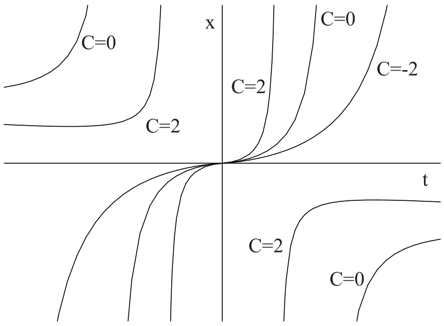

Figura 1.3: Soluciones de la ecuación $t^2x' = tx + 3x^2$

Solución:

La ecuación diferencial es homogénea,

$$x' = \frac{x}{t} + 3\frac{x^2}{t^2} = f(x/t),$$

por lo que se puede resolver con un cambio de variable dependiente $y = x/t$, que la reduce a una ecuación separable,

$$\frac{1}{t} = \frac{y'}{f(y) - y} = \frac{y'}{3y^2} \Rightarrow C + 3\ln|t| = -\frac{1}{y} \Rightarrow x(t) = ty(t) = -\frac{t}{C + 3\ln|t|}. \ \square$$

A la vista de la ecuación, podemos aplicar el teorema de existencia y unicidad, salvo en los puntos con $t = 0$. Luego habrá solución única que pase por todos los puntos del plano, salvo por los de la forma $(0, x)$.

Esto se debe a que la ecuación en $t = 0$ implica $x = 0$. Es decir, para $t = 0$ todas las soluciones pasan por $x = 0$, con lo cual el problema de valores iniciales con $x(0) = 0$ tiene infinitas soluciones. $\square$

En cambio, por los puntos $(0, x)$ con $x \neq 0$ no pasa ninguna solución. Por ejemplo, el problema de valores iniciales con $x(0) = 1$ no tiene solución. $\square$

Finalmente, el problema de valores iniciales con $x(1) = 0$ tiene solución única,

$$0 = x(1) = -\frac{1}{C} \Rightarrow C = \infty, \quad x(t) = 0,$$

que es una integral singular de la ecuación. $\square$

Problema 1.4 *Resolver la ecuación* $(x + 3t + 1)x' = x - t - 3$.

Solución:

La ecuación diferencial no es homogénea por culpa de los términos constantes 3, 1. Si pudiéramos eliminarlos mediante un cambio $x = y + A$, $t = s + B$, de modo que

$$x + 3t + 1 = y + 3s + A + 3B + 1 = y + 3s, \quad x - t - 3 = y - s + A - B - 3 = y - s,$$

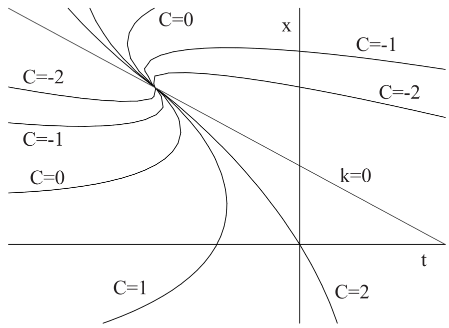

Figura 1.4: Soluciones de la ecuación $(x + 3t + 1)x' = x - t - 3$

la ecuación resultante,

$$y' = \frac{y - s}{y + 3s} = \frac{y/s - 1}{y/s + 3} = f(y/s),$$

sería homogénea.

Para ello es preciso que

$$A + 3B + 1 = 0, \quad A - B - 3 = 0 \Rightarrow A = 2,\ B = -1,$$

con lo cual el cambio de variable es $x = y + 2$, $t = s - 1$.

Resolvemos la ecuación con el cambio habitual $z = y/s$,

$$\frac{1}{s} = \frac{z'}{f(z) - z} \Rightarrow \frac{ds}{s} = -\frac{z + 3}{(z + 1)^2}\, dz = -\left(\frac{2}{(z + 1)^2} + \frac{1}{z + 1}\right) dz,$$

$$\ln|s| = C - \ln|z + 1| + \frac{2}{z + 1} \Rightarrow \ln|s(z + 1)| = C + \frac{2}{z + 1},$$

expresión que podemos exponenciar para eliminar los valores absolutos, $k = \pm e^C$

$$y + s = ke^{2s/(y+s)} \Rightarrow x + t - 1 = ke^{2(t+1)/(x+t-1)},$$

y obtener así la solución general de la ecuación en forma implícita. □

Una de las soluciones, $k = 0$, es una recta, $x(t) = 1 - t$.

El teorema de existencia y unicidad se puede aplicar en todos los puntos del plano, salvo en los que verifican $x + 3t + 1 = 0$, ya que en ellos x' es infinita. Menos en el punto $(B, A) = (-1, 2)$, intersección de las rectas $x + 3t + 1 = 0$, $x - t - 3 = 0$, donde la pendiente no está definida. Por este punto pasan todas las soluciones.

Problema 1.5 *Resolver la ecuación* $x' = (x + 2t)^{-2} - 2$. *Hallar la solución que verifica* $x(0) = 1$.

Solución:

La ecuación $x' = (x + 2t)^{-2} - 2 = f(x + 2t)$ se reduce a una separable con el cambio $y = x + 2t$,

$$1 = \frac{y'}{2 + f(y)} = y^2 y' \Rightarrow 3t + C = y^3 \Rightarrow x(t) = y(t) - 2t = \sqrt[3]{3t + C} - 2t. \ \square$$

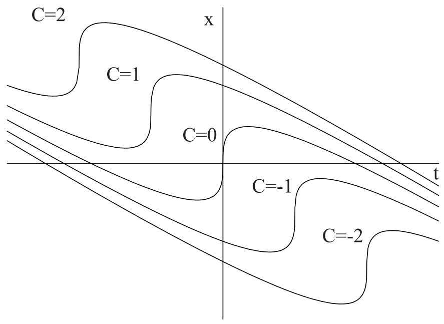

Figura 1.5: Soluciones de la ecuación $x' = (x + 2t)^{-2} - 2$

La ecuación tiene solución única salvo en los puntos de la recta $x + 2t = 0$, donde x' no está definida. Observamos que por dichos puntos, no obstante, pasa una única curva, pero con pendiente infinita.

La solución que verifica $x(0) = 1$,

$$1 = \sqrt[3]{C} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow x(t) = \sqrt[3]{3t+1} - 2t. \ \square$$

Problema 1.6 *Resolver la ecuación* $(x + t)^2 x' = a^2$, $a > 0$.

Solución:

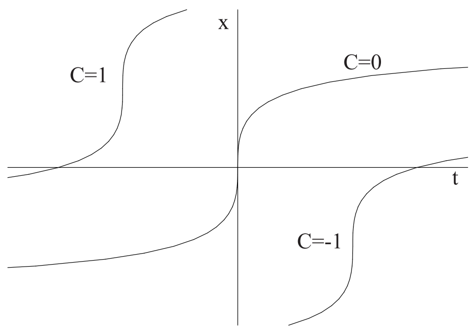

Figura 1.6: Soluciones de la ecuación $(x + t)^2 x' = a^2$

La ecuación es de la forma $x' = f(x + t)$, con lo cual se reduce a separable con el cambio $y = x + t$,

$$y' = \frac{a^2}{y^2} + 1 \Rightarrow \frac{y^2}{y^2 + a^2}\, dy = dt \Rightarrow y - a \arctan\left(\frac{y}{a}\right) = t + C,$$

y deshaciendo el cambio de variable, $x = y - t$, la solución general, en forma implícita, es

$$x = C + a \arctan\left(\frac{x+t}{a}\right). \ \square$$

No se puede despejar la x, pero sí la t,

$$t = a \tan\left(\frac{x - C}{a}\right) - x.$$

El teorema de existencia y unicidad se puede aplicar en todos los puntos del plano, salvo para los de la recta $x+t=0$, donde x' no está definida. Observamos que en esos puntos la pendiente de las gráficas de las soluciones de la ecuación es infinita.

Problema 1.7 *Hallar la solución general de la ecuación* $(x+t-2)x' + 2x + 2t - 1 = 0$.

Solución:

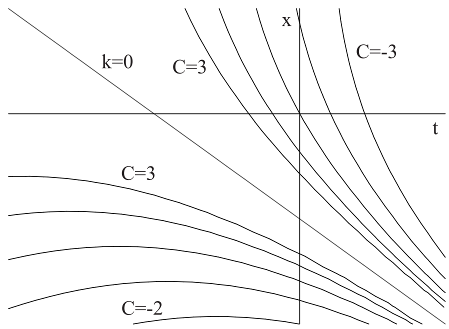

Figura 1.7: Soluciones de la ecuación $(x+t-2)x' + 2x + 2t - 1 = 0$

La ecuación es de la forma $x' = f(x+t)$, con lo cual se reduce a separable con el cambio $y = x + t$,

$$y' = 1 - \frac{2y-1}{y-2} = -\frac{y+1}{y-2} \Rightarrow \frac{y-2}{y+1}\,dy = \left(1 - \frac{3}{y+1}\right) dy = -dt \Rightarrow$$

$$y - 3\ln|y+1| = C - t,$$

y deshaciendo el cambio de variable, $x = y - t$, la solución general, en forma implícita, es

$$x = C - 2t + 3\ln|x+t+1| \Rightarrow ke^{x+2t} = (x+t+1)^3,\ k = \pm e^{-C}.\ \square$$

Una solución de la forma $x(t) = At + B$, obtenemos una integral singular $x(t) = -t - 1$, que se corresponde con el valor $k = 0$ en la última expresión o el límite de constante C infinita.

El teorema de existencia y unicidad es aplicable salvo en los puntos de la recta $x + t = 2$, donde la derivada x' se vuelve infinita.

Problema 1.8 *Resolver la ecuación* $(6t^2x + 4x^3)x' + 3t^2 + 6tx^2 = 0$. *Hallar la solución que verifica* $x(0) = 1$.

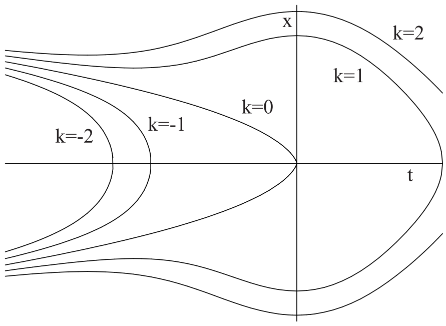

Figura 1.8: Soluciones de la ecuación $(6t^2x + 4x^3)x' + 3t^2 + 6tx^2 = 0$

Solución:

La ecuación tiene solución única, salvo tal vez en los puntos con $x = 0$, donde x' no está definida.

La ecuación es exacta, como se comprueba tomando $f(t, x) = 6t^2x + 4x^3$, $g(t, x) = 3t^2 + 6tx^2$,

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = 12tx - 12tx = 0,$$

por tanto, existe una función $F(t, x)$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F(t,x)}{\partial x} = f(t,x) = 6t^2x + 4x^3 \\ \\ \dfrac{\partial F(t,x)}{\partial t} = g(t,x) = 3t^2 + 6tx^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} F(t,x) = 3t^2x^2 + x^4 + h(t) \\ h'(t) = 3t^2 \Rightarrow h(t) = t^3 \end{array}\right\},$$

con lo cual las soluciones de la ecuación tienen la forma implícita $F(t, x) = k$,

$$3t^2x^2 + x^4 + t^3 = k. \; \square$$

Obsérvese que las soluciones son simétricas respecto al eje T, puesto que $F(t, -x) = F(t, x)$. En los puntos con $x = 0$ lo que sucede es que x' es infinita.

Buscamos la solución que verifica $x(0) = 1$,

$$k = F(0, 1) = 1 \Rightarrow 3t^2x^2 + x^4 + t^3 = 1. \; \square$$

Problema 1.9 *Resolver la ecuación* $x(t^2 + 2x^2)x' + t(2t^2 + x^2) = 0$.

Solución:

Comprobamos que la ecuación es exacta, tomando $f(t, x) = x(t^2 + 2x^2)$, $g(t, x) = t(2t^2 + x^2)$,

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = 2tx - 2tx = 0,$$

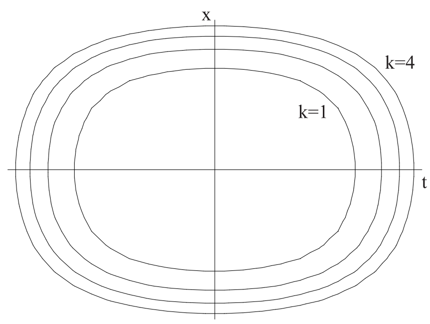

Figura 1.9: Soluciones de la ecuación $x(t^2+2x^2)x' + t(2t^2+x^2) = 0$

por tanto, existe una función $F(t,x)$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F(t,x)}{\partial x} = f(t,x) = x(t^2+2x^2) \\[2ex] \dfrac{\partial F(t,x)}{\partial t} = g(t,x) = t(2t^2+x^2) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} F(t,x) = \dfrac{t^2x^2+x^4}{2} + h(t) \\[2ex] h'(t) = 2t^3 \Rightarrow h(t) = \dfrac{t^4}{2} \end{array}\right\},$$

con lo cual las soluciones de la ecuación tienen la forma implícita $F(t,x) = k$,

$$t^4 + t^2x^2 + x^4 = C = 2k. \ \square$$

Obsérvese que las soluciones son simétricas respecto a ambos ejes y frente al intercambio $x \leftrightarrow t$. La constante k tiene que ser positiva para que la expresión tenga sentido.

El teorema de existencia y unicidad se puede aplicar salvo en los puntos con $x = 0$, donde la pendiente de las gráficas de las soluciones es infinita.

Problema 1.10 *Resolver la ecuación* $(t - t^2x)x' = x$.

Solución:

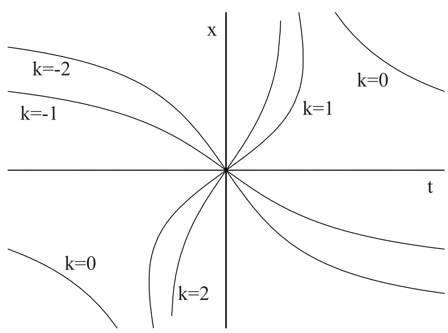

Figura 1.10: Soluciones de la ecuación $(t - t^2x)x' = x$

Esta ecuación no es separable, ni lineal, ni exacta, $f(t,x) = t - t^2 x$, $g(t,x) = -x$,

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = -2(1 - tx),$$

pero al dividir esta expresión por $f(t,x)$, depende sólo de t, con lo cual hay un factor integrante que depende de t,

$$\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{f}\left\{\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial t}\right\} = -\frac{2}{t} \Rightarrow \ln|Q(t)| = -2\ln|t| \Rightarrow Q(t) = \frac{1}{t^2},$$

y la ecuación

$$\left(\frac{1}{t} - x\right) x' - \frac{x}{t^2} = 0,$$

es exacta, con solución general $F(t,x) = k$,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F(t,x)}{\partial x} = \dfrac{1}{t} - x \\ \\ \dfrac{\partial F(t,x)}{\partial t} = -\dfrac{x}{t^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} F(t,x) = \dfrac{x}{t} - \dfrac{x^2}{2} + h(t) \\ \\ h'(t) = 0 \Rightarrow h(t) = \text{const.} \end{array}\right\},$$

con lo cual las soluciones de la ecuación tienen la forma implícita

$$\frac{x}{t} - \frac{x^2}{2} = k \Rightarrow t = \frac{2x}{x^2 + 2k}. \ \square$$

Hay solución única por todos los puntos del plano, excepto los que tienen $t = 0$ o $xt = 1$. Observamos que todas las soluciones pasan por $(0,0)$ y ninguna pasa por $(0,x)$, con $x \neq 0$. En los puntos con $xt = 1$, la tangente a la gráfica de la solución es vertical.

Problema 1.11 *Resolver la ecuación $x' = e^t - x/t$. Hallar la solución que verifica $x(1) = 1$.*

Solución:

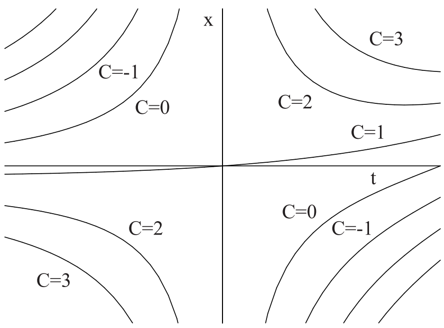

Figura 1.11: Soluciones de la ecuación $x' = e^t - x/t$

La ecuación es lineal en x. Obtenemos la solución de la ecuación homogénea, $x' = a(t)x$, $a(t) = -1/t$,

$$x_h(t) = ke^{\int a(t)\,dt} = ke^{-\ln|t|} = \frac{C}{t},$$

tomando $C = \pm k$.

Buscamos una solución particular de la ecuación inhomogénea por el método de variación de constantes, $x_p(t) = C(t)/t$,

$$\frac{C'}{t} = e^t \Rightarrow C(t) = \int te^t\,dt = te^t - e^t \Rightarrow x(t) = \frac{C}{t} + e^t - \frac{e^t}{t}. \ \square$$

Hay solución única por todos los puntos del plano TX, salvo en los que tienen $t = 0$, el eje X. A la vista de la solución general, vemos que sólo hay una solución que pasa por $(0,0)$.

En particular, la solución que verifica $x(1) = 1$,

$$1 = x(1) = C + e - e \Rightarrow C = 1 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{t} + e^t - \frac{e^t}{t}. \ \square$$

Problema 1.12 *Resolver la ecuación $x' + 2x = t^2 + 2t$.*

Solución:

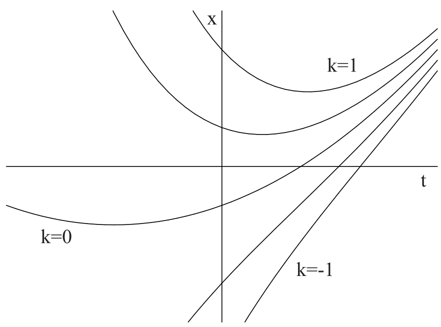

Figura 1.12: Soluciones de la ecuación $x' + 2x = t^2 + 2t$

Se trata de una ecuación lineal inhomogénea con coeficientes constantes. La solución general de la ecuación homogénea $x' + 2x = 0$ es $x_h(t) = ke^{-2t}$.

En lugar de tratar de obtener una solución particular de la ecuación inhomogénea por variación de constantes, probamos una solución del tipo $x_p(t) = At^2 + Bt + C$,

$$2At^2 + 2(A+B)t + B + 2C = t^2 + 2t \Rightarrow A = \frac{1}{2},\ B = \frac{1}{2},\ C = -\frac{1}{4},$$

con lo cual la solución general de la ecuación es

$$x(t) = ke^{-2t} + \frac{t^2+t}{2} - \frac{1}{4}. \ \square$$

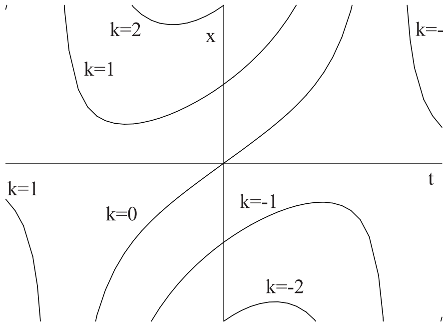

Figura 1.13: Soluciones de la ecuación $x' = x\tan t + \cos t$

Problema 1.13 *Resolver la ecuación* $x' = x\tan t + \cos t$.

Solución:

Es una ecuación lineal. Resolvemos primero la ecuación homogénea, $x' = x\tan t$,

$$x_h(t) = ke^{\int \tan t\,dt} = ke^{-\ln|\cos t|} = \frac{K}{\cos t},$$

tomando $K = \pm k$.

Buscamos una solución particular de la ecuación inhomogénea de la forma $x_p(t) = K(t)/\cos t$,

$$\frac{K'}{\cos t} = \cos t \Rightarrow K' = \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} \Rightarrow K(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t,$$

con lo cual ya tenemos la solución general de la ecuación,

$$x(t) = \frac{K}{\cos t} + \frac{t}{2\cos t} + \frac{1}{2}\sin t. \ \square$$

El teorema de existencia y unicidad indica que hay solución única por todos los puntos del plano, salvo en los puntos con $t = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2\ldots$, donde la pendiente x' no está definida. Observamos que en dichos puntos las soluciones no están definidas.

Problema 1.14 *Resolver la ecuación* $x' = -x + e^{-t}x^2$.

Solución:

Es una ecuación de Bernoulli con $n = 2$, con lo cual se reduce a una ecuación lineal con el cambio $x = 1/y$,

$$y' = y - e^{-t},$$

que tiene solución de la parte homogénea $y_h(t) = ke^t$.

Como solución particular de la ecuación inhomogénea probamos $y_p(t) = Ae^{-t}$,

$$-A = A - 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{ke^t + e^{-t}/2}. \ \square$$

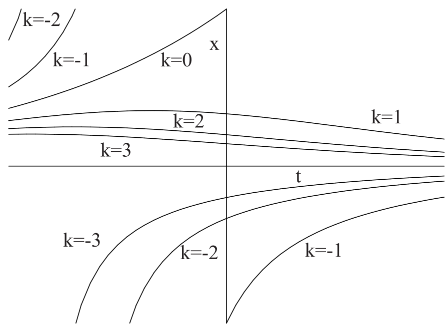

Figura 1.14: Soluciones de la ecuación $x' = -x + e^{-t}x^2$

La solución $x(t) = 0$ es una integral singular, correspondiente al límite de k infinita.

Las soluciones con k positiva son regulares, ya que el denominador no se anula. En cambio, las soluciones con k negativa tienen un polo.

Problema 1.15 *Resolver la ecuación* $3tx' - 2x = t^3/x^2$.

Solución:

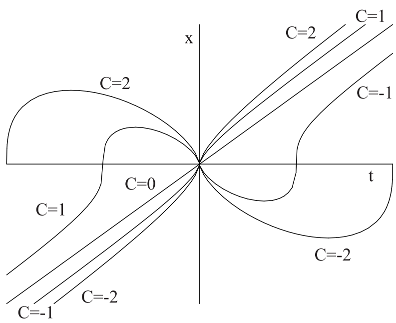

Figura 1.15: Soluciones de la ecuación $3tx' - 2x = t^3/x^2$

Se trata de una ecuación de Bernoulli con $n = -2$. Por tanto, hacemos el cambio $y = x^3$, que la convierte en una ecuación lineal,

$$y' = 3x^2x' = \frac{2y}{t} + t^2,$$

cuya parte homogénea tiene solución,

$$y_h(t) = ke^{\int 2\,dt/t} = ke^{2\ln|t|} = Ct^2,\ C = \pm k.$$

Podemos obtener una solución particular de la ecuación inhomogénea por el método de variación de constantes, $y_p(t) = C(t)t^2$,

$$C'(t)t^2 = t^2 \Rightarrow C(t) = t \Rightarrow y(t) = Ct^2 + t^3,$$

y deshaciendo el cambio de variable, llegamos a la solución general de la ecuación,

$$x(t) = \sqrt[3]{y(t)} = \sqrt[3]{Ct^2 + t^3}. \ \square$$

Hay una solución lineal, $x(t) = t$, que corresponde al valor $C = 0$.

El teorema de existencia y unicidad de soluciones se puede aplicar salvo en los puntos con $x = 0$. Observamos que la pendiente de las gráficas de las soluciones es infinita sobre el eje T, salvo en el origen, por donde pasan infinitas soluciones. Tampoco se puede aplicar en los puntos con $t = 0$. Observamos que no hay soluciones que pasen por $(0, x)$ con $x \neq 0$. Hay infinitas soluciones que pasan por el origen, en cambio.

Para grandes valores de $|t|$ las soluciones se comportan como $x(t) = t$.

Problema 1.16 *Resolver la ecuación $x' = t\sqrt{x} + 4x/t$. ¿Para qué valores t_0, x_0 tiene solución única el problema de valores iniciales $x(t_0) = x_0$? Hallar la solución del problema de valores iniciales correspondiente a $x(1) = 0$.*

Solución:

Es una ecuación de Bernoulli con $n = 1/2$. Por tanto, con el cambio de variable $y = \sqrt{x}$, se reduce a una ecuación lineal,

$$y' = \frac{t}{2} + \frac{2y}{t}.$$

La solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(t) = ke^{\int 2\,dt/t} = ke^{2\ln|t|} = kt^2.$$

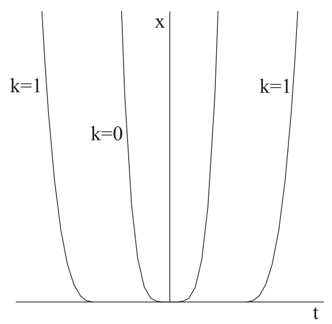

Figura 1.16: Soluciones de la ecuación $x' = t\sqrt{x} + 4x/t$

Buscamos una solución particular por el método de Lagrange, $y_p(t) = k(t)t^2$,

$$k't^2 + 2kt = y_p' = \frac{t}{2} + \frac{2y_p}{t} = \frac{t}{2} + 2kt \Rightarrow k'(t) = \frac{1}{2t} \Rightarrow k(t) = \frac{\ln|t|}{2} = \ln\sqrt{|t|},$$

y ya tenemos la solución general de la ecuación,

$$x(t) = y^2(t) = (y_h(t) + y_p(t))^2 = \left(k + \ln\sqrt{|t|}\right)^2 t^4. \ \square$$

Las soluciones no están definidas en $t = 0$ debido al logaritmo. Las soluciones, teniendo en cuenta que $y = \sqrt{x}$ tiene que ser positivo, están definidas siempre que $k + \ln\sqrt{|t|}$ sea positivo. Es decir, para $|t| > e^{-2k}$. Resumiendo las soluciones están definidas en los intervalos $(-\infty, -e^{-2k})$, (e^{-2k}, ∞).

El problema de valores iniciales tiene sentido en los puntos del plano TX para los que la función $\tilde{f}(t,x) = t\sqrt{x} + 4x/t$ es continua y derivable respecto a la variable dependiente x, es decir, salvo en los ejes $t = 0$, $x = 0$. Por tanto, el problema de valores iniciales $x(t_0) = x_0$ tiene solución única si $x_0 \neq 0$, $t_0 \neq 0$. $\Box$

En los puntos del eje $x = 0$ lo único que sucede es que son los puntos donde nace o muere la solución, $(\pm e^{-2k}, 0)$. En los puntos con $t = 0$ no hay solución. Realmente, esta recta es solución de la ecuación equivalente para $t(x)$,

$$\dot{t}(x) = \frac{t}{t^2\sqrt{x} + 4x},$$

pero no es solución de nuestra ecuación, obviamente. Sólo la solución con $k = 0$, $x(t) = t^4 \ln^2 \sqrt{|t|}$ pasa por el origen.

Resolvemos el problema de valores iniciales para $x(1) = 0$,

$$0 = x(1) = k^2 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x(t) = t^4 \ln^2 \sqrt{|t|}. \ \Box$$

Pero también la recta horizontal $x(t) = 0$ es solución de la ecuación, como se comprueba fácilmente. Y además verifica también la condición inicial $x(1) = 0$. Por tanto, vemos que existen al menos dos soluciones de este problema de valores iniciales. Lo cual es consistente con lo que afirma el teorema de existencia y unicidad, que la solución es única si $x_0 \neq 0$ y $t_0 \neq 0$. $\Box$

Problema 1.17 *Resolver la ecuación* $(1 + t^3)x' + 2tx^2 + t^2x + 1 = 0$.

Solución:

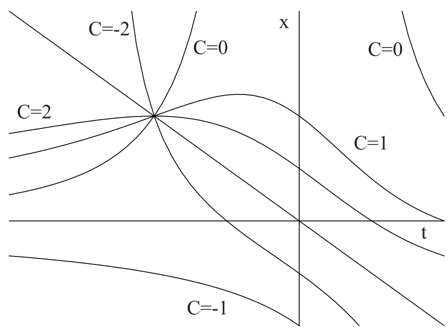

Figura 1.17: Soluciones de la ecuación $(1 + t^3)x' + 2tx^2 + t^2x + 1 = 0$

Es una ecuación de Ricatti, que podremos reducir a una ecuación lineal si obtenemos una solución particular sencilla. Buscamos solución de la forma $x_p(t) = At$,

$$t^3(2A + 2A^2) + (A + 1) = 0 \Rightarrow A + A^2 = 0, \ A + 1 = 0 \Rightarrow A = -1,$$

y obtenemos la solución $x_p(t) = -t$, que nos permite el cambio $x = y - t$,

$$(1 + t^3)y' + 2ty^2 - 3t^2y = 0,$$

que es una ecuación de Bernoulli con $n = 2$, que se reduce a una lineal con el cambio $y = 1/z$,

$$(1 + t^3)z' = 2t - 3t^2z,$$

cuya parte homogénea se resuelve fácilmente,

$$z' = -\frac{3t^2}{1 + t^3}z \Rightarrow z(t) = k \exp \int -\frac{3t^2\,dt}{1 + t^3} = ke^{-\ln|1+t^3|} = \frac{C}{1 + t^3},$$

tomando $C = \pm k$.

Para la ecuación inhomogénea, probamos la variación de constantes, $z_p(t) = \frac{C(t)}{1+t^3}$,

$$C' = 2t \Rightarrow C(t) = t^2 \Rightarrow z(t) = \frac{t^2}{1 + t^3} + \frac{C}{1 + t^3}.$$

Por tanto, deshaciendo los cambios,

$$x(t) = y(t) - t = \frac{1}{z(t)} - t = \frac{1 + t^3}{t^2 + C} - t = \frac{1 - Ct}{t^2 + C}. \square$$

Obsérvese que la solución $x(t) = -t$ es una integral singular, ya que no aparece en la expresión anterior más que como caso límite cuando C tiende a infinito. Para grandes valores de $|t|$, todas las soluciones tienden a $x = 0$. Las soluciones con C negativo son singulares, ya que el denominador se anula en los valores $\pm\sqrt{C}$.

El teorema de existencia y unicidad no se puede aplicar para $t = -1$, ya que x' no está bien definida en esos puntos. De hecho, observamos que todas las soluciones pasan por $(-1, 1)$, excepto la solución con $C = -1$, $x(t) = 1/(t - 1)$, que pasa por $(-1, -1/2)$.

Problema 1.18 *Resolver la ecuación $x' = x^2 + (1 - 2t)x + t^2 - t + 1$.*

Solución:

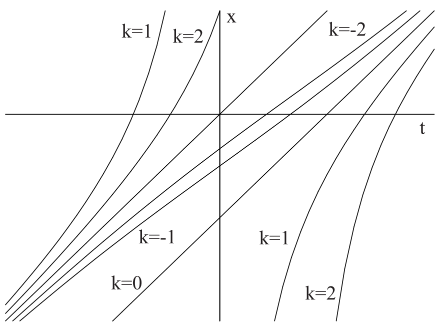

Figura 1.18: Soluciones de la ecuación $x' = x^2 + (1 - 2t)x + t^2 - t + 1$

Se trata de una ecuación de Ricatti. Habrá, por tanto, que encontrar un solución particular. Buscamos soluciones de la forma $x_p(t) = At$,

$$A = (A^2 - 2A + 1)t^2 + (A-1)t + 1 \Rightarrow A = 1 \Rightarrow x_p(t) = t.$$

Podemos, pues hacer el cambio de variable $x = y + t$,

$$y' = y^2 + y,$$

para obtener una ecuación de Bernoulli con $n = 2$, que se reduce a una lineal con el cambio $y = 1/z$,

$$z' = -z - 1 \Rightarrow z(t) = ke^{-t} - 1,$$

que nos proporciona, tras deshacer los cambios de variable, la solución general de la ecuación,

$$x(t) = \frac{1}{z(t)} + t = \frac{1}{ke^{-t} - 1} + t. \;\square$$

Más rápido hubiera sido darse cuenta de que $y' = y^2 + y$ es una ecuación separable,

$$\frac{dy}{y(y+1)} = dt \Rightarrow \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) dy = \int dt \Rightarrow \ln|y| - \ln|y+1| = t + k,$$

$$\frac{y}{y+1} = \pm e^k e^t = Ce^t \Rightarrow y(t) = \frac{Ce^t}{1 - Ce^t} \Rightarrow x(t) = \frac{Ce^t}{1 - Ce^t} + t$$

que es la misma solución general, expresada de distinta manera.

Aplicando el teorema de existencia y unicidad de soluciones, observamos que hay solución única por todos los puntos del plano TX.

La solución $x(t) = t$ es una integral singular, que se obtiene como caso límite de k infinita. Hay otra solución recta, la que corresponde a $k = 0$, $x(t) = t - 1$.

Obsérvese que las soluciones con k positiva son singulares, ya que se anula el denominador. En cambio, las que tienen k negativa están definidas para todo valor de t.

Para t muy grande, las soluciones tienden a la solución $x(t) = t - 1$. En cambio, para t muy pequeño las soluciones tienden a la solución $x(t) = t$.

Problema 1.19 *Hallar la solución general de la ecuación $t^2x' = x^2$ por tres métodos distintos. ¿Para qué valores $x_0 = x(t_0)$ el problema de valores iniciales tiene solución única? Hallar las soluciones de la ecuación que verifican, respectivamente, $x(0) = 0$, $x(0) = 1$, $x(1) = 0$, $x(1) = 1$. Buscar soluciones de la forma $x(t) = A$. Buscar soluciones de la forma $x(t) = Bt$. ¿Alguna de ellas es una integral singular?*

Solución:

La ecuación es separable,

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int \frac{dt}{t^2} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{t} + k \Rightarrow x(t) = \frac{t}{1 + kt}. \;\square$$

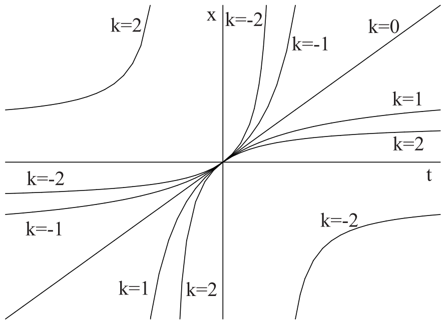

Figura 1.19: Soluciones de la ecuación $t^2x' = x^2$

Otro método distinto sería resolver la ecuación como ecuación de Bernoulli con $n = 2$, mediante el cambio $y = 1/x$,

$$x' = \frac{x^2}{t^2} \Rightarrow y' = -\frac{1}{t^2} \Rightarrow y(t) = k + \frac{1}{t} = \frac{kt+1}{t} \Rightarrow x(t) = \frac{t}{1+kt}. \ \square$$

Además, la ecuación es homogénea, $x' = x^2/t^2$, y se resuelve también mediante el cambio $y = x/t$, $x' = y + ty' = f(y)$, que también conduce a una ecuación separable, por lo que es un método redundante, ya que la ecuación inicial ya es separable, y más complicado en este caso,

$$\frac{1}{t} = \frac{y'}{f(y) - y} = \frac{y'}{y^2 - y} \Rightarrow \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \right) dy = \int \frac{dt}{t} \Rightarrow \ln \left| \frac{y-1}{y} \right| = \ln |t| + C\,,$$

y tomando $k = \mp e^C$, obtenemos

$$\frac{y-1}{y} = -kt \Rightarrow y(t) = \frac{1}{1+kt} \Rightarrow x(t) = ty(t) = \frac{t}{1+kt}. \ \square$$

Estas soluciones son singulares en $t = -1/k$, luego están definidas, bien en $(-\infty, -1/k)$ o en $(-1/k, \infty)$. Para grandes valores de $|t|$ las soluciones tienden al valor $1/k$.

El teorema de existencia y unicidad aplicado a esta ecuación, con $f(t, x) = x^2/t^2$, función racional de clase C^∞ salvo en $t = 0$, nos dice que el problema de valores iniciales con $x(t_0) = x_0$ tiene solución única siempre que $t_0 \neq 0$. $\square$

En $t = 0$ lo que sucede es que todas las soluciones, $x(0) = 0$, pasan por $x = 0$, es decir, hay infinitas soluciones que pasan por el origen.

Por tanto, el problema con $x(0) = 0$ tiene infinitas soluciones. En cambio, el problema con $x(0) = 1$ no tiene solución. $\square$

El problema con $x(1) = 0$ tiene solución única,

$$0 = x(1) = \frac{1}{1+k} \Rightarrow k \to \infty,$$

sólo que no está contenida en la solución general, $x(t) = 0$, por lo que es una integral singular de la ecuación. $\square$

Finalmente, el problema con $x(1) = 1$ tiene solución única,

$$1 = x(1) = \frac{1}{1+k} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x(t) = t. \ \square$$

Buscamos soluciones constantes, $x(t) = A$,

$$0 = x' = \frac{A^2}{t^2} \Rightarrow A = 0 \Rightarrow x(t) = 0,$$

solución que ya habíamos obtenido. □

Buscamos soluciones lineales, $x(t) = Bt$,

$$B = x' = \frac{B^2t^2}{t^2} \Rightarrow B = 0, 1,$$

con lo cual reobtenemos las soluciones $x(t) = 0$, $x(t) = t$. □

Problema 1.20 *Hallar la solución general de la ecuación $x^2x' = t^2$ por tres métodos distintos. ¿Para qué valores $x_0 = x(t_0)$ el problema de valores iniciales tiene solución única? Hallar las soluciones de la ecuación que verifican $x(0) = 0$, $x(1) = 0$, $x(0) = 1$. Buscar soluciones de la forma $x(t) = A$. Buscar soluciones de la forma $x(t) = Bt$. ¿Alguna de ellas es una integral singular?*

Solución:

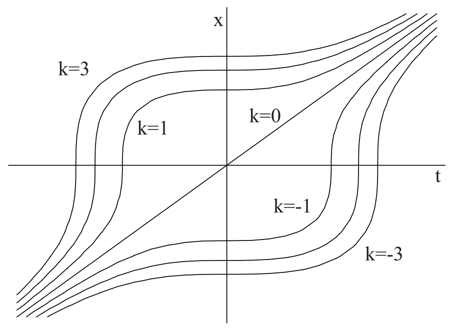

Figura 1.20: Soluciones de la ecuación $x^2x' = t^2$

La ecuación es separable,

$$\int x^2\,dx = \int t^2\,dt \Rightarrow x^3 = t^3 + k \Rightarrow x(t) = \sqrt[3]{t^3 + k}. \ \square$$

La ecuación es también exacta con $f(t, x) = x^2$, $g(t, x) = -t^2$, ya que

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} = 0,$$

y, por tanto, tiene solución general $F(t, x) = C$,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F(t, x)}{\partial x} = f(t, x) = x^2 \\[2ex] \dfrac{\partial F(t, x)}{\partial t} = g(t, x) = -t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} F(t, x) = x^3/3 + h(t) \\ h'(t) = -t^2 \Rightarrow h(t) = -t^3/3 \end{array}\right\},$$

con lo cual las soluciones de la ecuación tienen la forma implícita $F(t,x) = C = k/3$,

$$x^3 - t^3 = k \Rightarrow x(t) = \sqrt[3]{t^3 + k}. \ \Box$$

Finalmente, un tercer método sería resolver la ecuación como ecuación de Bernoulli con $n = -2$, mediante el cambio $y = x^3$,

$$x' = \frac{t^2}{x^2} \Rightarrow y' = 3t^2 \Rightarrow y(t) = k + t^3 \Rightarrow x(t) = \sqrt[3]{y(t)} = \sqrt[3]{t^3 + k}. \ \Box$$

Además, la ecuación es homogénea, $x' = t^2/x^2$, y se resuelve también mediante el cambio $y = x/t$, $x' = y + ty'$, que también conduce a una ecuación separable, por lo que es un método redundante, y más complicado en este caso, ya que la ecuación de partida es ya separable,

$$\frac{1}{t} = \frac{y'}{f(y) - y} = \frac{y'}{y^{-2} - y} \Rightarrow \int \frac{y^2}{1 - y^3}\, dy = \int \frac{dt}{t} \Rightarrow \ln|y^3 - 1| = -3\ln|t| + C.$$

Tomando $k = \pm e^C$ y despejando y reobtenemos la solución general de la ecuación,

$$y^3 - 1 = kt^{-3} \Rightarrow y(t) = \sqrt[3]{1 + kt^{-3}} \Rightarrow x(t) = ty(t) = \sqrt[3]{t^3 + k}. \ \Box$$

Estas soluciones son singulares en $t = -\sqrt[3]{k}$, ya que no son derivables donde se anula la raíz, luego están definidas, bien en $(-\infty, -\sqrt[3]{k})$ o en $(-\sqrt[3]{k}, \infty)$. Para grandes valores de $|t|$ las soluciones tienden al valor t.

El teorema de existencia y unicidad aplicado a esta ecuación, con $f(t,x) = t^2/x^2$, función racional de clase C^∞ salvo en $x = 0$, nos dice que el problema de valores iniciales con $x(t_0) = x_0$ tiene solución única siempre que $x_0 \neq 0$. $\Box$

En $x = 0$ lo que sucede es que las soluciones, o bien tienen pendiente infinita o pasan por el origen.

Sorprendentemente, el problema con $x(0) = 0$ tiene solución única,

$$0 = x(0) = \sqrt[3]{k} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x(t) = t,$$

a pesar de que el teorema de existencia y unicidad no se puede aplicar a este dato. $\Box$

El problema con $x(1) = 0$ parece tener solución única,

$$0 = x(1) = \sqrt[3]{k + 1} \Rightarrow k = -1 \Rightarrow x(t) = \sqrt[3]{t^3 - 1},$$

sólo que no es regular en $t = 1$, ya que x' tiende a infinito . $\Box$

Finalmente, el problema con $x(0) = 1$ tiene solución única,

$$1 = x(0) = \sqrt[3]{k} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x(t) = \sqrt[3]{t^3 + 1}. \ \Box$$

Buscamos soluciones constantes, $x(t) = A$,

$$0 = x^2 x' = t^2,$$

con lo cual no hay soluciones constantes. $\Box$

Buscamos soluciones lineales, $x(t) = Bt$,

$$B^3 t^2 = x^2 x' = t^2 \Rightarrow B^3 = 1 \Rightarrow B = 1,$$

con lo cual reobtenemos la solución $x(t) = t$. $\Box$

No hay integrales singulares, ya que todas las soluciones están comprendidas en la solución general.

Problema 1.21 *Resolver por tres métodos al menos la ecuación* $2txx' + x^2 + t^2 = 0$*. ¿Para qué valores* t_0*,* x_0 *tiene solución única el problema de valores iniciales* $x(t_0) = x_0$*? Buscar soluciones lineales* $x(t) = At$*. Hallar la solución del problema de valores iniciales correspondiente a* $x(1) = 1$*.*

Solución:

La ecuación es exacta, $fx' + g = 0$, $f(t,x) = 2tx$, $g(t,x) = x^2 + t^2$, ya que

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = 2x - 2x = 0,$$

con lo cual la solución general de la ecuación es $F(t,x) = k$, donde la función F viene dada por la cuadratura

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} &= f(t,x) = 2tx \\ \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} &= g(t,x) = x^2 + t^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} F(t,x) = tx^2 + h(t) \\ h'(t) = t^2 \Rightarrow h(t) = t^3/3 \end{aligned}\right\},$$

y la solución general de la ecuación, en forma implícita, es

$$F(t,x) = tx^2 + \frac{t^3}{3} = k \Rightarrow x(t) = \pm\sqrt{\frac{k}{t} - \frac{t^2}{3}}. \ \square$$

El radicando se anula en $t_c = \sqrt[3]{3k}$. Por tanto, las soluciones están definidas en el intervalo $(0, t_c)$ si k es positivo y $(t_c, 0)$ si k es negativo.

La recta $t = 0$ obviamente no es solución de la ecuación, pero si lo es trivialmente de la ecuación equivalente para $t(x)$,

$$(x^2 + t^2)\dot{t} + 2tx = 0.$$

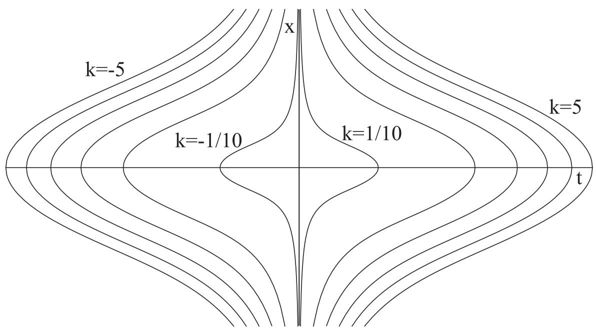

Figura 1.21: Soluciones de la ecuación $2txx' + x^2 + t^2 = 0$

La ecuación es también homogénea,

$$x' = -\frac{x}{2t} - \frac{t}{2x} = m(y) = -\frac{y}{2} - \frac{1}{2y},$$

se convierte en separable con el cambio de variable $y = x/t$,

$$-\frac{2yy'}{3y^2+1} = \frac{y'}{m(y)-y} = \frac{1}{t} \Rightarrow \ln|3y^2+1| = -3\ln|t| + C \Rightarrow 3y^2+1 = \frac{3k}{t^3},$$

denotando $3k = \pm e^C$.

Deshaciendo el cambio, $y = x/t$, recuperamos la solución general obtenida anteriormente, $x^2 = k/t - t^2/3$. □

Pero la ecuación $x' = -x/2t - t/2x$, es también una ecuación de Bernoulli con $n = -1$. Con el cambio $y = x^2$, la ecuación se convierte en una lineal,

$$y' = -\frac{y}{t} - t.$$

Resolvemos la ecuación homogénea, con $a(t) = -1/t$,

$$y_h(t) = Ce^{\int a(t)\,dt} = Ce^{-\ln|t|} = \frac{k}{t},$$

denotando $k = \pm C$. Y buscamos una solución particular por el método de Lagrange, $y_p(t) = k(t)/t$,

$$\frac{k'}{t} - \frac{k}{t^2} = y_p' = -\frac{y_p}{t} - t = -\frac{k}{t^2} - t \Rightarrow k' = -t^2 \Rightarrow k(t) = -\frac{t^3}{3} \Rightarrow y_p(t) = -\frac{t^2}{3},$$

con lo cual la solución general de esta ecuación lineal es

$$x^2(t) = y(t) = \frac{k}{t} - \frac{t^2}{3},$$

deshaciendo el cambio, $y = x^2$. □

El problema de valores iniciales tiene sentido en los puntos del plano TX para los que la función $\tilde{f}(t,x) = -x/2t - t/2x$ es continua y derivable respecto a la variable dependiente x, es decir, salvo en los ejes $x = 0$, $t = 0$. Por tanto, el problema de valores iniciales $x(t_0) = x_0$ tiene solución única si $x_0 \neq 0$, $t_0 \neq 0$. □

Obsérvese que en $t = 0$ simplemente no hay soluciones. En cambio, en cada punto del eje $x = 0$ lo que sucede es que la pendiente es infinita y hay dos soluciones, correspondientes a los dos signos de la raíz de la solución general.

Buscamos soluciones lineales, $x(t) = At$,

$$3A^2t^2 + t^2 = 0 \Rightarrow A = \pm\frac{i}{\sqrt{3}},$$

y obtenemos que no hay soluciones reales lineales, aunque hay dos soluciones lineales complejas. □

Resolvemos el problema de valores iniciales para $x(1) = 1$,

$$k = F(1,1) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow x(t) = \sqrt{\frac{4}{3t} - \frac{t^2}{3}}.\ \square$$

Problema 1.22 *Resolver por dos métodos al menos la ecuación* $(x+2t)x' + 2x + 4t + 2 = 0$. *¿Para qué valores* t_0, x_0 *tiene solución única el problema de valores iniciales* $x(t_0) = x_0$*? Hallar la solución del problema de valores iniciales correspondiente a* $x(0) = 1$.

Solución:

La ecuación es exacta, $fx' + g = 0$, $f(t, x) = x + 2t$, $g(t, x) = 2x + 4t + 2$, ya que

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = 2 - 2 = 0,$$

con lo cual la solución general de la ecuación es $F(t, x) = k$, donde la función F viene dada por la cuadratura

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F(t,x)}{\partial x} = f(t,x) = x + 2t \\ \\ \dfrac{\partial F(t,x)}{\partial t} = g(t,x) = 2x + 4t + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} F(t,x) = \dfrac{x^2}{2} + 2tx + h(t) \\ h'(t) = 4t + 2 \Rightarrow h(t) = 2t^2 + 2t \end{array}\right\},$$

y la solución general de la ecuación, en forma implícita, es

$$F(t,x) = \frac{x^2}{2} + 2tx + 2t^2 + 2t = k \Rightarrow x(t) = -2t \pm \sqrt{2k - 4t}. \ \Box$$

Obviamente la expresión anterior tiene sentido si el radicando es positivo, por tanto, las soluciones están definidas en el intervalo $(-\infty, k/2)$.

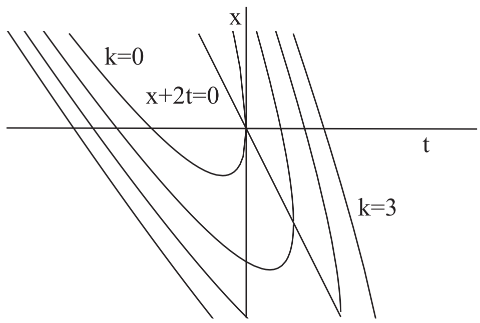

Figura 1.22: Soluciones de la ecuación $(x + 2t)x' + 2x + 4t + 2 = 0$

La ecuación depende exclusivamente de $y = x + 2t$, ya que $x' = m(y) = -2 - 2/y$. Por tanto, mediante este cambio de variable dependiente, obtenemos una ecuación separable,

$$1 = \frac{y'}{2 + m(y)} = -\frac{yy'}{2} \Rightarrow y^2 = C - 4t \Rightarrow x(t) = y(t) - 2t = -2t \pm \sqrt{C - 4t},$$

solución general obtenida anteriormente, sin más que identificar $C = 2k$. $\Box$

El problema de valores iniciales tiene sentido en los puntos del plano TX para los que la función $\tilde{f}(t, x) = -(2x + 4t + 2)/(x + 2t)$ es continua y derivable respecto a la variable dependiente x, es decir, salvo en la recta de ecuación $x + 2t = 0$. Por tanto, el problema de valores iniciales $x(t_0) = x_0$ tiene solución única si $x_0 + 2t_0 \neq 0$. $\Box$

Lo que sucede en los puntos de la recta de ecuación $x + 2t = 0$ es que las gráficas de las soluciones alcanzan pendiente infinita. Son los puntos donde se unen dos soluciones, las correspondientes a las dos raíces de la solución general, que mueren en dichos puntos.

Resolvemos el problema de valores iniciales para $x(0) = 1$,

$$k = F(0, 1) = \frac{1}{2} \Rightarrow x(t) = -2t + \sqrt{1 - 4t}. \ \Box$$

Problema 1.23 *Resolver la ecuación* $tx' + x + 2t = 0$ *por tres métodos distintos.*

Solución:

La ecuación es lineal, $x' = -x/t - 2$, con $a(t) = -1/t$, $f(t) = -2$. Resolvemos primero la ecuación homogénea,

$$x' = -\frac{x}{t} \Rightarrow x_h(t) = Ce^{\int a\,dt} = Ce^{-\ln|t|} = \frac{C}{|t|} = \frac{k}{t},$$

tomando $k = \pm C$.

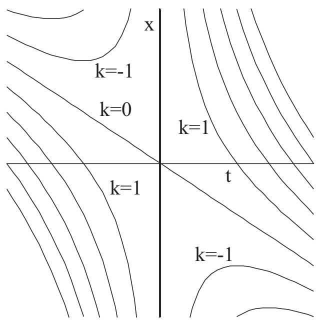

Figura 1.23: Soluciones de la ecuación $tx' + x + 2t = 0$

Para la ecuación inhomogénea, buscamos una solución de la forma $x(t) = K(t)/t$,

$$\frac{K'}{t} - \frac{K}{t^2} = x' = -\frac{x}{t} - 2 = -\frac{K}{t^2} - 2 \Rightarrow K' = -2t \Rightarrow K(t) = k - t^2,$$

con lo cual la solución general de la ecuación lineal es

$$x(t) = \frac{k}{t} - t. \ \Box$$

También es una ecuación homogénea, con lo cual el cambio $y(t) = x(t)/t$, $x'(t) = ty'(t) + y(t)$ la convierte en separable,

$$\frac{dy}{-2y - 2} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \ln|y + 1| = -2\ln|t| + C \Rightarrow y(t) = -1 + \frac{k}{t^2} \Rightarrow x(t) = -t + \frac{k}{t},$$

tomando $k = \pm e^C$. $\Box$

Por último, es una ecuación exacta, $f(t, x) = t$, $g(t, x) = x + 2t$,

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial x} = 1 = \frac{\partial f(t, x)}{\partial t},$$

con lo cual la solución de la ecuación en forma implícita es de la forma $F(t,x) = k$, donde F satisface la cuadratura

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F(t,x)}{\partial x} = t \\ \\ \dfrac{\partial F(t,x)}{\partial t} = x + 2t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} F(t,x) = tx + h(t) \\ h'(t) = 2t \Rightarrow h(t) = t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow F(t,x) = tx + t^2 = k. \ \square$$

El teorema de existencia y unicidad se puede aplicar en todos los puntos del plano TX, excepto para $t = 0$. Observamos que sólo hay una solución, la recta, $x(t) = -t$, que pase por el origen. En cambio, no hay soluciones que pasen por $(0,x)$, con $x \neq 0$, ya que la pendiente se hace infinita. Las soluciones, salvo la recta, están definidas, o bien para $t \in (-\infty, 0)$, o bien para $t \in (0, \infty)$. Todas las soluciones tienden a la recta para grandes valores de $|t|$.

Problema 1.24 *Resolver la ecuación $tx'/x^2 - 1/x - 1 = 0$. Buscar soluciones constantes de la ecuación. ¿Hay alguna integral singular?, ¿para qué valores tiene solución única el problema de valores iniciales $x(t_0) = x_0$ para esta ecuación? Resolver el problema de valores iniciales para $x(0) = 0$, $x(0) = 1$, $x(0) = -1$, $x(1) = 0$, $x(1) = 1$.*

Solución:

La ecuación es exacta, con $f(t,x) = t/x^2$, $g(t,x) = -1 - 1/x$, ya que

$$\frac{1}{x^2} = \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial g(t,x)}{\partial x} = \frac{1}{x^2},$$

con lo cual la solución general de la ecuación es de la forma $F(t,x) = k$, donde F es solución de la cuadratura

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F(t,x)}{\partial t} = g(t,x) = -1 - \dfrac{1}{x} \\ \\ \dfrac{\partial F(t,x)}{\partial x} = f(t,x) = \dfrac{t}{x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} F(t,x) = -t - \dfrac{t}{x} + h(x) \\ \\ h'(x) = 0 \Rightarrow h(x) = \text{const.} \end{array}\right\},$$

con lo cual la solución general de la ecuación es

$$F(t,x) = -t - \frac{t}{x} = k \Rightarrow x(t) = -\frac{t}{k+t}. \ \square$$

Despejando la pendiente, la ecuación toma la forma

$$x' = \frac{x}{t} + \frac{x^2}{t},$$

que es separable,

$$\ln|t| = \int \frac{dt}{t} = \int \frac{dx}{x + x^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \ln|x| - \ln|x+1| + k,$$

cuya solución general, una vez simplificada es

$$\frac{Cx}{x+1} = t \Rightarrow x(t) = -\frac{t}{t - C},$$

denotando $C = \pm e^k$. $\square$

Obviamente, esta solución general es la misma que hemos obtenido anteriormente, si identificamos las constantes, salvo un signo.

Finalmente también es una ecuación de Bernoulli con $n = 2$ y coeficientes $a(t) = 1/t$, $b(t) = 1/t$, así que se resuelve con un cambio de variable $y = 1/x$, que la convierte en una ecuación lineal,

$$y' = -\frac{y}{t} - \frac{1}{t},$$

que se integra inmediatamente. La parte homogénea, identificando $C = \pm k$,

$$y_h(t) = ke^{-\int dt/t} = k\,e^{-\ln|t|} = \frac{k}{|t|} = \frac{C}{t},$$

y la inhomogénea, que resolvemos por variación de constantes, $y_p(t) = C(t)/t$,

$$\frac{C'}{t} - \frac{C}{t^2} = -\frac{C}{t^2} - \frac{1}{t} \Rightarrow C'(t) = -1 \Rightarrow C(t) = -t,$$

con lo cual la solución general de la ecuación es

$$\frac{1}{x(t)} = y(t) = \frac{C}{t} - 1 \Rightarrow x(t) = -\frac{t}{t - C}. \ \square$$

O más rápido, como ecuación separable,

$$\int \frac{dy}{y+1} = -\int \frac{dt}{t} \Rightarrow \ln|y+1| = k - \ln|t| \Rightarrow y = -1 + \frac{C}{t}.$$

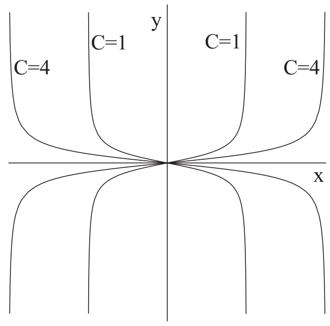

Figura 1.24: Soluciones de la ecuación $tx' - x - x^3 = 0$

La solución límite $x(t) = 0$ no está contenida en la solución general más que como caso límite de C tendiendo a infinito.

Las únicas soluciones constantes, $x(t) = A$,

$$0 = x' = \frac{1}{t}(x + x^2) = \frac{A + A^2}{t} \Rightarrow A(A+1) = 0,$$

son las correspondientes a $A = 0$, $A = -1$. $x(t) = -1$ es la solución correspondiente a $k = 0$. En cambio, $x(t) = 0$ es una integral singular, ya que no está contenida en la solución general, salvo como caso límite de k tendiendo a infinito.

El teorema de existencia y unicidad es aplicable al dato inicial $x(t_0) = x_0$, excepto para $t_0 = 0$. Esto es razonable, ya que todas las soluciones, excepto $x(t) = -1$, pasan por el punto $(0,0)$ y serían soluciones del problema $x(0) = 0$.

En cambio, el problema $x(0) = -1$ tiene solución única $x(t) = -1$, a pesar de no caer dentro de las condiciones de validez del teorema.

El resto de problemas tienen solución única, ya que el dato inicial no está dado en $t_0 = 0$. El problema de valores iniciales $x(1) = 0$, tiene solución única $x(t) = 0$, la integral singular hallada previamente.

Buscamos la solución del problema $x(1) = 1$,

$$1 = x(1) = -\frac{1}{k+1} \Rightarrow k = -2 \Rightarrow x(t) = \frac{t}{2-t}. \ \square$$

Problema 1.25 *Resolver la ecuación* $2e^{-t}xx' - e^{-t}x^2 - 4t^3 = 0$ *por dos métodos. ¿Para qué valores* t_0*,* x_0 *tiene solución única el problema de valores iniciales* $x(t_0) = x_0$*? Resolver los problemas de valores iniciales* $x(0) = 1$*,* $x(0) = 0$*.*

Solución:

La ecuación es exacta, $fx' + g = 0$, con $f(t,x) = 2e^{-t}x$, $g(t,x) = -4t^3 - e^{-t}x^2$, ya que

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial x} = -2e^{-t}x = \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación es de la forma $F(t,x) = k$, donde F verifica

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F(t,x)}{\partial x} = 2e^{-t}x \\[2ex] \dfrac{\partial F(t,x)}{\partial t} = -4t^3 - x^2e^{-t} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} F(t,x) = e^{-t}x^2 + h(t) \\[2ex] h'(t) = -4t^3 \Rightarrow h(t) = -t^4 \end{array}\right\},$$

$$F(t,x) = e^{-t}x^2 - t^4 = k,$$

de donde podemos despejar la incógnita,

$$x(t) = \pm e^{t/2}\sqrt{k + t^4}. \ \square$$

La ecuación,

$$x' = \frac{x}{2} + \frac{2t^3e^t}{x},$$

es también de Bernoulli con $n = -1$, luego se puede resolver con el cambio de variable $y = x^2$, que conduce a una ecuación lineal,

$$y' = y + 4t^3e^t.$$

La solución de la ecuación homogénea es trivial $y_h(t) = ke^t$. Una solución de la ecuación inhomogénea la obtenemos por variación de constantes, $y_p(t) = k(t)e^t$,

$$k'e^t + ke^t = ke^t + 4t^3e^t \Rightarrow k' = 4t^3 \Rightarrow k(t) = t^4 \Rightarrow y_p(t) = t^4e^t.$$

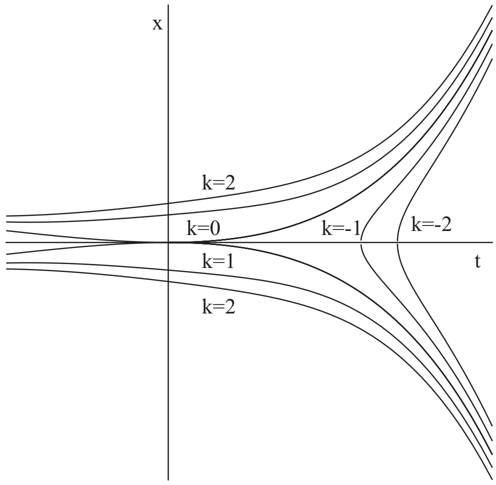

Figura 1.25: Soluciones de la ecuación $2e^{-t}xx' - e^{-t}x^2 - 4t^3 = 0$

Por tanto, a partir de la solución general de la ecuación lineal,

$$y(t) = (k + t^4)e^t \Rightarrow x(t) = \pm e^{t/2}\sqrt{k + t^4},$$

obtenemos la ecuación general de la ecuación de Bernoulli. □

El problema de valores iniciales tiene sentido en los puntos del plano TX para los que la función

$$\frac{x}{2} + \frac{2t^3e^t}{x}$$

es continua y derivable respecto a la variable dependiente x, es decir, salvo en el eje $x = 0$. Por tanto, el problema de valores iniciales $x(t_0) = x_0$ tiene solución única si $x_0 \neq 0$. □

El problema $x(1) = 0$ tiene solución única,

$$1 = x(0) = \pm\sqrt{k} \Rightarrow k = 1, \quad x(t) = \sqrt{1 + t^4}e^{t/2}. \ \square$$

El problema $x(0) = 0$ tiene dos soluciones, en cambio,

$$0 = x(0) = \pm\sqrt{k} \Rightarrow k = 0, \quad x(t) = \pm t^2e^{t/2}. \ \square$$

Problema 1.26 *Sabiendo que $x_1(t) = t^2 + t$ y $x_2(t) = t^2 + 2t$ son soluciones de una ecuación lineal $x' = a(t)x + f(t)$, obtener la solución general de la ecuación. Obtener $a(t)$, $f(t)$.*

Solución:

$x_h(t) = x_2(t) - x_1(t) = t$ es una solución particular de la ecuación homogénea $x' = a(t)x$. Por tanto, la solución general de la ecuación es

$$x(t) = kt + t^2. \ \square$$

Las funciones las podemos despejar de las soluciones particulares,

$$a(t) = \frac{x_h'(t)}{x_h(t)} = \frac{1}{t}, \quad f(t) = x_1'(t) - a(t)x_1(t) = t.$$

Por tanto, la ecuación buscada es

$$x' = \frac{x}{t} + t. \ \square$$

Problema 1.27 *Resolver la ecuación* $(t + x^2 e^x)x' = x$ *para* $t(x)$ *en lugar de para* $x(t)$.

Solución:

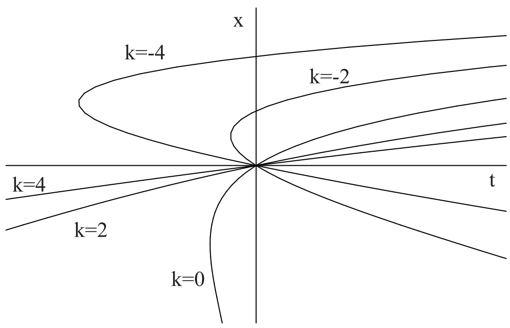

Figura 1.26: Soluciones de la ecuación $(t + x^2 e^x)x' = x$

Teniendo en cuenta que, por el teorema de la función inversa,

$$x' = \frac{dx}{dt} = \left(\frac{dt}{dx}\right)^{-1} = \frac{1}{\dot{t}},$$

la ecuación la podemos expresar como una ecuación lineal en $t(x)$,

$$\dot{t} = \frac{t}{x} + xe^x,$$

cuya solución general de la parte homogénea es

$$\frac{dt}{t} = \frac{dx}{x} \Rightarrow t_h(x) = kx,$$

y para la cual podemos encontrar una solución particular por el método de Lagrange, $t_p(x) = k(x)x$,

$$\dot{k}x = xe^x \Rightarrow \dot{k} = e^x \Rightarrow k(x) = e^x,$$

con lo cual la solución general de la ecuación es, en forma implícita para x,

$$t = kx + xe^x. \ \square$$

Considerada la ecuación inicial para x', observamos que la pendiente es infinita a lo largo de la curva $t + x^2 e^x = 0$, excepto en el origen, donde no está definida, punto por el que pasan infinitas soluciones de la ecuación.

Problema 1.28 *Hallar la ecuación diferencial que verifican las circunferencias de ecuación $x^2 + y^2 = R^2$. ¿Y la de las hipérbolas equiláteras $xy = k$?*

Solución:

Tomamos y como función de x y derivamos implícitamente la ecuación, de modo que desaparezca la constante R,

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow yy' + x = 0. \ \square$$

Comprobamos que sólo verifican esta ecuación las circunferencias, resolviendo la ecuación,

$$y\,dy = -x\,dx \Rightarrow y^2 = k - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = k.$$

Para las hipérbolas equiláteras procedemos de igual manera,

$$y + xy' = 0. \ \square$$

Comprobamos la solución,

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C \Rightarrow xy = k,$$

con $k = \pm e^C$.

Problema 1.29 *Demostrar que la ecuación lineal $x' = a(t)x + f(t)$ admite un factor integrante que sólo depende de t. Usar este hecho para obtener la solución general de la ecuación.*

Solución:

Tomando $f(t,x) = 1$, $g(t,x) = -a(t)x - f(t)$, observamos que

$$\frac{1}{f(t,x)}\left\{\frac{\partial g(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\right\} = -a(t),$$

pero depende sólo de t, con lo cual hay un factor integrante

$$\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{f}\left\{\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial t}\right\} = -a(t) \Rightarrow Q(t) = e^{-\int a(t)\,dt},$$

y la ecuación

$$Q(t)x' - Q(t)a(t)x - Q(t)f(t) = 0,$$

es exacta, con solución general $F(t,x) = k$,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F(t,x)}{\partial x} = Q(t) \\[2ex] \dfrac{\partial F(t,x)}{\partial t} = -Q(t)a(t)x - Q(t)f(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} F(t,x) = Q(t)x + h(t) \\[2ex] h'(t) = -Q(t)f(t) \end{array}\right\},$$

$$h(t) = -\int Q(t)f(t)\,dt \Rightarrow F(t,x) = Q(t)x - \int Q(t)f(t)\,dt,$$

con lo cual las soluciones de la ecuación tienen la forma implícita $F(t,x) = k$,

$$Q(t)x(t) - \int Q(t)f(t)\,dt = k \Rightarrow x(t) = ke^{\int a(t)\,dt} + e^{\int a(t)\,dt}\int e^{-\int a(t)\,dt} f(t)\,dt,$$

resultado coincidente con el ya conocido. □

Problema 1.30 *Sean $h_1(t)$, $h_2(t)$ dos soluciones de una ecuación de Ricatti, $x' = a(t)x^2 + b(t)x + f(t)$. Demostrar que $x = h_1(t) + 1/y$ es un cambio de variable que reduce la ecuación a una lineal. Demostrar que $1/(h_2(t) - h_1(t))$ es una solución de dicha ecuación lineal.*

Solución:

Realizamos el cambio de variable, teniendo en cuenta que $h_1(t)$ es solución,

$$h_1' = ah_1^2(t) + bh_1 + f,$$

$$h_1' - \frac{y'}{y^2} = a\left(h_1^2 + \frac{2h_1}{y} + \frac{1}{y^2}\right) + b\left(h_1 + \frac{1}{y}\right) + f \Rightarrow y' + (2ah_1 + b)y + a = 0,$$

que es una ecuación lineal. □

Si $h_2(t)$ es también solución de la ecuación de Ricatti, tendremos que

$$h_2(t) = h_1(t) + \frac{1}{u_1(t)},$$

siendo $u_1(t)$ una solución de la ecuación lineal por tanto,

$$u_1(t) = \frac{1}{h_2(t) - h_1(t)},$$

es una solución de dicha ecuación lineal. □

Problema 1.31 *Problema de la isócrona: Consideremos una partícula descendiendo por la gráfica de una función $z(x)$ de modo que la velocidad vertical de caída es constante. ¿Cuál es la función $z(x)$?*

Solución:

Una partícula moviéndose en el plano sometida a la fuerza gravitatoria tiene energía por unidad de masa,

$$E = \frac{1}{2}(x'^2 + z'^2) + gz = \frac{z'^2}{2}\left\{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2\right\} + gz,$$

teniendo en cuenta que, como se desliza a lo largo de una curva, la altura y la posición están ligadas por $z(x)$.

Como la partícula tiene que descender con velocidad constante, $z' = k$, el problema se reduce a una ecuación diferencial separable de primer orden,

$$dx = -\sqrt{\frac{2(E - gz)}{k^2} - 1}\,dz,$$

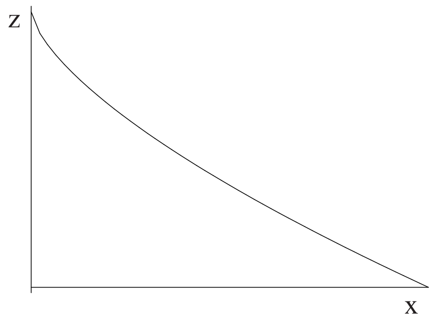

Figura 1.27: Isócrona

tomando la raíz negativa para que z decrezca con x.

La ecuación se integra inmediatamente,

$$x - x_0 = \frac{k^2}{3g}\left(\frac{2(E-gz)}{k^2} - 1\right)^{3/2}.$$

Si tomamos $E = gL + k^2/2$, de modo que toda la velocidad inicial horizontal es nula, suponiendo que la partícula desciende desde una altura L, obtenemos $x_0 = 0$ para que $x = 0$ se corresponda con $z = L$,

$$x = \frac{k^2}{3g}\left(\frac{2g(L-z)}{k^2}\right)^{3/2} \Rightarrow z(x) = L - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9k^2}{g}x^2}. \ \square$$

Problema 1.32 *Problema de la tractriz: ¿Cuál es la función $y(x)$ cuya tangente en cada punto de su gráfica tiene longitud constante a entre el punto de tangencia y el eje X?*

Solución:

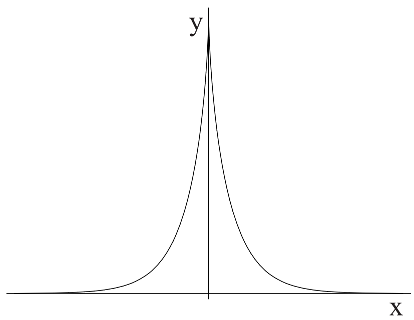

Figura 1.28: Tractriz

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y(x)$ en el punto (x, y) es

$$Y - y = y'(x)(X - x),$$

que se corta con el eje X en el punto $(x - y/y', 0)$. La distancia entre este punto y el (x, y) es, de acuerdo con el enunciado del problema,

$$a^2 = \frac{y^2}{y'^2} + y^2 \Rightarrow y' = \pm \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

lo cual conduce a una ecuación diferencial separable de primer orden,

$$\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}\, dy = \pm dx \Rightarrow \pm x - x_0 = \sqrt{a^2 - y^2} - a \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right). \;\square$$