Capítulo 2

Sistemas y ecuaciones de orden superior

Problema 2.1 *Hallar las exponenciales de las matrices* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

Todas ellas son nilpotentes, así que su exponencial se calcula de manera sencilla, recordando la definición de exponencial de una matriz,

$$e^{At} = \mathbb{I} + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots \ldots$$

En particular,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{At} = \mathbb{I} + At = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}. \ \square$$

Por idéntico motivo,

$$e^{Bt} = \mathbb{I} + Bt = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \ \square$$

Finalmente,

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e^{Ct} = \mathbb{I} + Ct + \frac{1}{2}C^2t^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t^2/2 & t & 1 \end{pmatrix}. \ \square$$

Problema 2.2 *Resolver la ecuación* $x'' + 2tx' = 0$.

Solución:

La ecuación se reduce a una lineal homogénea de primer orden con el cambio de variable $y = x'$,

$$y' = -2ty \Rightarrow \frac{dy}{y} = -2t\,dt \Rightarrow \ln|y| = C - t^2 \Rightarrow y(t) = k_1 e^{-t^2},$$

tomando $k_1 = \pm e^C$ y, deshaciendo el cambio de variable,

$$x(t) = k_2 + k_1 \int e^{-t^2}\,dt. \ \square$$

Problema 2.3 *Resolver la ecuación* $tx'' + x' = t$.

Solución:

La ecuación no depende de x, luego podemos realizar el cambio $y = x'$ para reducir el orden,

$$ty' + y = t.$$

Resolvemos la ecuación homogénea,

$$y_h(t) = Ce^{-\int dt/t} = Ce^{-\ln|t|} = \frac{k_1}{t},$$

denotando $k_1 = \pm C$.

La ecuación inhomogénea la resolvemos por variación de constantes, $y_p(t) = k(t)/t$,

$$-\frac{k}{t} + k' + \frac{k}{t} = t \Rightarrow k'(t) = t \Rightarrow k(t) = \frac{t^2}{2},$$

con lo cual la solución particular es $y_p(t) = t/2$ y la solución general,

$$y(t) = \frac{k_1}{t} + \frac{t}{2} \Rightarrow x(t) = \int y(t)\,dt = k_1 \ln|t| + \frac{t^2}{4} + k_2. \ \square$$

También se podía haber visto la ecuación como de Euler, $t^2x'' + tx' = t^2$, para $t > 0$, que se reduce a una lineal con coeficientes constantes con el cambio $t = e^u$,

$$\ddot{x} = e^{2u} \Rightarrow x(u) = \frac{e^{2u}}{4} + k_1 u + k_2 = \frac{t^2}{4} + k_1 \ln t + k_2.$$

Problema 2.4 *Resolver la ecuación* $x'' \cos t + x' \sin t = \sin t$.

Solución:

La ecuación no depende de x, luego podemos realizar el cambio $y = x'$ para reducir el orden,

$$y' \cos t + y \sin t = \sin t.$$

Resolvemos la ecuación homogénea,

$$y_h(t) = Ce^{-\int \sin t\, dt/\cos t} = Ce^{\ln|\cos t|} = k_1 \cos t,$$

denotando $k_1 = \pm C$.

La ecuación inhomogénea la resolvemos por variación de constantes, $y_p(t) = k(t)\cos t$,

$$k'\cos^2 t - k\sin t\cos t + k\cos t\sin t = \sin t \Rightarrow k'(t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t} \Rightarrow k(t) = \frac{1}{\cos t},$$

con lo cual la solución particular es $y_p(t) = 1$ y la solución general,

$$y(t) = k_1\cos t + 1 \Rightarrow x(t) = \int y(t)\, dt = k_1 \sin t + t + k_2. \; \square$$

Problema 2.5 *Resolver la ecuación* $xx'' + x'^2 = 0$. *Hallar la solución que verifica* $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ *y la que verifica* $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$

Solución:

La ecuación es autónoma, ya que no aparece la variable dependiente t. Podemos, por tanto, hacer el cambio de variable dependiente e independiente a $y(x) = x'$,

$$x'' = \frac{dy}{dx}x' = \frac{dy}{dx}y \Rightarrow xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0,$$

que es una ecuación lineal,

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow x' = y(x) = \frac{k_1}{x},$$

ecuación que hay que volver a integrar,

$$x\, dx = k_1\, dt \Rightarrow \frac{x^2}{2} = k_1 t + k_2 \Rightarrow x(t) = \pm\sqrt{K_1 t + K_2}. \; \square$$

El teorema de existencia y unicidad no se aplica en los datos iniciales con $x = 0$, lo cual es razonable, ya que para dichos valores la pendiente x' es infinita.

La solución que verifica $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ es

$$1 = \sqrt{K_2}, \quad 0 = \frac{K_1}{2\sqrt{K_2}} \Rightarrow K_1 = 0,\; K_2 = 1 \Rightarrow x(t) = 1. \; \square$$

Por su parte, la solución que verifica $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$ es

$$0 = \sqrt{K_2}, \quad 1 = \pm\frac{K_1}{2\sqrt{K_2}},$$

sistema que no tiene solución, ya que $K_2 = 0$ implica que la pendiente tiene que ser infinita, no la unidad, tal como habíamos anunciado. $\square$

Problema 2.6 *Resolver la ecuación* $x'' = 2xx'$.

Solución:

La ecuación es autónoma, por lo que podemos reducir el orden mediante el cambio de variables a $y(x) = x'$, $y\dot{y}(x) = x''$,

$$y\dot{y} = 2xy \Rightarrow \dot{y} = 2x \Rightarrow x' = y(x) = x^2 + C \Rightarrow \frac{dx}{C + x^2} = dt$$

lo cual conduce a tres casos, dependiendo del signo de la constante C,

$$t - t_0 = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x/k)}{k} \Rightarrow x(t) = k \tan k(t - t_0) & C = k^2 \\ -\dfrac{1}{x} \Rightarrow x(t) = -\dfrac{1}{t - t_0} & C = 0 \\ -\dfrac{\operatorname{arctanh}(x/k)}{k} \Rightarrow x(t) = -k \tanh k(t - t_0) & C = -k^2 \end{cases} . \square$$

Problema 2.7 *Resolver el sistema $x' = x + 2y + 2e^t$, $y' = -2x + y$. Hallar la solución que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.*

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial,

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \end{pmatrix} = AX + F(t),$$

Calculamos los autovalores de A,

$$0 = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 5 \Rightarrow \lambda = 1 \pm 2i,$$

que resultan complejos.

Buscamos un autovector para $\lambda = 1 + 2i$,

$$\begin{pmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_{1+2i} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$$

y el conjugado para $\lambda = 1 - 2i$,

$$\overline{v_{1+2i}} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Así pues, las soluciones linealmente independientes complejas son

$$e^{(1+2i)t} v_{1+2i} = e^t (\cos 2t + i \sin 2t) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t + i \sin 2t \\ -\sin 2t + i \cos 2t \end{pmatrix},$$

y su compleja conjugada y nos quedamos como soluciones reales la parte real e imaginaria,

$$X_1(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = e^t \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix},$$

con lo cual la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = k_1 X_1(t) + k_2 X_2(t) = \begin{pmatrix} k_1 \cos 2t + k_2 \sin 2t \\ -k_1 \sin 2t + k_2 \cos 2t \end{pmatrix} e^t.$$

Otra forma de obtener esta solución general es partir de la base de autovectores está formada por $B = \{v_{1+2i}, \overline{v_{1+2i}}\}$, con lo que la matriz de cambio de base será $P = (v_{1+2i}, \overline{v_{1+2i}})$, para obtener la matriz diagonal $D = \mathrm{diag}(1+2i, 1-2i)$, $A = PDP^{-1}$,

$$\begin{aligned} e^{At} &= Pe^{Dt}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(1+i2)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-i2)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} e^t. \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = e^{At}K \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(t) = (k_1 \cos 2t + k_2 \sin 2t)e^t \\ y(t) = (-k_1 \sin 2t + k_2 \cos 2t)e^t \end{array} \right. ,$$

idéntica a la que habíamos obtenido por el otro método.

Calculamos ahora una solución particular del sistema, de la forma $x_p(t) = ae^t$, $y_p(t) = be^t$, ya que los términos inhomogéneos son de la forma e^t y 1 no es autovalor. Sustituida en el sistema,

$$ae^t = ae^t + 2be^t + 2e^t, \quad be^t = -2ae^t + be^t,$$

conduce a un sistema lineal para los coeficientes indeterminados,

$$2b + 2 = 0, \quad -2a = 0 \Rightarrow a = 0, \ b = -1,$$

con lo cual la solución particular es $x_p(t) = 0$, $y_p(t) = -e^t$, y la solución general del sistema es

$$x(t) = (k_1 \cos 2t + k_2 \sin 2t)e^t, \quad y(t) = (-k_1 \sin 2t + k_2 \cos 2t - 1)e^t. \ \square$$

La solución que verifica $x(0) = 0 = y(0)$ es

$$0 = k_1, \quad 0 = k_2 - 1 \Rightarrow x(t) = e^t \sin 2t, \quad y(t) = (\cos 2t - 1)e^t. \ \square$$

Problema 2.8 *Resolver el sistema* $x' = x - 2y + 2$, $y' = 5x - y + 1$. *Hallar la solución que verifica* $x(0) = 0 = y(0)$.

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial,

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = AX + F(t).$$

Calculamos los autovalores de A,

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 9 \Rightarrow \lambda = \pm 3i,$$

que resultan complejos conjugados.

Buscamos un autovector para $\lambda = 3i$,

$$\begin{pmatrix} 1-3i & -2 \\ 5 & -1-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_{3i} \propto \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix},$$

y el conjugado para $\lambda = -3i$,

$$\overline{v_{3i}} \propto \begin{pmatrix} 2 \\ 1+3i \end{pmatrix}.$$

En lugar de resolver el sistema homogéneo con matrices, partiremos de las soluciones linealmente independientes complejas,

$$e^{3it} v_{3i} = (\cos 3t + i \sin 3t) \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos 3t + i2\sin 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t + i(\sin 3t - 3\cos 3t) \end{pmatrix}$$

y su compleja conjugada y quedarnos como soluciones reales la parte real e imaginaria,

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 2\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} 2\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix},$$

con lo cual la solución general es

$$X_h(t) = k_1 X_1(t) + k_2 X_2(t) = \begin{pmatrix} 2k_1 \cos 3t + 2k_2 \sin 3t \\ k_1(\cos 3t + 3\sin 3t) + k_2(\sin 3t - 3\cos 3t) \end{pmatrix}. \ \square$$

Sólo nos resta, pues, hallar una solución particular del sistema inhomogéneo. La forma de $F(t)$ nos sugiere probar, como 0 no es autovalor,

$$x_p(t) = A, \quad y_p(t) = B,$$

que sustituidas en el sistema

$$A - 2B + 2 = 0, \quad 5A - B + 1 = 0 \Rightarrow A = 0, B = 1,$$

nos proporcionan una solución particular,

$$x_p(t) = 0, \quad y_p(t) = 1,$$

y la solución general del sistema inhomogéneo,

$$x(t) = 2k_1 \cos 3t + 2k_2 \sin 3t, \ y(t) = (k_1 - 3k_2)\cos 3t + (3k_1 + k_2)\sin 3t + 1.$$

La solución particular que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$0 = 2k_1, \quad 0 = k_1 - 3k_2 + 1 \Rightarrow k_1 = 0, \ k_2 = \frac{1}{3},$$

$$x(t) = \frac{2}{3}\sin 3t, \quad y(t) = \frac{1}{3}\sin 3t - \cos 3t + 1. \ \square$$

Problema 2.9 *Resolver el sistema $x' = 3x + y$, $y' = -x + y + 4t$. Hallar la solución que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.*

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial,

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4t \end{pmatrix} = AX + F(t).$$

Calculamos los autovalores de A,

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \Rightarrow \lambda = 2,$$

que es un autovalor doble.

Como A no es diagonal, habrá un único autovector linealmente independiente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pero para construir la base, es preferible comenzar por w_2, que tiene que ser un vector no autovector, tal que $(A - 2\mathbb{I})w_2$ sea un autovector.

Tomamos un vector sencillo,

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = (A - 2\mathbb{I})w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, una base que lleva A a la forma canónica de Jordan está formada por $B = \{w_2, v_2\}$ y la matriz de cambio de base será $P = (w_2, v_2)$ para obtener la matriz de Jordan, $A = PJP^{-1}$, con lo cual

$$W(t) = Pe^{Jt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{2t} & e^{2t} \\ (1-t)e^{2t} & -e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Así pues, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = W(t)K = \left\{ \begin{array}{l} x_h(t) = k_1 te^{2t} + k_2 e^{2t} \\ y_h(t) = k_1(1-t)e^{2t} - k_2 e^{2t} \end{array} \right. .$$

Como los términos inhomogéneos son polinomios de grado uno y 0 no es autovalor, buscamos una solución particular del sistema de la forma

$$x_p(t) = at + b, \quad y_p(t) = ct + d,$$

$$a = (3a+c)t + (3b+d),\ c = (4-a+c)t + (-b+d) \Rightarrow a = 1 = b,\ c = -3\ d = -2,$$

$$x_p(t) = t + 1, \quad y_p(t) = -3t - 2,$$

con lo cual la solución general del sistema es

$$x(t) = k_1 te^{2t} + k_2 e^{2t} + t + 1, \quad y(t) = k_1(1-t)e^{2t} - k_2 e^{2t} - 3t - 2. \ \square$$

La solución particular que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$0 = k_2 + 1, \quad 1 = k_1 - k_2 - 2 \Rightarrow k_1 = 2,\ k_2 = -1,$$

$$x(t) = 2te^{2t} - e^{2t} + t + 1, \quad y(t) = 2(1-t)e^{2t} + e^{2t} - 3t - 2. \ \square$$

Problema 2.10 *Resolver el sistema $x' = -y + te^{2t}$, $y' = 9x + 6y$. Hallar la solución que verifica $x(0) = -1$, $y(0) = 0$.*

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial,

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} = AX + F(t).$$

Calculamos los autovalores de A,

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 9 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 \Rightarrow \lambda = 3 \text{ doble.}$$

Como A no es diagonal, habrá un único autovector linealmente independiente,

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Pero para construir la base, es preferible comenzar por w_3, que tiene que ser un vector no autovector, tal que $(A - 3\mathbb{I})w_3$ sea un autovector. Tomamos un vector sencillo,

$$w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = (A - 3\mathbb{I})w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, una base que lleva A a la forma canónica de Jordan está formada por $B = \{w_3, v_3\}$ y la matriz de cambio de base será $P = (w_3, v_3)$ para obtener la matriz de Jordan, $A = PJP^{-1}$, con lo cual

$$W(t) = Pe^{Jt} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ te^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -te^{3t} & -e^{3t} \\ (1+3t)e^{3t} & 3e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Así pues, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = W(t)K = \left\{ \begin{array}{l} x_h(t) = -k_1 te^{3t} - k_2 e^{3t} \\ y_h(t) = k_1(1+3t)e^{3t} + 3k_2 e^{3t} \end{array} \right. .$$

Como los términos inhomogéneos son una exponencial de exponente 2 por un polinomio de grado uno y 2 no es autovalor, buscamos una solución de la forma $x_p(t) = (at+b)e^{2t}$, $y_p(t) = (ct+d)e^{2t}$, que sustituida en el sistema proporciona

$$0 = x_p' + y_p - te^{2t} = e^{2t}\left(t(2a + c - 1) + (2b + a + d)\right),$$

$$0 = y_p' - 9x_p - 6y_p = e^{2t}\left(t(2c - 9a - 6c) + (2d + c - 9b - 6d)\right),$$

conduce a un sistema de ecuaciones,

$$2a + c - 1 = 0, \quad a + 2b + d = 0, \quad -9a - 4c = 0, \quad -9b + c - 4d = 0,$$

cuya solución es

$$a = -4, \quad b = -7, \quad c = 9, \quad d = 18,$$

con lo cual la solución general del sistema inhomogéneo es

$$x(t) = -k_1te^{3t} - k_2e^{3t} - (4t+7)e^{2t}, \quad y(t) = k_1(1+3t)e^{3t} + 3k_2e^{3t} + (9t+18)e^{2t}. \ \square$$

Resolvemos el problema de valores iniciales,

$$-1 = x(0) = -k_2 - 7, \qquad 0 = y(0) = k_1 + 3k_2 + 18,$$

y determinamos las constantes, $k_1 = 0$, $k_2 = -6$, con lo cual la solución es

$$x(t) = 6e^{3t} - (4t+7)e^{2t}, \quad y(t) = -18e^{3t} + (9t+18)e^{2t}. \ \square$$

Problema 2.11 *Resolver el sistema $x' = 3x+2y$, $y' = -6x-4y+\cos t$. Hallar la solución que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.*

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial,

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix} = AX + F(t),$$

si expresamos A en forma diagonal.

Para ello, calculamos sus autovalores,

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda \Rightarrow \lambda = 0, -1,$$

y sus correspondientes autovectores.

Para $\lambda = 0$,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_0 \propto \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Y para $\lambda = -1$,

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_{-1} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, una base de autovectores está formada por $B = \{v_0, v_{-1}\}$ y la matriz de cambio de base será $P = (v_0, v_{-1})$ para obtener una matriz diagonal $D = \mathrm{diag}(0, -1)$, $A = PDP^{-1}$,

$$W(t) = Pe^{Dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & e^{-t} \\ -3 & -2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Así pues, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = W(t)K = \left\{ \begin{array}{l} x_h(t) = 2k_1 + k_2e^{-t} \\ y_h(t) = -3k_1 - 2k_2e^{-t} \end{array} \right. .$$

Una manera de calcular una solución del sistema inhomogéneo es probar con $x_p(t) = A\cos t + B\sin t$, $y_p(t) = C\cos t + D\sin t$, ya que $\pm i$ no es autovalor y los términos inhomogéneos son de la forma $\cos t$,

$$\left. \begin{array}{l} -A\sin t + B\cos t = (3A+2C)\cos t + (3B+2D)\sin t \\ -C\sin t + D\cos t = (1-6A-4C)\cos t + (-6B-4D)\sin t \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$A = -1,\ B = 1,\ C = 2,\ D = -1.$$

Por tanto, la solución general del sistema es

$$X(t) = \left\{ \begin{array}{l} x_h(t) = 2k_1 + k_2 e^{-t} - \cos t + \sin t \\ y_h(t) = -3k_1 - 2k_2 e^{-t} + 2\cos t - \sin t \end{array} \right. . \square$$

La solución particular que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$0 = 2k_1 + k_2 - 1, \quad 0 = -3k_1 - 2k_2 + 2 \Rightarrow k_1 = 0,\ k_2 = 1,$$

$$x(t) = e^{-t} - \cos t + \sin t, \quad y(t) = -2e^{-t} + 2\cos t - \sin t. \ \square$$

Problema 2.12 *Resolver el sistema $x' = x - 2y - t$, $y' = 2x - 3y - t$. Hallar la solución que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.*

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial,

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ -t \end{pmatrix} = AX + F(t).$$

Calculamos los autovalores de A,

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 \Rightarrow \lambda = -1,$$

que es un autovalor doble.

Como A no es diagonal, habrá un único autovector linealmente independiente,

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pero para construir la base, es preferible comenzar por w_{-1}, que tiene que ser un vector no autovector, tal que $(A + \mathbb{I})w_{-1}$ sea un autovector.

Tomamos un vector sencillo,

$$w_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_{-1} = (A + \mathbb{I})w_{-1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, una base que lleva A a la forma canónica de Jordan está formada por $B = \{w_{-1}, v_{-1}\}$ y la matriz de cambio de base será $P = (w_{-1}, v_{-1})$ para obtener la matriz de Jordan, $A = PJP^{-1}$, con lo cual

$$W(t) = Pe^{Jt} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2te^{-t} & -2e^{-t} \\ (1-2t)e^{-t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Así pues, la solución general del sistema homogéneo es

$$x_h(t) = -2k_1 te^{-t} - 2k_2 e^{-t}, \quad y_h(t) = k_1(1-2t)e^{-t} - 2k_2 e^{-t}.$$

Como los términos inhomogéneos son polinomios de grado uno y 0 no es autovalor, para el sistema inhomogéneo buscamos una solución particular de la forma

$$x_p(t) = at + b, \quad y_p(t) = ct + d,$$

$a=(a-2c-1)t+(b-2d),\ c=(2a-3c-1)t+(2b-3d)\Rightarrow a=-1=c, b=1=d,$

$$x_p(t)=1-t,\quad y_p(t)=1-t,$$

con lo cual la solución general del sistema es

$$x(t)=-2k_1te^{-t}-2k_2e^{-t}+1-t,\quad y(t)=k_1(1-2t)e^{-t}-2k_2e^{-t}+1-t.\ \square$$

La solución particular que verifica $x(0)=0$, $y(0)=1$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$0=-2k_2+1,\quad 1=k_1-2k_2+1\Rightarrow k_1=1,\ k_2=\frac{1}{2},$$

$$x(t)=-2te^{-t}-e^{-t}+1-t,\quad y(t)=-2te^{-t}+1-t.\ \square$$

Problema 2.13 *Resolver el sistema $x'=-x-y$, $y'=4x-y+10\sin t$. Hallar la solución que verifica $x(0)=0$, $y(0)=1$.*

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial,

$$X'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=AX+F(t),\quad F(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ 10\sin t \end{pmatrix}$$

Calculamos los autovalores de A,

$$0=\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+2\lambda+5\Rightarrow\lambda=-1\pm 2i,$$

que resultan complejos.

Buscamos un autovector para $\lambda=-1+2i$,

$$\begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow v_{-1+2i}\propto\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}.$$

En lugar de resolver el sistema homogéneo con matrices, partiremos de las soluciones linealmente independientes complejas,

$$e^{(2i-1)t}v_{-1+2i}=e^{-t}(\cos 2t+i\sin 2t)\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix} \cos 2t+i\sin 2t \\ 2\sin 2t-2i\cos 2t \end{pmatrix}$$

y su compleja conjugada y quedarnos como soluciones reales la parte real e imaginaria,

$$X_1(t)=e^{-t}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ 2\sin 2t \end{pmatrix},\quad X_2(t)=e^{-t}\begin{pmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t \end{pmatrix},$$

con lo cual la solución general es

$$X_h(t)=k_1X_1(t)+k_2X_2(t)=\begin{pmatrix} k_1\cos 2t+k_2\sin 2t \\ 2k_1\sin 2t-2k_2\cos 2t \end{pmatrix}e^{-t}.$$

Como los términos inhomogéneos son de la forma $\sin t$ y $\pm i$ no son autovalores, buscamos solución particular de la forma $x_p(t) = a\cos t + b\sin t$, $y_p(t) = c\cos t + d\sin t$. Sustituida en el sistema,

$$0 = (-a-b-c)\cos t + (a-b-d)\sin t, \quad (4a-c-d)\cos t + (4b+c-d+10)\sin t,$$

proporciona un sistema lineal para los coeficientes indeterminados,

$$-a-b-c=0, \quad a-b-d=0, \quad 4a-c-d=0, \quad 4b+c-d+10=0,$$

cuya solución es $a = 1 = c$, $b = -2$, $d = 3$. Con lo cual la solución general del sistema es

$$x(t) = (k_1\cos 2t + k_2\sin 2t)\,e^{-t} + \cos t - 2\sin t,$$
$$y(t) = (2k_1\sin 2t - 2k_2\cos 2t)\,e^{-t} + \cos t + 3\sin t. \ \square$$

La solución que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ es

$$0 = k_1 + 1,\ 1 = -2k_2 + 1 \Rightarrow k_1 = -1,\ k_2 = 0,$$

$$x(t) = -e^{-t}\cos 2t + \cos t - 2\sin t,$$
$$y(t) = -2e^{-t}\sin 2t + \cos t + 3\sin t. \ \square$$

Problema 2.14 *Resolver el sistema $x' = x + 2y - 5t$, $y' = -x + 3y + 5t$, donde $x(t)$, $y(t)$ son funciones reales, $t \geq 0$. Hallar la solución que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.*

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial,

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5t \\ 5t \end{pmatrix} = AX + F(t).$$

Calculamos los autovalores de A,

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 \Rightarrow \lambda = 2 \pm i,$$

autovalores complejos conjugados.

Buscamos un autovector para $\lambda = 2 + i$,

$$\begin{pmatrix} -1-i & 2 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_{2+i} \propto \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix},$$

y el conjugado para $\lambda = 2 - i$,

$$\overline{v_{2+i}} \propto \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así pues, una base de autovectores está formada por $B = \{v_{2+i}, \overline{v_{2+i}}\}$ y a partir de las soluciones linealmente independientes complejas,

$$e^{(2+i)t}v_{2+i} = e^{2t}(\cos t + i\sin t)\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} (1-i)\cos t + (1+i)\sin t \\ \cos t + i\sin t \end{pmatrix},$$

y su compleja conjugada, nos quedamos como soluciones reales la parte real e imaginaria,

$$X_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

con lo cual la solución general es

$$X_h(t) = c_1X_1(t) + c_2X_2(t) = \begin{pmatrix} c_1(\cos t + \sin t) + c_2(\sin t - \cos t) \\ c_1\cos t + c_2\sin t \end{pmatrix} e^{2t}. \square$$

Otra forma de obtener esta solución general es usando la matriz de cambio de base, $P = (v_{2+i}, \overline{v_{2+i}})$ para obtener la matriz diagonal $D = \mathrm{diag}(2+i, 2-i)$, $A = PDP^{-1}$,

$$\begin{aligned} e^{At} &= Pe^{Dt}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2+it} & 0 \\ 0 & e^{2-it} \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1-i \\ -i & 1+i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & 2\sin t \\ -\sin t & \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{2t}. \end{aligned}$$

Así pues, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = W(t)K = \left\{ \begin{array}{l} x_h(t) = k_1e^{2t}(\cos t - \sin t) + 2k_2e^{2t}\sin t \\ y_h(t) = -k_1e^{2t}\sin t + k_2e^{2t}(\cos t + \sin t) \end{array} \right. ,$$

siendo $c_1 = k_2$, $c_2 = k_2 - k_1$, con lo cual la solución es idéntica a la que habíamos obtenido por el otro método.

Como los términos inhomogéneos son polinomios de grado uno y 0 no es autovalor, buscamos una solución particular del sistema de la forma

$$x_p(t) = at + b, \quad y_p(t) = ct + d,$$

que introducida en el sistema,

$$(a + 2c - 5)t + (-a + b + 2d) = 0, \qquad (-a + 3c + 5)t + (-c - b + 3d) = 0,$$

proporciona el siguiente sistema de ecuaciones lineales para los coeficientes,

$$a + 2c - 5 = 0, \quad -a + b + 2d = 0, \quad -a + 3c + 5 = 0, \quad -c - b + 3d = 0,$$

cuya solución es

$$a = 5,\ b = 3,\ c = 0,\ d = 1, \quad x_p(t) = 5t + 3, \quad y_p(t) = 1,$$

con lo cual la solución general del sistema es

$$\begin{aligned} x(t) &= k_1e^{2t}(\cos t - \sin t) + 2k_2e^{2t}\sin t + 5t + 3, \\ y(t) &= -k_1e^{2t}\sin t + k_2e^{2t}(\cos t + \sin t) + 1. \square \end{aligned}$$

La solución particular que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$0 = k_1 + 3, \quad 0 = k_2 + 1 \Rightarrow k_1 = -3,\ k_2 = -1,$$

$$x(t) = (\sin t - 3\cos t)e^{2t} + 5t + 3, \qquad y(t) = (2\sin t - \cos t)e^{2t} + 1. \square$$

Problema 2.15 *Resolver el sistema $x' = x - 2y + 10te^{-t}$, $y' = 5x - y$. Hallar la solución que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = -4$.*

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial,

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10te^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} = AX + F(t),$$

Calculamos los autovalores de A,

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 9 \Rightarrow \lambda = \pm 3i,$$

que resultan complejos.

Buscamos un autovector para $\lambda = 3i$,

$$\begin{pmatrix} 1-3i & -2 \\ 5 & -1-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_{3i} \propto \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix},$$

y el conjugado para $\lambda = -3i$,

$$\overline{v_{3i}} \propto \begin{pmatrix} 2 \\ 1+3i \end{pmatrix}.$$

Así pues, las soluciones linealmente independientes complejas son

$$\begin{aligned} e^{3it} v_{3i} &= (\cos 3t + i \sin 3t) \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cos 3t + 2i \sin 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t + i(\sin 3t - 3\cos 3t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y su compleja conjugada y nos quedamos como soluciones reales la parte real e imaginaria,

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 2\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} 2\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix},$$

con lo cual la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = k_1 X_1(t) + k_2 X_2(t) = \begin{pmatrix} 2k_1 \cos 3t + 2k_2 \sin 3t \\ k_1(\cos 3t + 3\sin 3t) + k_2(\sin 3t - 3\cos 3t) \end{pmatrix},$$

$x_h(t) = 2k_1 \cos 3t + 2k_2 \sin 3t$, $\quad y_h(t) = k_1(\cos 3t + 3\sin 3t) + k_2(\sin 3t - 3\cos 3t)$.

Calculamos ahora una solución particular del sistema, de la forma

$$x_p(t) = (at + b)e^{-t}, \quad y_p(t) = (ct + d)e^{-t},$$

ya que los términos inhomogéneos son de la forma te^{-t} y -1 no es autovalor. Sustituida en el sistema,

$$t(2a - 2c + 10) + 2b - a - 2d = 0, \quad 5at - c + 5b = 0,$$

conduce a un sistema lineal para los coeficientes indeterminados,

$$2a - 2c + 10 = 0, \quad 2b - a - 2d = 0, \quad a = 0, \quad 5b - c = 0,$$

cuya solución es $a = 0$, $b = 1$, $c = 5$, $d = 1$, con lo cual la solución particular es

$$x_p(t) = e^{-t}, \quad y_p(t) = (5t + 1)e^{-t},$$

y la solución general del sistema es

$$x(t) = 2k_1 \cos 3t + 2k_2 \sin 3t + e^{-t},$$

$$y(t) = k_1(\cos 3t + 3 \sin 3t) + k_2(\sin 3t - 3 \cos 3t) + (5t + 1)e^{-t}. \ \square$$

La solución que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = -4$ cumple

$$0 = 2k_1 + 1, \quad -4 = k_1 - 3k_2 + 1 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{2}, \quad k_2 = \frac{3}{2},$$

con lo cual dicha solución es

$$x(t) = -\cos 3t + 3 \sin 3t + e^{-t}, \quad y(t) = -5 \cos 3t + (5t + 1)e^{-t}. \ \square$$

Problema 2.16 *Resolver el sistema $x' = 3x - 4y$, $y' = 2x - 3y + 2e^t$. Hallar la solución que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.*

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial,

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = AX,$$

y calculamos los autovalores de A,

$$0 = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -4 \\ 2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1,$$

y sus correspondientes autovectores.

Para $\lambda = -1$,

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_{-1} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Y para $\lambda = 1$,

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 \propto \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, una base de autovectores está formada por $B = \{v_{-1}, v_1\}$ y la matriz de cambio de base será $P = (v_{-1}, v_1)$ para obtener una matriz diagonal $D = \mathrm{diag}(-1, 1)$, $A = PDP^{-1}$. Una matriz fundamental es

$$W(t) = Pe^{Dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^t \\ e^{-t} & e^t \end{pmatrix}.$$

Así pues, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = W(t)K = \left\{ \begin{array}{l} x_h(t) = k_1 e^{-t} + 2k_2 e^t \\ y_h(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^t \end{array} \right. .$$

Como el término inhomogéneo es exponencial de exponente uno, que es autovalor simple, buscamos una solución de la forma $x(t) = (At + B)e^t$, $y(t) = (Ct + D)e^t$,

$$(At + A + B)e^t = (3A - 4C)te^t + (3B - 4D)e^t,$$

$$(Ct + C + D)e^t = (2A - 3C)te^t + (2B - 3D + 2)e^t,$$

$$2A - 4C = 0,\ -A + 2B - 4D = 0,\ 2A - 4C = 0,\ 2B - C - 4D + 2 = 0,$$

$$A = -4,\ B = -2 + 2D,\ C = -2.$$

Escogemos una solución sencilla, tomando $D = 0$, con lo cual la solución general del sistema inhomogéneo es

$$x(t) = k_1 e^{-t} + 2k_2 e^t - 4te^t - 2e^t, \quad y(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^t - 2te^t. \ \square$$

La solución particular que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$0 = k_1 + 2k_2 - 2, \quad 0 = k_1 + k_2 \Rightarrow k_1 = -2,\ k_2 = 2,$$

$$x(t) = -2e^{-t} + 2e^t - 4te^t, \quad y(t) = -2e^{-t} + 2e^t - 2te^t. \ \square$$

Problema 2.17 *Resolver el sistema $x' = -x+4y+2\cos t$, $y' = -x+3y+2\cos t$. Hallar la solución que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.*

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial,

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = AX,$$

y calculamos los autovalores de A,

$$0 = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \Rightarrow \lambda = 1,$$

autovalor doble.

Como A no es diagonal, habrá un único autovector linealmente independiente. Para construir la base que lleve la matriz a la forma canónica de Jordan, comenzamos por w_1, que tiene que ser un vector no autovector.

Tomamos un vector sencillo,

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = (A - \mathbb{I})w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, una base que lleva A a la forma canónica de Jordan está formada por $B = \{w_1, v_1\}$ y la matriz de cambio de base será $P = (w_1, v_1)$ para obtener la matriz de Jordan, $A = PJP^{-1}$, con lo cual

$$W(t) = Pe^{Jt} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4te^t & 4e^t \\ e^t + 2te^t & 2e^t \end{pmatrix}.$$

Así pues, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = W(t)K = \left\{ \begin{array}{l} x_h(t) = 4k_1te^t + 4k_2e^t \\ y_h(t) = 2k_1te^t + (k_1 + 2k_2)e^t \end{array} \right. .$$

Como los términos inhomogéneos son de la forma $\cos t$ y $\pm i$ no son autovalores del sistema homogéneo, buscamos soluciones particulares de la forma $x_p(t) = A\cos t + B\sin t$, $y_p(t) = C\cos t + D\sin t$, que, introducidas en el sistema,

$$(-B - A + 4C + 2)\cos t + (A - B + 4D)\sin t = 0,$$

$$(-D - A + 3C + 2)\cos t + (C - B + 3D)\sin t = 0,$$

conducen a un sistema lineal para los coeficientes,

$$-B-A+4C+2 = 0, \quad A-B+4D = 0, \quad -D-A+3C+2 = 0, \quad C-B+3D = 0,$$

cuya solución es $A = B = C = -1$, $D = 0$, con lo cual la solución general del sistema inhomogéneo es

$$x(t) = 4k_1te^t + 4k_2e^t - \cos t - \sin t, \quad y(t) = 2k_1te^t + (k_1 + 2k_2)e^t - \cos t. \ \square$$

La solución particular que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$0 = 4k_2 - 1, \quad 0 = k_1 + 2k_2 - 1 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}, \ k_2 = \frac{1}{4},$$

$$x(t) = 2te^t + e^t - \cos t - \sin t, \quad y(t) = te^t + e^t - \cos t. \ \square$$

Problema 2.18 *Resolver el sistema $x' = -2x + 9y + 16\cos 4t$, $y' = -4x + 10y$. Hallar la solución que verifica $x(0) = 7$, $y(0) = 0$.*

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial,

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16\cos 4t \\ 0 \end{pmatrix} = AX + F(t).$$

Calculamos los autovalores de A,

$$0 = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 9 \\ -4 & 10-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 16 \Rightarrow \lambda = 4,$$

que es un autovalor doble.

Como A no es diagonal, habrá un único autovector linealmente independiente,

$$\begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_4 \propto \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pero para construir la base, es preferible comenzar por w_4, que tiene que ser un vector no autovector, tal que $(A-4\mathbb{I})w_4$ sea un autovector.

Tomamos un vector sencillo,

$$w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_4 = (A-4\mathbb{I})w_4 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, una base que lleva A a la forma canónica de Jordan está formada por $B = \{w_4, v_4\}$ y la matriz de cambio de base será $P = (w_4, v_4)$ para obtener la matriz de Jordan, $A = PJP^{-1}$, con lo cual

$$W(t) = Pe^{Jt} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ te^{4t} & e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9te^{4t} & 9e^{4t} \\ (1+6t)e^{4t} & 6e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Así pues, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = W(t)K = \left\{ \begin{array}{l} x_h(t) = 9k_1te^{4t} + 9k_2e^{4t} \\ y_h(t) = k_1(1+6t)e^{4t} + 6k_2e^{4t} \end{array} \right. .$$

Como los términos inhomogéneos son de la forma $\cos 4t$ y $\pm 4i$ no son autovalores, buscamos una solución particular del sistema, de la forma

$$x_p(t) = a\cos 4t + b\sin 4t, \quad y_p(t) = c\cos 4t + d\sin 4t,$$

$$(-2a - 4b + 9c + 16)\cos 4t + (4a - 2b + 9d)\sin 4t = 0,$$

$$(-4a + 10c - 4d)\cos 4t + (-4b + 4c + 10d)\sin 4t = 0,$$

cuyos coeficientes son

$$a = -2,\ b = 5,\ c = 0\ d = 2, \quad x_p(t) = -2\cos 4t + 5\sin 4t, \quad y_p(t) = 2\sin 4t,$$

con lo cual la solución general del sistema es

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & 9k_1te^{4t} + 9k_2e^{4t} - 2\cos 4t + 5\sin 4t, \\ y(t) & = & k_1(1+6t)e^{4t} + 6k_2e^{4t} + 2\sin 4t. \ \square \end{array}$$

La solución particular que verifica $x(0) = 7$, $y(0) = 0$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$7 = 9k_2 - 2, \quad 0 = k_1 + 6k_2 \Rightarrow k_1 = -6,\ k_2 = 1,$$

$$x(t) = -54te^{4t} + 9e^{4t} - 2\cos 4t + 5\sin 4t, \quad y(t) = -6(1+6t)e^{4t} + 6e^{4t} + 2\sin 4t. \ \square$$

Problema 2.19 *Resolver el sistema de ecuaciones* $x' = 2y + 5e^t$, $y' = -2x + 3\sin t$. *Hallar la solución que verifica* $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

En forma matricial, el sistema se puede resolver

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5e^t \\ 3\sin t \end{pmatrix} = AX + F(t),$$

si expresamos A en forma diagonal.

Para ello, calculamos sus autovalores,

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 \Rightarrow \lambda = \pm 2i,$$

que resultan complejos.

Buscamos un autovector para $\lambda = 2i$,

$$\begin{pmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_{2i} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$$

y el conjugado para $\lambda = -2i$,

$$\overline{v_{2i}} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Así pues, una base de autovectores está formada por $B = \{v_{2i}, \overline{v_{2i}}\}$ y la matriz de cambio de base será $P = (v_{2i}, \overline{v_{2i}})$ para obtener la matriz diagonal $D = \mathrm{diag}(2i, -2i)$, $A = PDP^{-1}$,

$$\begin{aligned} e^{At} &= Pe^{Dt}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i2t} & 0 \\ 0 & e^{-i2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = e^{At}K = \begin{cases} x_h(t) = k_1 \cos 2t + k_2 \sin 2t \\ y_h(t) = -k_1 \sin 2t + k_2 \cos 2t \end{cases}.$$

Finalmente, otra manera, sencilla, de obtener la solución general del sistema homogéneo es partir de las soluciones linealmente independientes complejas,

$$e^{2it}v_{2i} = (\cos 2t + i \sin 2t) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t + i \sin 2t \\ -\sin 2t + i \cos 2t \end{pmatrix},$$

y su compleja conjugada y quedarnos como soluciones reales la parte real e imaginaria,

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix},$$

con lo cual la solución general es

$$X(t) = k_1 X_1(t) + k_2 X_2(t) = \begin{pmatrix} k_1 \cos 2t + k_2 \sin 2t \\ -k_1 \sin 2t + k_2 \cos 2t \end{pmatrix},$$

tal como habíamos obtenido por los otros dos métodos.

Sólo nos resta, pues, hallar una solución particular del sistema inhomogéneo. La forma de $F(t)$ nos sugiere probar

$$x_p(t) = ae^t + b\cos t + c\sin t, \quad y_p(t) = de^t + f\cos t + g\sin t,$$

que sustituidas en el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} ae^t - b\sin t + c\cos t = (2d+5)e^t + 2f\cos t + 2g\sin t \\ de^t - f\sin t + g\cos t = -2ae^t - 2b\cos t + (3-2c)\sin t \end{array} \right.,$$

nos proporcionan una solución particular, $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$, $d = -2$, $f = 1$, $g = 0$,

$$x_p(t) = e^t + 2\sin t, \quad y_p(t) = -2e^t + \cos t,$$

y la solución general del sistema inhomogéneo,

$$x(t) = k_1\cos 2t + k_2\sin 2t + e^t + 2\sin t, \quad y(t) = -k_1\sin 2t + k_2\cos 2t - 2e^t + \cos t,$$

La solución particular que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$0 = k_1 + 1, \quad 0 = k_2 - 1 \Rightarrow k_1 = -1,\ k_2 = 1,$$

$$x(t) = -\cos 2t + \sin 2t + e^t + 2\sin t, \quad y(t) = \sin 2t + \cos 2t - 2e^t + \cos t.$$

Problema 2.20 *Resolver el sistema de ecuaciones $x' = -3x + 50t\cos t$, $y' = -3y + 6t^2e^{-3t}$. Hallar la solución que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.*

En forma matricial, el sistema se puede resolver

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50t\cos t \\ 6t^2e^{-3t} \end{pmatrix} = AX + F(t),$$

con A en forma diagonal, de autovalor doble $\lambda = -3$.

En realidad, como A es diagonal, el sistema se compone realmente de dos ecuaciones desacopladas, que podemos resolver independientemente.

Comenzamos con el sistema homogéneo,

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -3x \\ y' = -3y \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_h(t) = k_1e^{-3t} \\ y_h(t) = k_2e^{-3t} \end{array} \right. .$$

Buscamos una solución particular para la primera ecuación. Como la fuerza es $\cos t$ por un polinomio de grado y $\pm i$ no son autovalores, buscamos una solución de la forma $x_p(t) = (at+b)\cos t + (ct+d)\sin t$,

$$\begin{aligned} 0 &= x_p' + 3x_p - 50t\cos t \\ &= \big((3a+c-50)t + (a+3b+d)\big)\cos t + \big((-a+3c)t + (-b+c+3d)\big)\sin t, \end{aligned}$$

lo que conduce a un sistema lineal,

$$3a + c - 50 = 0, \quad a + 3b + d = 0, \quad -a + 3c = 0, \quad -b + c + 3d = 0,$$

cuya solución es $a = 15$, $b = -4$, $c = 5$, $d = -3$,

$$x_p(t) = (15t - 4)\cos t + (5t - 3)\sin t.$$

Para la segunda ecuación, como el término independiente es de la forma t^2e^{-3t}, deberíamos buscar la misma exponencial multiplicada por un polinomio de grado dos. Como -3 es autovalor simple, buscamos $y_p(t) = t(at^2+bt+c)e^{-3t}$,

$$0 = y_p' + 3y_p - 6t^2e^{-3t} = e^{-3t}\left(t^2(3a-6) + 2bt + c\right),$$

que conduce a un sistema lineal

$$3a - 6 = 0, \quad b = 0, \quad c = 0,$$

con lo cual una solución particular es $y_p(t) = 2t^3e^{-3t}$.

Por tanto, la solución general del "sistema" es

$$x(t) = k_1e^{-3t} + (15t-4)\cos t + (5t-3)\sin t, \qquad y(t) = k_2e^{-3t} + 2t^3e^{-3t}. \ \square$$

La solución particular que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$0 = k_1 - 4, \quad 0 = k_2,$$

$$x(t) = 4e^{-3t} + (15t-4)\cos t + (5t-3)\sin t, \qquad y(t) = 2t^3e^{-3t}. \ \square$$

Problema 2.21 *Resolver el sistema* $x' = 3x$, $y' = 2x + 3y$, $z' = x + y + 3z$.

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial,

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = AX,$$

y calculamos los autovalores de A, que trivialmente son $\lambda = 3$ triple.

Para $\lambda = 3$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Por tanto, no hay base de autovectores, ya que nos faltan dos. Construimos una base $B = \{u_3, w_3, v_3\}$ de modo que $w_3 = (A - 3\mathbb{I})u_3$, $v_3 = (A - 3\mathbb{I})w_3$,

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

y la matriz de cambio de base será $P = (u_3, w_3, v_3)$ para obtener una matriz de Jordan, $A = PJP^{-1}$,

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Una matriz fundamental es $W(t) = Pe^J$,

$$W(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t^2/2 & t & 1 \end{pmatrix} e^{3t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2t & 2 & 0 \\ t + t^2 & 1 + 2t & 2 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Así pues, la solución general del sistema es

$$X(t) = W(t)K = \left\{ \begin{array}{l} x(t) = k_1 e^{3t} \\ y(t) = 2k_1 t e^{3t} + 2k_2 e^{3t} \\ z(t) = k_1(t + t^2)e^{3t} + k_2(1 + 2t)e^{3t} + 2k_3 e^{3t} \end{array} \right. ,$$

que se puede reexpresar de manera más compacta tomando $C_1 = k_1$, $C_2 = 2k_2$, $C_3 = 2k_3 + k_2$,

$$X(t) = W(t)K = \left\{ \begin{array}{l} x(t) = C_1 e^{3t} \\ y(t) = 2C_1 t e^{3t} + C_2 e^{3t} \\ z(t) = C_1(t + t^2)e^{3t} + C_2 t e^{3t} + C_3 e^{3t} \end{array} \right. . \square$$

Problema 2.22 *Resolver el sistema de ecuaciones $x' = 4x + 4y + 36$, $y' = -x + 8y + 9$. Hallar la solución que verifica $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.*

En forma matricial, el sistema se puede resolver

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 36 \\ 9 \end{pmatrix} = AX + F(t),$$

si expresamos A en forma diagonal. Para ello, calculamos sus autovalores,

$$0 = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 4 \\ -1 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 12\lambda + 36 \Rightarrow \lambda = 6 \text{ doble},$$

y observamos que la matriz no es diagonalizable.

Para construir la base, es preferible comenzar por w_3, que tiene que ser un vector no autovector, tal que $(A - 3\mathbb{I})w_3$ sea un autovector.

Tomamos un vector sencillo,

$$w_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_6 = (A - 6\mathbb{I})w_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, una base que lleva A a la forma canónica de Jordan está formada por $B = \{w_6, v_6\}$ y la matriz de cambio de base será $P = (w_6, v_6)$ para obtener la matriz de Jordan, $A = PJP^{-1}$, con lo cual una matriz fundamental es

$$W(t) = Pe^{Jt} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{6t} & 0 \\ te^{6t} & e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4te^{6t} & 4e^{6t} \\ (1 + 2t)e^{6t} & 2e^{6t} \end{pmatrix}.$$

Así pues, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = W(t)K \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_h(t) = 4k_1 t e^{6t} + 2k_2 e^{6t} \\ y_h(t) = k_1(1 + 2t)e^{6t} + k_2 e^{6t} \end{array} \right. ,$$

cambiando k_2 por $k_2/2$ para hacer más compacta la expresión.

Como los términos inhomogéneos son polinomios de grado cero y 0 no es autovalor, buscamos una solución particular del sistema, de la forma

$$x_p(t) = a, \quad y_p(t) = b,$$

$$0 = 4a + 4b + 36, \quad 0 = -a + 8b + 9 \Rightarrow a = -7,\ b = -2,$$

$$x_p(t) = -7, \quad y_p(t) = -2,$$

con lo cual la solución general del sistema es

$$x(t) = 4k_1te^{6t} + 2k_2e^{6t} - 7, \quad y(t) = k_1(1+2t)e^{6t} + k_2e^{6t} - 2.$$

La solución particular que verifica $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$1 = 2k_2 - 7, \quad 1 = k_1 + k_2 - 2 \Rightarrow k_2 = 4, \ k_1 = -1,$$

$$x(t) = -4te^{6t} + 8e^{6t} - 7, \quad y(t) = -2te^{6t} + 3e^{6t} - 2. \ \square$$

Problema 2.23 *Resolver el sistema de ecuaciones $x' = 7x - 4y - e^t$, $y' = 2x + y + e^t$. Hallar la solución que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.*

Solución:

En forma matricial, el sistema se puede resolver

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^t \\ e^t \end{pmatrix} = AX + F(t),$$

si expresamos A en forma diagonal.

Para ello, calculamos sus autovalores,

$$0 = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 15 \Rightarrow \lambda = 3, 5,$$

y sus correspondientes autovectores.

Para $\lambda = 3$,

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Y para $\lambda = 5$,

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_5 \propto \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, una base de autovectores está formada por $B = \{v_3, v_5\}$ y la matriz de cambio de base será $P = (v_3, v_5)$ para obtener una matriz diagonal $D = \mathrm{diag}(3,5)$, $A = PDP^{-1}$,

$$W(t) = Pe^{Dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 2e^{5t} \\ e^{3t} & e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Así pues, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = W(t)K = \left\{ \begin{array}{l} x_h(t) = k_1e^{3t} + 2k_2e^{5t} \\ y_h(t) = k_1e^{3t} + k_2e^{5t} \end{array} \right. .$$

Sólo nos resta, pues, hallar una solución particular del sistema inhomogéneo. Como los términos inhomogéneos son de la forma e^t y 1 no es autovalor, tomamos

$$x_p(t) = ae^t, \quad y_p(t) = be^t,$$

que sustituidas en el sistema

$$(-a+7a-4b-1)e^t=0, \quad (-b+2a+b+1)e^t=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{2},\ b=-1,$$

nos proporcionan una solución particular,

$$x_p(t)=-\frac{e^t}{2}, \quad y_p(t)=-e^t,$$

y la solución general del sistema inhomogéneo,

$$x(t)=k_1e^{3t}+2k_2e^{5t}-\frac{e^t}{2}, \quad y(t)=k_1e^{3t}+k_2e^{5t}-e^t,$$

La solución particular que verifica $x(0)=0$, $y(0)=0$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$0=k_1+2k_2-\frac{1}{2}, \quad 0=k_1+k_2-1 \Rightarrow k_1=\frac{3}{2},\ k_2=-\frac{1}{2},$$

$$x(t)=\frac{3}{2}e^{3t}-e^{5t}-\frac{e^t}{2}, \quad y(t)=\frac{3}{2}e^{3t}-\frac{e^{5t}}{2}-e^t. \ \square$$

Problema 2.24 *Resolver el sistema $x'=2x+y$, $y'=3x+4y+e^t$. Hallar la solución que verifica $x(0)=0$, $y(0)=1$.*

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial,

$$X'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}=AX+F(t),$$

y calculamos los autovalores de A,

$$0=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+5 \Rightarrow \lambda=1,5,$$

y sus correspondientes autovectores.

Para $\lambda=5$,

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_5 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Y para $\lambda=1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, una base de autovectores está formada por $B=\{v_5,v_1\}$ y la matriz de cambio de base será $P=(v_5,v_1)$ para obtener una matriz diagonal $D=\mathrm{diag}(5,1)$, $A=PDP^{-1}$. Una matriz fundamental es

$$W(t)=Pe^{Dt}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{5t} & e^t \\ 3e^{5t} & -e^t \end{pmatrix}.$$

Así pues, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = W(t)K = \left\{ \begin{array}{l} x_h(t) = k_1 e^{5t} + k_2 e^t \\ y_h(t) = 3k_1 e^{5t} - k_2 e^t \end{array} \right. .$$

Como los términos inhomogéneos son de la forma e^t y 1 es autovalor simple, buscamos una solución de la forma $x_p(t) = e^t(At + B)$, $y_p(t) = e^t(Ct + D)$,

$$At + A + B = (2A + C)t + 2B + D, \quad Ct + C + D = (3A + 4C)t + 3B + 4D + 1,$$

$$A + C = 0, \; A = B + D, \; C = 3B + 3D + 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{4}, \; C = \frac{1}{4}, D = -B - \frac{1}{4},$$

con lo cual, tomando $B = 0$, la solución general del sistema inhomogéneo será

$$x(t) = k_1 e^{5t} + k_2 e^t - \frac{1}{4} t e^t, \quad y(t) = 3k_1 e^{5t} - k_2 e^t + \frac{1}{4}(t - 1)e^t.$$

La solución particular que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$0 = k_1 + k_2, \quad 1 = 3k_1 - k_2 - \frac{1}{4} \Rightarrow k_1 = \frac{5}{16}, \; k_2 = -\frac{5}{16},$$

$$x(t) = \frac{5}{16} e^{5t} - \frac{5}{16} e^t - \frac{1}{4} t e^t, \quad y(t) = \frac{15}{16} k_1 e^{5t} + \frac{1}{16} e^t + \frac{1}{4} t e^t. \; \square$$

Problema 2.25 *Resolver el sistema $x' = x + y$, $y' = x + y + t$.*

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial,

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = AX + F(t),$$

y calculamos los autovalores de A,

$$0 = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda \Rightarrow \lambda = 0, 2,$$

y sus correspondientes autovectores.

Para $\lambda = 2$,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Y para $\lambda = 0$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_0 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, una base de autovectores está formada por $B = \{v_2, v_0\}$ y la matriz de cambio de base será $P = (v_2, v_0)$ para obtener una matriz diagonal $D = \mathrm{diag}(2, 0)$, $A = PDP^{-1}$. Una matriz fundamental es

$$W(t) = Pe^{Dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 1 \\ e^{2t} & -1 \end{pmatrix}.$$

Así pues, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = W(t)K = \left\{ \begin{array}{l} x_h(t) = k_1 e^{2t} + k_2 \\ y_h(t) = k_1 e^{2t} - k_2 \end{array} \right. .$$

Como los términos inhomogéneos son polinomios de grado uno y 0 es autovalor simple, buscamos una solución de la forma $x(t) = At^2 + Bt + C$, $y(t) = Dt^2 + Et + F$,

$$2At+B = (A+D)t^2+(B+E)t+C+F, 2Dt+E = (A+D)t^2+(B+E+1)t+C+F,$$

$$A + D = 0,\ 2A = B + E,\ B = C + F,\ 2D = B + E + 1, E = C + F,$$

$$A = B = E = -D = -\frac{1}{4}, F = -\frac{1}{4} - C.$$

Escogemos una solución sencilla, tomando $C = 0$, con lo cual la solución general del sistema inhomogéneo es

$$x(t) = k_1 e^{2t} + k_2 - \frac{t^2 + t}{4}, \quad y(t) = k_1 e^{2t} - k_2 + \frac{t^2 - t - 1}{4}. \ \square$$

Problema 2.26 *Resolver el sistema $x' = 2x + y$, $y' = 3x + 4y + e^t$. Hallar la solución que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.*

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial,

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} = AX + F(t),$$

y calculamos los autovalores de A,

$$0 = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 \Rightarrow \lambda = 1, 5,$$

y sus correspondientes autovectores.

Para $\lambda = 5$,

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_5 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Y para $\lambda = 1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, una base de autovectores está formada por $B = \{v_5, v_1\}$ y la matriz de cambio de base será $P = (v_5, v_1)$ para obtener una matriz diagonal $D = \text{diag}(5, 1)$, $A = PDP^{-1}$. Una matriz fundamental es

$$W(t) = Pe^{Dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{5t} & e^t \\ 3e^{5t} & -e^t \end{pmatrix}.$$

Así pues, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = W(t)K = \left\{ \begin{array}{l} x_h(t) = k_1 e^{5t} + k_2 e^t \\ y_h(t) = 3k_1 e^{5t} - k_2 e^t \end{array} \right. .$$

Como los términos inhomogéneos son de la forma e^t y 1 es autovalor simple, buscamos una solución de la forma $x_p(t) = e^t(At + B)$, $y_p(t) = e^t(Ct + D)$,

$$At + A + B = (2A + C)t + 2B + D, \quad Ct + C + D = (3A + 4C)t + 3B + 4D + 1,$$

$$A + C = 0,\ A = B + D,\ C = 3B + 3D + 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{4},\ C = \frac{1}{4}, D = -B - \frac{1}{4},$$

con lo cual, tomando $B = 0$, la solución general del sistema inhomogéneo será

$$x(t) = k_1 e^{5t} + k_2 e^t - \frac{1}{4} t e^t, \quad y(t) = 3k_1 e^{5t} - k_2 e^t + \frac{1}{4}(t - 1)e^t.$$

La solución particular que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$0 = k_1 + k_2, \quad 1 = 3k_1 - k_2 - \frac{1}{4} \Rightarrow k_1 = \frac{5}{16},\ k_2 = -\frac{5}{16},$$

$$x(t) = \frac{5}{16} e^{5t} - \frac{5}{16} e^t - \frac{1}{4} t e^t, \quad y(t) = \frac{15}{16} k_1 e^{5t} + \frac{1}{16} e^t + \frac{1}{4} t e^t. \ \square$$

Problema 2.27 *Resolver el sistema de ecuaciones* $x' = -x + 3y + 5e^t$, $y' = 3x - y + 8$. *Hallar la solución que verifica* $x(0) = 0$, $y(0) = 1$. *Procedimiento alternativo de resolución: Despejar* y *de la primera ecuación y sustituirla en la segunda ecuación. Derivar la primera ecuación respecto a* t *y sustituir la* y' *que hemos obtenido. Debe quedar una ecuación de segundo orden para* x *solamente. Hallar la solución general de dicha ecuación. Acabar de resolver el sistema sustituyendo la solución general que acabamos de obtener en la expresión de* y.

Solución:

En forma matricial, el sistema se puede resolver

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5e^t \\ 8 \end{pmatrix} = AX + F(t),$$

si expresamos A en forma diagonal.

Para ello, calculamos sus autovalores,

$$0 = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 3 \\ 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 8 \Rightarrow \lambda = -4, 2,$$

y sus correspondientes autovectores.

Para $\lambda = -4$,

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_{-4} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Y para $\lambda = 2$,

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, una base de autovectores está formada por $B = \{v_{-4}, v_2\}$ y la matriz de cambio de base será $P = (v_{-4}, v_2)$ para obtener una matriz diagonal $D = \mathrm{diag}(-4, 2)$, $A = PDP^{-1}$,

$$W(t) = Pe^{Dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-4t} & e^{2t} \\ -e^{-4t} & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Así pues, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = W(t)K = \left\{ \begin{array}{l} x_h(t) = k_1 e^{-4t} + k_2 e^{2t} \\ y_h(t) = -k_1 e^{-4t} + k_2 e^{2t} \end{array} \right. .$$

Como los términos inhomogéneos son polinomios de grado cero y e^t y ni 1 ni 0 son autovalores, buscamos soluciones de la forma $x_p(t) = Ae^t + B$, $y_p(t) = Ce^t + D$, que sustituidas en el sistema,

$$0 = (-A - A + 3C + 5)e^t + (-B + 3D), \quad 0 = (-C + 3A - C)e^t + (3B - D + 8),$$

proporcionan las siguientes relaciones entre coeficientes,

$$-2A + 3C + 5 = 0, \quad -B + 3D = 0, \quad 3A - 2C = 0, \quad 3B - D + 8 = 0,$$

cuya solución es $A = -2$, $B = -3$, $C = -3$, $D = -1$, con lo cual la solución general del sistema inhomogéneo es

$$x(t) = k_1 e^{-4t} + k_2 e^{2t} - 2e^t - 3, \quad y(t) = -k_1 e^{-4t} + k_2 e^{2t} - 3e^t - 1.$$

La solución particular que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$0 = k_1 + k_2 - 5, \quad 1 = -k_1 + k_2 - 4 \Rightarrow k_1 = 0,\ k_2 = 5,$$

$$x(t) = 5e^{2t} - 2e^t - 3, \quad y(t) = 5e^{2t} - 3e^t - 1.$$

Vamos a resolver el sistema sin matrices ni autovalores, reduciéndolo a una ecuación lineal de segundo orden. Despejamos y de la primera ecuación y sustituimos en la segunda ecuación,

$$y = \frac{x' + x - 5e^t}{3}, \quad y' = 3x - y + 8 = \frac{-x' + 8x + 5e^t}{3} + 8,$$

derivamos la primera ecuación,

$$x'' = -x' + 3y' + 5e^t = -2x' + 8x + 10e^t + 24,$$

con lo que obtenemos una ecuación lineal de segundo orden para x,

$$x'' + 2x' - 8x = 10e^t + 24 = f(t). \ \square$$

La ecuación homogénea la podemos resolver por el procedimiento habitual de buscar soluciones de la forma $x(t) = e^{\lambda t}$, lo que conduce a la ecuación característica,

$$0 = \lambda^2 + 2\lambda - 8 \Rightarrow \lambda = -4, 2 \Rightarrow x_h(t) = k_1 e^{-4t} + k_2 e^{2t},$$

y como solución particular de la ecuación inhomogénea, buscamos una de la forma $x_p(t) = Ae^t + B$, que sustituida en la ecuación,

$$(A + 2A - 8A - 10)e^t + (-8B - 24) = 0 \Rightarrow A = -2,\ B = -3,$$

nos proporciona la solución general de la ecuación,

$$x(t) = k_1 e^{-4t} + k_2 e^{2t} - 2e^t - 3.\ \Box$$

Para completar la solución del sistema, sólo tenemos que sustituir

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{x' + x - 5e^t}{3} = \frac{-4k_1 e^{-4t} + 2k_2 e^{2t} - 2e^t}{3} + \frac{k_1 e^{-4t} + k_2 e^{2t} - 2e^t - 3}{3} \\ &- \frac{5e^t}{3} = -k_1 e^{-4t} + k_2 e^{2t} - 3e^t - 1, \end{aligned}$$

que obviamente coincide con la solución general que hemos obtenido por métodos matriciales. $\Box$

Problema 2.28 *Estudiar si* $x(t) = t$ *es solución de la ecuación* $t^2 x'' - t(t + 2)x' + (t + 2)x = 0$. *Usar el resultado para reducir el orden de la ecuación y resolverla.*

Solución:

Como la ecuación es lineal, basta considerar $x(t) = t$. Sustituimos $x' = 1$, $x'' = 0$ en la ecuación,

$$-t(t + 2) + (t + 2)t = 0,$$

luego $x(t) = k_1 t$ son soluciones de la ecuación.

Realizamos el cambio $x(t) = ty(t)$ para reducir el orden, $x' = ty' + y$, $x'' = ty'' + 2y'$,

$$0 = t^3 y'' + 2t^2 y' - t^2(t + 2)y' \Rightarrow y'' - y' = 0 \Rightarrow y(t) = k_1 + k_2 e^t.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación es

$$x(t) = ty(t) = k_1 t + k_2 t e^t.\ \Box$$

Problema 2.29 *Estudiar si* $x(t) = 1/t$ *es solución de la ecuación* $tx'' + (t + 2)x' + x = 0$. *Usar el resultado para reducir el orden de la ecuación y resolverla.*

Solución:

Como la ecuación es lineal, basta considerar $x(t) = 1/t$. Sustituimos $x' = -t^{-2}$, $x'' = 2t^{-3}$ en la ecuación,

$$2t^{-2} - t^{-1} - 2t^{-2} + t^{-1} = 0,$$

luego $x(t) = k_1/t$ son soluciones de la ecuación.

Realizamos el cambio $x(t) = y(t)/t$ para reducir el orden, $x' = y'/t - y/t^2$, $x'' = y''/t - 2y'/t^2 + 2y/t^3$,

$$0 = y'' - \frac{2y'}{t} + y' + \frac{2y'}{t} \Rightarrow y'' + y' = 0 \Rightarrow y(t) = k_1 + k_2 e^{-t}.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación es

$$x(t) = \frac{y(t)}{t} = \frac{k_1}{t} + k_2 \frac{e^{-t}}{t}. \ \square$$

Problema 2.30 *Resolver la ecuación $x'' - 2x' + x = 1$. Obtener la solución que verifica $x(0) = 0 = x'(0)$.*

Solución:

Calculamos los autovalores de la ecuación homogénea,

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ doble},$$

con lo cual la solución general de la ecuación homogénea es

$$x(t) = k_1 t e^t + k_2 e^t.$$

Obtenemos una solución particular de la ecuación inhomogénea de la forma $x_p(t) = A$, ya que 0 no es autovalor y el término inhomogéneo es un polinomio de grado cero,

$$A = 1 \Rightarrow x(t) = k_1 t e^t + k_2 e^t + 1. \ \square$$

La solución que verifica $x(0) = 0 = x'(0)$ es

$$0 = k_2 + 1, \quad 0 = k_1 + k_2 \Rightarrow k_1 = 1, \ k_2 = -1 \Rightarrow x(t) = te^t - e^t + 1. \ \square$$

Problema 2.31 *Resolver la ecuación $x'' + 4x = \cos t$.*

Solución:

Calculamos los autovalores de la ecuación homogénea,

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i,$$

con lo cual la solución general de la ecuación homogénea es

$$x(t) = k_1 \cos 2t + k_2 \sin 2t.$$

Obtenemos una solución particular de la ecuación inhomogénea de la forma $x_p(t) = A\cos t + B \sin t$, ya que $\pm i$ no son autovalores y el término inhomogéneo es de la forma $\cos t$,

$$(3A - 1)\cos t + 3B \sin t = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{3}, \ B = 0,$$

$$x(t) = k_1 \cos 2t + k_2 \sin 2t + \frac{1}{3}\cos t. \ \square$$

Problema 2.32 *Resolver la ecuación* $x'' - x = t^2 e^t$.

Solución:

Calculamos los autovalores de la ecuación homogénea,

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1,$$

con lo cual la solución general de la ecuación homogénea es

$$x(t) = k_1 e^t + k_2 e^{-t}.$$

Obtenemos una solución particular de la ecuación inhomogénea de la forma $x_p(t) = At^3 e^t + Bt^2 e^t + Cte^t$, ya que 1 es autovalor simple y el término inhomogéneo es de la forma $t^2 e^t$,

$$(6A - 1)t^2 + (4B + 6A)t + 2(C + B) = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{6},\ B = -\frac{1}{4},\ C = \frac{1}{4},$$

$$x(t) = k_1 e^t + k_2 e^{-t} + \frac{1}{6}t^3 e^t - \frac{1}{4}t^2 e^t + \frac{1}{4}te^t. \ \square$$

Problema 2.33 *Resolver la ecuación* $x'' + x = \sec t$.

Solución:

La solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = k_1 \cos t + k_2 \sin t,$$

y buscamos una solución de la ecuación inhomogénea por el método de variación de constantes.

El wronskiano de las soluciones $x_1(t) = \cos t$, $x_2(t) = \sin t$ es

$$W(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \Rightarrow |W(t)| = 1,$$

con lo cual una solución particular nos la da la primera fila de la expresión,

$$\begin{aligned} x_p(t) &= -x_1(t) \int \frac{x_2(t) f(t)}{|W(t)|}\, dt + x_2(t) \int \frac{x_1(t) f(t)}{|W(t)|}\, dt \\ &= -\cos t \int \tan t\, dt + \sin t \int dt = \cos t \ln|\cos t| + t \sin t, \end{aligned}$$

y la solución general de la ecuación inhomogénea es, pues,

$$x(t) = k_1 \cos t + k_2 \sin t + \cos t \ln|\cos t| + t \sin t. \ \square$$

Problema 2.34 *Resolver la ecuación* $t^2 x'' + tx' - x = 0$.

Solución:

Es una ecuación de Euler, que se reduce a una ecuación lineal con el cambio $t = e^u$,

$$\ddot{x} - x = 0 \Rightarrow x(u) = k_1 e^u + k_2 e^{-u} \Rightarrow x(t) = k_1 t + \frac{k_2}{t}. \ \square$$

Problema 2.35 *Resolver la ecuación* $tx'' - tx' + x = t$.

Solución:

Es una ecuación lineal, pero no de coeficientes constantes, así que es preciso obtener dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea, $tx'' - tx' + x = 0$.

Comprobamos que $x(t) = t$ es solución, con lo cual con el cambio $x = yt$ podemos rebajar el orden de la ecuación, $z = y'$,

$$y'' + \left(\frac{2}{t} - 1\right) y' = \frac{1}{t} \Rightarrow z' + \left(\frac{2}{t} - 1\right) z = \frac{1}{t},$$

que se puede resolver porque sigue siendo lineal. La solución de la ecuación homogénea es

$$z(t) = k_1 e^{\int (1-2/t)\,dt} = k_1 e^{t-2\ln|t|} = \frac{k_1}{t^2} e^t,$$

y por el método de Lagrange buscamos una solución particular de la inhomogénea, $z_p(t) = k(t)e^t/t^2$,

$$k'(t) = te^{-t} \Rightarrow k(t) = -te^{-t} - e^{-t} \Rightarrow z_p(t) = -\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2},$$

y con esta información obtenemos la solución general para y,

$$y'(t) = z(t) = \frac{k_1}{t^2} e^t - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \Rightarrow y(t) = k_2 + k_1 \int \frac{dt}{t^2} e^t - \ln|t| + \frac{1}{t},$$

y, por tanto, la solución general de la ecuación es

$$x(t) = y(t)t = k_2 t + k_1 t \int \frac{dt}{t^2} e^t - t\ln|t| + 1. \ \Box$$

Problema 2.36 *Resolver la ecuación* $x^{IV)} - 4x' + 3x = \cos t$.

Solución:

Es una ecuación lineal de coeficientes constantes, con lo cual sus soluciones son de forma exponencial. La ecuación característica es

$$\lambda^4 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 1, -1 \pm \sqrt{2} i,$$

y, por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = k_1 te^t + k_2 e^t + k_3 e^{-t} \cos\sqrt{2}t + k_4 e^{-t} \sin\sqrt{2}t.$$

Buscamos una solución particular de la forma $x_p(t) = A\cos t + B\sin t$, ya que $\pm i$ no son autovalores y el término inhomogéneo es de la forma $\cos t$,

$$(4A - 4B - 1)\cos t + 4(A + B)\sin t = 0 \Rightarrow A = -B = \frac{1}{8},$$

$$x(t) = k_1 te^t + k_2 e^t + k_3 e^{-t} \cos\sqrt{2}t + k_4 e^{-t} \sin\sqrt{2}t + \frac{1}{8}\cos t - \frac{1}{8}\sin t. \ \Box$$

Problema 2.37 *Resolver la ecuación* $x^{IV)} - x = t^3 + t^2 + t + 1$.

Solución:

La ecuación característica de la ecuación es

$$0 = \lambda^4 - 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1, \pm i,$$

por lo que la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^t + k_3 \cos t + k_4 \sin t.$$

Buscamos una solución particular de la ecuación inhomogénea de la forma $x_p(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D$, ya que 0 no es autovalor y el término inhomogéneo es un polinomio de grado tres,

$$-At^3 - Bt^2 - Ct + D = x^{IV)} - x = t^3 + t^2 + t + 1 \Rightarrow A = B = C = D = -1,$$

con lo cual la solución general de la ecuación es

$$x(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^t + k_3 \cos t + k_4 \sin t - t^3 - t^2 - t - 1. \ \square$$

Problema 2.38 *Resolver la ecuación* $x''' - 6x'' + 9x' = 1$.

Solución:

La ecuación característica de la ecuación es

$$0 = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda - 3)^2 \Rightarrow \lambda = 0, 3 \text{ doble},$$

por lo que la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = k_1 + k_2 e^{3t} + k_3 t e^{3t}.$$

Buscamos una solución particular de la ecuación inhomogénea de la forma $x_p(t) = At$, ya que $\lambda = 0$ es autovalor simple y, por tanto, $x(t) = k$ es solución de la ecuación homogénea,

$$9A = x_p''' - 6x_p'' + 9x_p' = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{9},$$

con lo cual la solución general de la ecuación es

$$x(t) = k_1 + k_2 e^{3t} + k_3 t e^{3t} + \frac{t}{9}. \ \square$$

Problema 2.39 *Resolver la ecuación* $x''' - x = e^t$.

Solución:

Resolvemos la ecuación característica,

$$\lambda^3 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = k_1 e^t + k_2 e^{-t/2}\cos(\sqrt{3}t/2) + k_3 e^{-t/2}\sin(\sqrt{3}t/2).$$

Como solución particular de la ecuación inhomogénea probamos $x_p(t) = ate^t$, ya que $\lambda = 1$ es autovalor simple,

$$x_p''' - x - e^t = te^t(a-a) + e^t(3a-1) \Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow x_p(t) = \frac{te^t}{3},$$

con lo cual la solución general de la ecuación es

$$x(t) = k_1 e^t + k_2 e^{-t/2}\cos(\sqrt{3}t/2) + k_3 e^{-t/2}\sin(\sqrt{3}t/2) + \frac{te^t}{3}. \square$$

Problema 2.40 *Resolver la ecuación* $x^{IV)} + 2x'' + x = e^{-t}$.

Solución:

Resolvemos la ecuación característica,

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2+1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i \text{ dobles}.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = k_1 \cos t + k_2 t\cos t + k_3 \sin t + k_4 t \sin t.$$

Como solución particular de la ecuación inhomogénea probamos $x_p(t) = ae^{-t}$, ya que -1 no es autovalor y el término inhomogéneo es de la forma e^{-t},

$$x^{IV)} + 2x'' + x - e^{-t} = e^{-t}(a + 2a + a - 1) \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow x_p(t) = \frac{e^{-t}}{4},$$

con lo cual la solución general de la ecuación es

$$x(t) = k_1 \cos t + k_2 t\cos t + k_3 \sin t + k_4 t \sin t + \frac{e^{-t}}{4}. \square$$

Problema 2.41 *Resolver la ecuación* $x^{IV)} - 5x'' + 4x = 6e^t$.

Solución:

La ecuación característica es $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0$, con lo cual los autovalores son $\lambda = \pm 1, \pm 2$ y la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^t + k_3 e^{-2t} + k_4 e^{2t}.$$

Como el término homogéneo es de la forma e^t y 1 es autovalor, buscamos soluciones de la forma $x_p(t) = Ate^t$, que sustituida en la ecuación,

$$0 = (A - 5A + 4A)te^t + (4A - 10A - 6)e^t \Rightarrow A = -1,$$

nos proporciona una solución particular $x_p(t) = -te^t$, y la solución general de la ecuación,

$$x(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^t + k_3 e^{-2t} + k_4 e^{2t} - te^t. \square$$

Problema 2.42 *Resolver la ecuación* $x^{IV)} + 4x = 10\cos t - 15\sin t$.

Solución:

La ecuación homogénea tiene por ecuación característica

$$\lambda^4 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm i,\ -1 \pm i,$$

con lo cual la solución general de esta ecuación es

$$x_h(t) = k_1 e^t \cos t + k_2 e^t \sin t + k_3 e^{-t} \cos t + k_4 e^{-t} \sin t.$$

Como $\pm i$ no son autovalores, buscamos soluciones particulares de la forma $x_p(t) = a\cos t + b\sin t$, que sustituida en la ecuación,

$$0 = x_p^{IV)} + 4x_p - 10\cos t + 15\sin t = (5a - 10)\cos t + (5b + 15)\sin t,$$

de donde concluimos que $a = 2$, $b = -3$, $x_p(t) = 2\cos t - 3\sin t$, y la solución general es

$$x(t) = k_1 e^t \cos t + k_2 e^t \sin t + k_3 e^{-t} \cos t + k_4 e^{-t} \sin t + 2\cos t - 3\sin t. \ \square$$

Problema 2.43 *Resolver la ecuación* $t^2 x'' - 3tx' + 3x = t^2$.

Solución:

La ecuación es de Euler y con el cambio $t = e^u$ se convierte en una ecuación lineal con coeficientes constantes, $tx' = \dot{x}$, $t^2 x'' = \ddot{x} - \dot{x}$,

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = e^{2u}.$$

La ecuación característica para la ecuación homogénea es

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 3,$$

y, por tanto, su solución general es $x_h(u) = k_1 e^u + k_2 e^{3u}$.

Como solución de la ecuación inhomogénea probamos $x_p(u) = ae^{2u}$, ya que 2 no es autovalor y el término inhomogéneo es de la forma e^{2u}. Sustituida en la ecuación,

$$0 = \ddot{x}_p(u) - 4\dot{x}_p(u) + 3x_p(u) - e^{2u} = (-a - 1)e^{2u} \Rightarrow a = -1,$$

nos proporciona una solución particular, $x_p(u) = -e^{2u}$, y la solución general de la ecuación,

$$x(u) = k_1 e^u + k_2 e^{3u} - e^{2u} = k_1 t + k_2 t^3 - t^2. \ \square$$

Problema 2.44 *Estudiar las soluciones de la ecuación del oscilador armónico con rozamiento,* $mx'' + \mu x' + kx = f(t)$*, en ausencia de fuerzas externas,* $f(t) = 0$*, donde* m *es la masa del resorte,* $\mu \geq 0$ *es el coeficiente de rozamiento y* $k > 0$ *es la constante elástica del oscilador. Estudiar el caso de oscilaciones forzadas,* $f(t) = A\sin\Omega t$.

Solución:

Buscamos soluciones exponenciales. Para ello, resolvemos la ecuación característica,

$$m\lambda^2 + \mu\lambda + k = 0 \Rightarrow \lambda_\pm = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4mk}}{2m},$$

que nos permiten distinguir cuatro casos, según los valores de μ y del discriminante, $\Delta = \mu^2 - 4mk$, de la ecuación:

- $\Delta > 0$: Las dos soluciones son reales y negativas. Por tanto, la solución general es
$$x(t) = k_1 e^{\lambda_- t} + k_2 e^{\lambda_+ t},$$
y el oscilador, sea cual sea su posición inicial, no oscila, sino que decae exponencialmente con el tiempo a la posición de equilibrio, $x = 0$.

- $\Delta = 0$: Corresponde al amortiguamiento crítico $\mu_c = 2\sqrt{mk}$. El autovalor es doble $\lambda = -\mu_c/2m$ y la solución general de la ecuación es
$$x(t) = k_1 t e^{-\mu_c t/2m} + k_2 e^{-\mu_c t/2m}.$$
Igual que en el caso anterior, el oscilador, sea cual sea su posición inicial, no oscila, sino que decae exponencialmente con el tiempo a la posición de equilibrio, $x = 0$.

- $\Delta < 0$: Los autovalores son complejos conjugados $\lambda_\pm = -\mu/2m \pm i\omega$, $\omega = \sqrt{-\Delta})/2m$. La solución general de la ecuación es
$$x(t) = k e^{-\mu t/2m} \sin\left(\omega t - \varphi\right),$$
y el oscilador oscila amortiguadamente, por el factor exponencial, con frecuencia ω.

- $\mu = 0$: Los autovalores son imaginarios puros $\lambda = \pm i\omega$, $\omega = \sqrt{k/m}$, y las soluciones son periódicas con frecuencia ω,
$$x(t) = k \sin\left(\omega t - \varphi\right).$$

Por tanto, para $\mu \geq \mu_c$ no hay oscilaciones. En todos los casos con $\mu \neq 0$ el amortiguamiento provoca que el oscilador tienda al equilibrio, $x = 0$, a medida que avanza el tiempo.

Si el oscilador está sometido a una fuerza externa sinusoidal, $f(t) = A \sin \Omega t$, calculamos una solución particular de la ecuación inhomogénea. Se presentan tres casos:

- $\mu \neq 0$: Caso amortiguado: Buscamos una solución particular de la forma $B \sin(\Omega t - \phi)$,
$$(k - m\Omega^2) B \sin(\Omega t - \phi) + \mu\Omega B \cos(\Omega t - \phi) = A \sin \Omega t \Rightarrow$$
$$(k - m\Omega^2) B \cos\phi + \mu\Omega B \sin\phi = A, \quad (k - m\Omega^2)\sin\phi = \mu\Omega\cos\phi \Rightarrow$$
$$\tan\phi = \frac{\mu\Omega}{k - m\Omega^2} \quad B = \frac{A}{(k - m\Omega^2)\cos\phi + \mu\Omega\sin\phi},$$
con lo cual, tras un transitorio amortiguado por las exponenciales de decrecientes, la solución tiende a una periódica con frecuencia Ω.

- $\mu = 0$, $\Omega \neq \sqrt{k/m} = \omega$: Buscamos una solución particular de la forma $B\sin(\Omega t - \phi)$,

  $$(k - m\Omega^2)B\sin(\Omega t - \phi) = A\sin\Omega t \Rightarrow \phi = 0, \quad B = \frac{A}{k - m\Omega^2}.$$

  La solución general de la ecuación es, pues,

  $$x(t) = \frac{A}{k - m\Omega^2}\sin\Omega t + k\sin(\omega t - \varphi),$$

  es decir, se superponen, en general, un movimiento periódico forzado de frecuencia Ω con el movimiento periódico natural de frecuencia ω.

- $\mu = 0$, $\Omega = \sqrt{k/m} = \omega$: Buscamos una solución particular de la forma $Bt\cos(\Omega t - \phi)$,

  $$-2m\Omega B\sin(\Omega t - \phi) = A\sin\Omega t \Rightarrow \phi = 0, \quad B = -\frac{A}{2m\Omega}.$$

  La solución general de la ecuación es, pues,

  $$x(t) = -\frac{A}{2m\Omega}t\cos\Omega t + k\sin(\omega t - \varphi),$$

  es decir, las oscilaciones forzadas no acotadas de frecuencia Ω se imponen en amplitud a medida que crece t a las osculaciones naturales de frecuencia ω. Este fenómeno se denomina resonancia.