Capítulo 3

Transformada de Laplace

Problema 3.1 *Calcular la tranformada de Laplace de la función característica del intervalo* $[a,b]$, $\chi_{[a,b]}(t) = 1$ *si* $t \in [a,b]$, $\chi_{[a,b]}(t) = 0$ *si* $t \notin [a,b]$.

Solución:

Calculamos directamente la transformada,

$$X_{[a,b]}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\chi_{[a,b]}(t)\,dt = \int_a^b e^{-st}\,dt = -\left[\frac{e^{-st}}{s}\right]_a^b = \frac{e^{-as}-e^{-bs}}{s}. \ \square$$

Problema 3.2 *Calcular la transformada de Laplace de las funciones* $f(t) = \sinh at$, $g(t) = \cosh at$.

Solución:

Teniendo en cuenta que la transformada de e^{at} es $1/(s-a)$, como $\sinh at = (e^{at} - e^{-at})/2$,

$$F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right\} = \frac{a}{s^2-a^2}. \ \square$$

Del mismo modo, como $\cosh at = (e^{at} + e^{-at})/2$,

$$G(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right\} = \frac{s}{s^2-a^2}. \ \square$$

Ambas expresiones son válidas para $|s| < a$.

Problema 3.3 *Demostrar que si la transformada de Laplace de la función* $f(t)$ *es* $F(s)$, *entonces la transformada de la función* $g(t) = f(at)$, $a > 0$, *es* $G(s) = F(s/a)/a$.

Solución:

Hacemos el cambio de variable $x = at$,

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(at)\,dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty dx\, e^{-sx/a} f(x) = \frac{1}{a}F(s/a). \ \square$$

Problema 3.4 *Calcular la transformada de la función* $f(t) = \int_0^t t \sin t \, dt$.

Solución:

La calculamos en varios pasos. En primer lugar, conocida la transformada de la función $g(t) = \sin t$, la transformada de $h(t) = t \sin t$ es trivial,

$$H(s) = -G'(s) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} = \frac{2s}{(s^2+1)^2},$$

y la transformada de la primitiva de h se obtiene también sin integrar,

$$F(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{2}{(s^2+1)^2},$$

para todo valor de s. □

Obviamente, también podía haberse obtenido a partir del valor de $f(t)$,

$$f(t) = \int_0^t t \sin t \, dt = \sin t - t \cos t$$

y transformando término a término, ya que se trata de funciones sencillas,

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1-s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{2}{(s^2+1)^2}.$$

Problema 3.5 *Calcular la transformada de la función* $f(t) = (e^{-t} - e^{-2t})/t$.

Solución:

Como existe el límite

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - t - (1-2t)}{t} = 1,$$

podemos aplicar la fórmula de división, aplicada a $g(t) = e^{-t} - e^{-2t}$,

$$G(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2},$$

$$F(s) = \int_s^\infty G(s)\, ds = \int_s^\infty \left\{ \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right\} ds = \left[\ln \frac{s+1}{s+2} \right]_s^\infty = \ln \frac{s+2}{s+1},$$

para $s > -1$. □

Problema 3.6 *Obtener la transformada de Laplace de la función* $h(t) = te^t \sin t$.

Solución:

Podemos realizarla de dos maneras: o bien consideramos $h(t) = e^t g(t)$ con $g(t) = tf(t)$, $f(t) = \sin t$. Como $F(s) = 1/(s^2+1)$,

$$G(s) = -F'(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2} \Rightarrow H(s) = G(s-1) = \frac{2(s-1)}{((s-1)^2+1)^2}. \ \square$$

O bien consideramos $h(t) = tg(t)$ con $g(t) = e^t f(t)$, $f(t) = \sin t$,

$$G(s) = F(s-1) = \frac{1}{(s-1)^2+1} \Rightarrow H(s) = -G'(s) = \frac{2(s-1)}{((s-1)^2+1)^2}. \ \square$$

Problema 3.7 *Calcular la transformada de Laplace de la función f que toma valores $f(t) = t$ para $t < 1$ y $f(t) = 2t + 1$ para $t \geq 1$. Calcular la transformada de $f'(t)$.*

La función es discontinua, ya que presenta un salto en $t = 1$. Podemos calcular la transformada directamente,

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^1 e^{-st} t\,dt + \int_1^\infty e^{-st}(2t+1)\,dt = -\left[\frac{st+1}{s^2}e^{-st}\right]_0^1 \\ &- \left[\frac{2st+s+2}{s^2}e^{-st}\right]_1^\infty = \frac{1+e^{-s}+2se^{-s}}{s^2}. \ \square \end{aligned}$$

Aunque es más efectivo expresarla con funciones paso,

$$f(t) = t + (t-1+2)\theta(t-1) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{2s+1}{s^2}e^{-s},$$

teniendo en cuenta que la transformada de $h(t-1)\theta(t-1)$ es $H(s)e^{-s}$.

Por su parte, denotando

$$g(t) = f'(t) = 1 + \theta(t-1) + (t+1)\delta(t-1) = 1 + \theta(t-1) + 2\delta(t-1),$$

podemos calcular su transformada de Laplace,

$$G(s) = \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s} + 2e^{-s}. \ \square$$

Obsérvese que, a pesar de que $f(t)$ no es una función derivable, la transformada de su derivada se rige por la fórmula

$$G(s) = sF(s) - f(0) = \frac{1+e^{-s}+2se^{-s}}{s}.$$

Problema 3.8 *Calcular la transformada de Laplace de la función $f(t) = \ln t$, sabiendo que la integral $\int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx = -\gamma$, siendo γ la constante llamada gamma de Euler. ¿Y la de $g(t) = t\ln t$?*

Solución:

La calculamos directamente, haciendo el cambio de variable $x = st$, para $s > 0$, y usando la definición de γ,

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\ln t\,dt = \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-x}\ln\frac{x}{s}\,dx \\ &= \frac{1}{s}\left\{\int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx - \ln s\int_0^\infty e^{-x}\,dx\right\} = -\frac{\gamma+\ln s}{s}. \ \square \end{aligned}$$

Obviamente, $F(s)$ está definida sólo para $s > 0$, ya que para $s \leq 0$ la integral no es convergente.

La transformada de $g(t)$ se obtiene a partir de la transformada de $f(t)$ directamente,

$$G(s) = -F'(s) = \frac{1-\gamma-\ln s}{s^2}. \ \square$$

Del mismo modo la transformada de $h(t) = t^n \ln t$,

$$H(s) = (-1)^n F^{n)}(s).$$

Problema 3.9 *Calcular la transformada de Laplace de la función $f(t) = |\sin t|$.*

Solución:

La función es periódica de periodo $T = \pi$. Por tanto, para conocer su transformada, sólo es preciso conocer el valor de la integral en un periodo,

$$\int_0^{\pi} e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^{\pi} e^{-st} \sin t\,dt = -\left[\frac{e^{-st}(\cos t + s\sin t)}{s^2+1}\right]_0^{\pi} = \frac{e^{-\pi s}+1}{s^2+1},$$

ya que la transformada de una función períodica está regida por la expresión,

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \frac{e^{-\pi s}+1}{s^2+1} \\ &= \frac{e^{\pi s/2}+e^{-\pi s/2}}{e^{\pi s/2}-e^{-\pi s/2}} \frac{1}{s^2+1} = \frac{\coth(\pi s/2)}{s^2+1}. \ \square \end{aligned}$$

Problema 3.10 *Hallar la transformada de Laplace de $f(t) = \int_0^t \frac{\sin^2 t}{t}\,dt$.*

Solución:

Comenzamos por la transformada de la función $g(t) = \sin^2 t = (1-\cos 2t)/2$,

$$G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right).$$

Por tanto, la transformada de $h(t) = g(t)/t$, teniendo en cuenta que $h(0)$ está bien definido, es

$$\begin{aligned} H(s) &= \int_s^{\infty} G(s)\,ds = \frac{1}{2}\int_s^{\infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right) ds = \frac{1}{2}\left[\ln \frac{s}{\sqrt{s^2+4}}\right]_s^{\infty} ds \\ &= -\frac{1}{2} \ln \frac{s}{\sqrt{s^2+4}}. \end{aligned}$$

Finalmente, como $f(t)$ es primitiva de $h(t)$,

$$F(s) = \frac{H(s)}{s} = -\frac{1}{2s} \ln \frac{s}{\sqrt{s^2+4}} = \frac{1}{2s} \ln \frac{\sqrt{s^2+4}}{s}. \ \square$$

Problema 3.11 *¿De qué función es transformada de Laplace $F(s) = 1/(s^2+1)^2$?*

Solución:

La función $F(s)$ no es transformada elemental de ninguna función conocida, pero la podemos escribir como

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} = -\frac{G'(s)}{2s}, \quad G(s) = -\frac{1}{s^2+1}.$$

Sabemos que $G(s)$ es la transformada de $g(t) = -\sin t$, $G'(s)$ es la transformada de $-tg(t)$ y, por tanto $G'(s)/s$ es la transformada de una primitiva de $-tg(t)$. Así pues,

$$f(t) = \frac{1}{2}\int_0^t t\sin t\,dt = \frac{\sin t - t\cos t}{2}. \ \square$$

Otra manera de llegar a este resultado, más elaborada, sería tener en cuenta que $F(s) = H^2(s)$ con $h(t) = \sin t$. Por tanto, F es la transformada del producto de convolución de h consigo misma,

$$\begin{aligned} f(t) &= \big(h * h\big)(t) = \int_0^t h(u)h(t-u)\,du = \int_0^t \sin u \sin(t-u)\,du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t (\cos(2u-t) - \cos t)\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2u-t)}{2} - u\cos t\right]_0^t \\ &= \frac{\sin t - t\cos t}{2}. \end{aligned}$$

Problema 3.12 *Hallar la transformada inversa de Laplace de* $G(s) = 1/(s^4 - 1)$.

Solución:

Descomponemos la función en fracciones simples,

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s+1)(s-1)} = \frac{1/4}{s-1} - \frac{1/4}{s+1} - \frac{1/2}{s^2+1},$$

lo que conduce a la transformación inmediata,

$$f(t) = \frac{e^t}{4} - \frac{e^{-t}}{4} - \frac{\sin t}{2} = \frac{\sinh t - \sin t}{2}. \ \square$$

Problema 3.13 *Resolver el problema de valores iniciales* $x''' + x' = e^t$ *con* $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

Solución:

Transformamos la ecuación,

$$s^3X(s) + sX(s) = \frac{1}{s-1} \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s(s-1)(s^2+1)}.$$

Para recuperar la expresión de $x(t)$ por transformada inversa, es preferible descomponer $X(s)$ en fracciones simples,

$$X(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{s-1}{s^2+1} \Rightarrow x(t) = -1 + \frac{e^t}{2} + \frac{\cos t}{2} - \frac{\sin t}{2}. \ \square$$

Más eficiente hubiera sido reducir de antemano el orden de la ecuación mediante el cambio $y = x'$,

$$y'' + y = e^t \Rightarrow s^2Y(s) + Y(s) = \frac{1}{s-1},$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{s+1}{s^2+1} \Rightarrow x'(t) = y(t) = \frac{e^t}{2} - \frac{\sin t}{2} - \frac{\cos t}{2},$$

$$x(t) = k + \frac{e^t}{2} + \frac{\cos t}{2} - \frac{\sin t}{2},$$

y la constante k la obtenemos de la condición $x(0) = 0$, es decir, $k = -1$.

Este problema podría resolverse asimismo de manera directa, mediante el cambio $y = x'$ para la ecuación homogénea,

$$y'' + y = 0 \Rightarrow x'_h(t) = y(t) = k_1 \cos t + k_2 \sin t \Rightarrow x(t) = k_3 + k_1 \sin t - k_2 \cos t.$$

Una solución particular de la forma $x_p(t) = Ae^t$ es fácil de encontrar,

$$2A = 1 \Rightarrow x(t) = k_3 + k_1 \sin t - k_2 \cos t + \frac{e^t}{2},$$

y sólo resta imponer las condiciones iniciales,

$$0 = k_3 - k_2 + \frac{1}{2}, \quad 0 = k_1 + \frac{1}{2}, \quad 0 = k_2 + \frac{1}{2} \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{2} = k_2,\ k_3 = -1,$$

$$x(t) = -1 - \frac{\sin t}{2} + \frac{\cos t}{2} + \frac{e^t}{2}.$$

Problema 3.14 *Resolver el problema de valores iniciales* $x'' + 2x' + 5x = f(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, *donde* $f(t) = 1$ *para* $t \in [1, 2)$ *y* $f(t) = 0$ *para* $t \notin [1, 2)$.

Solución:

La función discontinua $f(t)$ la podemos escribir usando la función paso,

$$f(t) = \theta(t - 1) - \theta(t - 2).$$

Por tanto, podemos transformar la ecuación, usando las condiciones iniciales,

$$(s^2 X(s) - 1) + 2sX(s) + 5X(s) = \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s} \Rightarrow X(s) = \frac{s + e^{-s} - e^{-2s}}{s(s^2 + 2s + 5)},$$

que nos permite despejar la transformada de la solución.

Todo se reduce, pues, a hallar la transformada inversa de cada uno de los sumandos que componen $X(s)$.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{(s+1)^2 + 4} \Rightarrow g(t) = \frac{e^{-t}}{2} \sin 2t.$$

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s} - \frac{(s+1) + 1}{(s+1)^2 + 4}\right) \Rightarrow$$
$$h(t) = \frac{1}{5}\left\{1 - e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\right\}.$$

Por tanto, la solución del problema es

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{e^{-t}}{2}\sin 2t + \frac{\theta(t-1)}{5}\left\{1 - e^{-(t-1)}\left(\cos 2(t-1) + \frac{1}{2}\sin 2(t-1)\right)\right\} \\ &- \frac{\theta(t-2)}{5}\left\{1 - e^{-(t-2)}\left(\cos 2(t-2) + \frac{1}{2}\sin 2(t-2)\right)\right\}. \ \square \end{aligned}$$

Problema 3.15 *Resolver el problema de valores iniciales,* $x'' + x' = f(t)$, $f(t) = t + 1$ *para* $t \in [0, 1]$, $f(t) = 3 - t$, $t \geq 1$, *con* $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.

Solución:

La función $f(t)$ se puede expresar con funciones paso,

$$f(t) = t + 1 - 2(t-1)\theta(t-1),$$

lo cual facilita calcular la transformada de Laplace de la ecuación,

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + sX(s) - x(0) = (s+1)\left(sX(s)+1\right) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{2e^{-s}}{s^2},$$

de donde podemos despejar $X(s)$,

$$X(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^3} - 2\frac{e^{-s}}{s^3(s+1)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^3} + 2e^{-s}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3}\right),$$

para recuperar la solución del problema,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{t^2}{2} - 1 + 2\left(e^{1-t} - 1 + (t-1) - \frac{(t-1)^2}{2}\right)\theta(t-1) = \frac{t^2}{2} - 1 \\ &+ \left(2e^{1-t} - 5 + 4t - t^2\right)\theta(t-1) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2} - 1 & t \le 1 \\ 2e^{1-t} - \dfrac{t^2}{2} + 4t - 6 & t \ge 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Problema 3.16 *Hallar la solución general de la ecuación $x'' - 2x' + 2x = f(t)$, donde $f(t) = 0$ para $t \in [0,\pi)$ y $f(t) = 1$ para $t \ge \pi$. Resolver el problema de valores iniciales con $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$.*

Solución:

La función discontinua $f(t)$ la podemos escribir usando la función paso,

$$f(t) = \theta(t-\pi).$$

Por tanto, podemos transformar la ecuación, usando las condiciones iniciales,

$$(s^2X(s) - x_0' - sx_0) - 2(sX(s) - x_0) + 2X(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s},$$

lo que nos permite despejar la transformada de la solución, $X(s)$, en función de los valores iniciales $x_0 = x(0)$, $x_0' = x'(0)$,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{x_0' - 2x_0 + sx_0}{s^2 - 2s + 2} + \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2 - 2s + 2)} = \frac{(x_0' - x_0) + x_0(s-1)}{(s-1)^2 + 1} \\ &+ \frac{e^{-\pi s}}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{(s-1)^2+1} - \frac{s-1}{(s-1)^2+1}\right). \end{aligned}$$

Todo se reduce, pues, a hallar la transformada inversa de cada uno de los sumandos que componen $X(s)$, teniendo en cuenta que

$$G(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{(s-1)^2+1} - \frac{s-1}{(s-1)^2+1} \Rightarrow g(t) = 1 + e^t(\sin t - \cos t),$$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^t\left((x_0'-x_0)\sin t + x_0\cos t\right) + \frac{\theta(t-\pi)}{2}g(t-\pi) \\ &= e^t\left((x_0'-x_0)\sin t + x_0\cos t\right) + \frac{\theta(t-\pi)}{2}\left(1+e^{t-\pi}\left(\cos t-\sin t\right)\right). \ \square \end{aligned}$$

Otra manera de obtener la solución general consiste en resolver por separado la ecuación para $t<\pi$, $x''-2x'+2x=0$, con ecuación característica,

$$\lambda^2-2\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda = 1\pm i \Rightarrow x_1(t) = e^t\left(k_1\cos t + k_2 \sin t\right),$$

y la ecuación para $t\geq\pi$, $x''-2x'+2x=1$, para lo cual necesitamos una solución particular de la forma $x_p(t)=A$,

$$2A=1\Rightarrow A=\frac{1}{2}\Rightarrow x_2(t) = e^t\left(K_1\cos t + K_2\sin t\right)+\frac{1}{2},$$

y como la solución tiene que ser continua, ya que las discontinuidades aparecen sólo a partir de la derivada segunda, se tiene que verificar $x_1(\pi)=x_2(\pi)$,

$$-k_1e^{\pi} = x_1(\pi) = x_2(\pi) = -K_1e^{\pi}+\frac{1}{2}\Rightarrow K_1 = k_1+\frac{e^{-\pi}}{2},$$

y lo mismo para las derivadas primeras,

$$-(k_1+k_2)e^{\pi} = x_1'(\pi) = x_2'(\pi) = -(K_1+K_2)e^{\pi}\Rightarrow K_2 = k_2-\frac{e^{-\pi}}{2},$$

con lo cual la solución general es

$$x(t) = \begin{cases} e^t\left(k_1\cos t+k_2\sin t\right) & \text{si } t<\pi \\ e^t\left(k_1\cos t+k_2\sin t\right)+\dfrac{1}{2}+\dfrac{e^{t-\pi}}{2}\left(\cos t-\sin t\right) & \text{si } t\geq\pi \end{cases},$$

expresión que coincide con la anteriormente deducida, tomando $k_1=x_0$, $k_2=x_0'-x_0$.

En particular, si $x_0=1=x_0'$,

$$x(t) = e^t\cos t + \frac{\theta(t-\pi)}{2}\left(1+e^{t-\pi}\left(\cos t-\sin t\right)\right). \ \square$$

Problema 3.17 *Hallar la solución general de la ecuación $x'''-7x''+15x'-9x=e^{2t}$. Hallar la solución que verifica $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$. Resolver el apartado anterior por transformada de Laplace.*

Solución:

La ecuación característica del problema,

$$\lambda^3-7\lambda^2+15\lambda-9=0,$$

tiene soluciones $\lambda=1,3,3$, por lo que la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = k_1e^t+k_2e^{3t}+k_3te^{3t}.$$

Como $f(t) = e^{2t}$ no es autofunción del problema, buscamos una solución particular de la ecuación inhomogénea de la forma $x_p(t) = Ae^{2t}$. Sustituida en la ecuación, obtenemos

$$A = 1 \Rightarrow x(t) = k_1 e^t + k_2 e^{3t} + k_3 t e^{3t} + e^{2t}. \ \square$$

Buscamos la solución del problema de valores iniciales, que proporciona un sistema de ecuaciones lineales,

$$0 = x(0) = k_1 + k_2 + 1\,,\ 0 = x'(0) = 2 + k_1 + 3k_2 + k_3\,,\ 0 = x''(0) = 4 + k_1 + 9k_2 + 6k_3$$

con solución $k_1 = -1/4$, $k_2 = -3/4$, $k_3 = 1/2$,

$$x(t) = -\frac{e^t}{4} - \frac{3}{4}e^{3t} + \frac{te^{3t}}{2} + e^{2t}. \ \square$$

Hallamos la transformada de Laplace de la ecuación,

$$(s^3 - 7s^2 + 15s - 9)X(s) = \frac{1}{s-2},$$

$$X(s) = \frac{1}{(s-2)(s^3 - 7s^2 + 15s - 9)} = \frac{-1/4}{s-1} + \frac{-3/4}{s-3} + \frac{1/2}{(s-3)^2} + \frac{1}{s-2},$$

e identificamos los términos para invertir la transformación,

$$x(t) = -\frac{e^t}{4} - \frac{3}{4}e^{3t} + \frac{te^{3t}}{2} + e^{2t}. \ \square$$

Problema 3.18 *Hallar la solución general de la ecuación* $x'' - 2x' + 5x = 16te^{-t}$. *Hallar la solución que verifica* $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ *a partir de la solución general y también por transformación de Laplace.*

Solución:

La ecuación característica de la ecuación es $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$, cuyas soluciones son complejas conjugadas $\lambda = 1 \pm 2i$. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = k_1 e^t \cos 2t + k_2 e^t \sin 2t.$$

Como el término inhomogéneo es de la forma te^{-t} y -1 no es un autovalor doble, una solución particular es de la forma $x_p(t) = (at + b)e^{-t}$, que sustituida en la ecuación proporciona

$$(t(8a - 16) + 8b - 4a)\, e^{-t} = 0 \Rightarrow 8a - 16 = 0,\ 8b - 4a = 0 \Rightarrow a = 2,\ b = 1,$$

con lo cual la solución general de la ecuación es

$$x(t) = k_1 e^t \cos 2t + k_2 e^t \sin 2t + (2t + 1)e^{-t}. \ \square$$

La solución particular que verifica $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$0 = x(0) = k_1 + 1, \quad 0 = k_1 + 2k_2 + 1 \Rightarrow k_1 = -1,\ k_2 = 0,$$

$$x(t) = -e^t \cos 2t + (2t+1)e^{-t}. \ \square$$

Realizamos la transformada de Laplace de la ecuación,

$$s^2 X(s) - 2sX(s) + 5X(s) = \frac{16}{(s+1)^2},$$

$$X(s) = \frac{16}{(s+1)^2((s-1)^2+4)} = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1-s}{(s-1)^2+4},$$

e invirtiendo la transformación,

$$x(t) = e^{-t} + 2te^{-t} - e^t \cos 2t. \ \square$$

Problema 3.19 *Consideremos la ecuación $x'' - 6x' + 9x = f(t)$. Obtener la solución general de la ecuación para $f(t) = e^{3t}$. Obtener la solución del problema de valores iniciales para $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. Resolver el apartado anterior por transformada de Laplace. Obtener la función de transferencia del problema (transformada $X_I(s)$ de la solución del problema $x'' - 6x' + 9x = \delta(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. Resolver el problema del apartado 2 como convolución con la respuesta al impulso $x_I(t)$.*

Solución:

La ecuación característica del problema, $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, tiene por solución $\lambda = 3$ doble, por lo que la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = k_1 e^{3t} + k_2 t e^{3t}.$$

Como solución particular buscamos $x_p(t) = at^2 e^{3t}$, $x_p'(t) = (2t + 3t^2)ae^{3t}$, $x_p''(t) = (2 + 12t + 9t^2)ae^{3t}$,

$$2ae^{3t} = e^{3t} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow x_p(t) = \frac{e^{3t}}{2},$$

con lo cual la solución general de la ecuación es

$$x(t) = k_1 e^{3t} + k_2 t e^{3t} + \frac{t^2}{2} e^{3t}. \ \square$$

La solución del problema de valores iniciales verifica

$$0 = x(0) = k_1, \quad 0 = x'(0) = 3k_1 + k_2 \Rightarrow k_1 = 0 = k_2 \Rightarrow x(t) = \frac{t^2}{2} e^{3t}. \ \square$$

Calculamos la transformada de Laplace de la ecuación, con las condiciones iniciales $x(0) = 0 = x'(0)$,

$$(s^2 - 6s + 9)X(s) = \frac{1}{s-3} \Rightarrow X(s) = \frac{1}{(s-3)^3},$$

con lo cual la solución del problema es

$$x(t) = \frac{t^2}{2} e^{3t}. \ \square$$

De idéntica manera, la función de transferencia es

$$X_I(s) = \frac{1}{(s-3)^2},$$

y la respuesta al impulso, por tanto,

$$x_I(t) = te^{3t}, \ \square$$

con lo cual la solución del problema de valores iniciales para una fuerza arbitraria $f(t)$ es

$$x(t) = (x_I * f)(t) = \int_0^t x_I(u) f(t-u)\, du.$$

Por tanto, la solución del problema de valores iniciales con $f(t) = e^{3t}$ es

$$x(t) = \int_0^t ue^{3u} e^{3(t-u)}\, du = e^{3t} \int_0^t u\, du = \frac{t^2}{2} e^{3t}. \ \square$$

Problema 3.20 *Resolver el sistema $x' = 2y + 3$, $y' = 2x - 2t$ con condiciones iniciales $x(0) = 0 = y(0)$.*

Solución:

Transformamos ambas ecuaciones,

$$sX = 2Y + \frac{3}{s}, \quad sY = 2X - \frac{2}{s^2},$$

de donde podemos despejar $X(s)$, $Y(s)$,

$$X(s) = \frac{3s^2 - 4}{s^2(s^2-4)}, \quad Y(s) = \frac{4}{s(s^2-4)}.$$

Descomponemos en fracciones simples para invertir la transformación,

$$X(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+2} \Rightarrow x(t) = t + \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} = t + \sinh 2t,$$

$$Y(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+2} \Rightarrow y(t) = -1 + \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} = -1 + \cosh 2t. \ \square$$

Esta última expresión podría obtenerse asimismo por convolución, ya que $Y(s) = F(s)G(s)$, $F(s) = 4/s$, $G(s) = 1/(s^2-4)$, transformadas de $f(t) = 4$, $g(t) = \sinh 2t/2$, respectivamente. Por tanto,

$$y(t) = \big(f * g\big)(t) = 2\int_0^t \sinh 2u\, du = [\cosh 2u]_0^t = \cosh 2t - 1.$$

Problema 3.21 *Sea el problema de valores iniciales dado por la ecuación $x'' - 2x' + x = t^2 e^t$ y las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. Obtener la solución general de la ecuación. Obtener la solución del problema de valores iniciales directamente y por transformada de Laplace. Expresar la ecuación como un sistema lineal de primer orden y resolver el correspondiente sistema homogéneo.*

Solución:

Buscamos soluciones de la forma $e^{\lambda t}$, lo cual conduce a la ecuación característica,

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ doble},$$

con lo cual la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = k_1 t e^t + k_2 e^t.$$

Como solución particular de la ecuación inhomogénea probamos $x_p(t) = (At^2 + Bt + C)t^2 e^t$, ya que $\lambda = 1$ es autovalor de multiplicidad dos. Sustituida en la ecuación, obtenemos

$$(12A - 1)t^2 e^t + 6Bte^t + 2Ce^t = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{12},\ B = 0 = C \Rightarrow x_p = \frac{t^4 e^t}{12},$$

y la solución general de la ecuación es

$$x(t) = k_1 t e^t + k_2 e^t + \frac{t^4 e^t}{12}. \ \square$$

La solución particular que verifica $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$0 = k_2, \quad 0 = k_1 + k_2 \Rightarrow k_1 = 0,\ k_2 = 0,$$

$$x(t) = \frac{t^4 e^t}{12}. \ \square$$

Hallamos la transformada de Laplace de la ecuación, resolvemos la ecuación algebraica para $X(s)$ e invertimos el resultado,

$$(s^2 - 2s + 1)X(s) = \frac{2}{(s-1)^3} \Rightarrow X(s) = \frac{2}{(s-1)^5} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{12} t^4 e^t. \ \square$$

Identificando $y = x'$, escribimos la ecuación como un sistema lineal de primer orden,

$$x' = y, \quad y' = -x + 2y + t^2 e^t,$$

lo expresamos el sistema en forma matricial,

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 e^t \end{pmatrix} = AX + F(t),$$

y calculamos los autovalores de A,

$$0 = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \Rightarrow \lambda = 1,$$

que es un autovalor doble.

Para construir la base, comenzamos por un vector w_1, que tiene que ser un vector no autovector, y tomamos como autovector $v_1 = (A - \mathbb{I})w_1$.

Tomamos un vector sencillo,

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = (A - \mathbb{I})w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, una base que lleva A a la forma canónica de Jordan está formada por $B = \{w_1, v_1\}$ y la matriz de cambio de base será $P = (w_1, v_1)$ para obtener la matriz de Jordan, $A = PJP^{-1}$, con lo cual una matriz fundamental es

$$W(t) = Pe^{Jt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^t & e^t \\ (1+t)e^t & e^t \end{pmatrix}.$$

Así pues, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = W(t)K = \left\{ \begin{array}{l} x_h(t) = k_1 te^t + k_2 e^t \\ x_h'(t) = y_h(t) = k_1(1+t)e^t + k_2 e^t \end{array} \right. ,$$

resultado correcto, ya que $y_h(t)$ realmente es $x_h'(t)$. $\square$

Problema 3.22 *Resolver el sistema $x' = 2x + 3y + 3e^{2t}$, $y' = -x - 2y$. Hallar la solución que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.*

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial,

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} = AX + F(t),$$

y calculamos los autovalores de A,

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1,$$

y sus correspondientes autovectores.

Para $\lambda = -1$,

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_{-1} \propto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Y para $\lambda = 1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 \propto \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, una base de autovectores está formada por $B = \{v_{-1}, v_1\}$ y la matriz de cambio de base será $P = (v_{-1}, v_1)$ para obtener una matriz diagonal $D = \mathrm{diag}(-1, 1)$, $A = PDP^{-1}$. Una matriz fundamental es

$$W(t) = Pe^{Dt} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} & -3e^t \\ e^{-t} & e^t \end{pmatrix}.$$

Así pues, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = W(t)K = \left\{ \begin{array}{l} x_h(t) = -k_1 e^{-t} - 3k_2 e^t \\ y_h(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^t \end{array} \right. .$$

Para calcular una solución particular del sistema inhomogéneo, buscamos una solución de la forma $x_p(t) = Ae^{2t}$, $y_p(t) = Be^{2t}$,

$$(-2A + 2A + 3B + 3)e^{2t} = 0, \qquad (-2B - A - 2B)e^{2t} = 0 \Rightarrow A = 4,\ B = -1,$$

con lo cual la solución general del sistema inhomogéneo es

$$x(t) = -k_1e^{-t} - 3k_2e^t + 4e^{2t}, \quad y(t) = k_1e^{-t} + k_2e^t - e^{2t}. \ \square$$

La solución particular que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$0 = -k_1 - 3k_2 + 4, \quad 0 = k_1 + k_2 - 1 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{2},\ k_2 = \frac{3}{2},$$

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{9}{2}e^t + 4e^{2t}, \quad y(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^t - e^{2t}. \ \square$$

Este último apartado se puede resolver también por transformada de Laplace. Transformando las ecuaciones,

$$sX(s) = 2X(s) + 3Y(s) + \frac{3}{s-2}, \qquad sY(s) = -X(s) - 2Y(s),$$

y resolviendo y factorizando la solución del sistema algebraico,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{3(s+2)}{(s-2)(s^2-1)} = \frac{4}{s-2} + \frac{1/2}{s+1} - \frac{9/2}{s-1}, \\ Y(s) &= -\frac{3}{(s-2)(s^2-1)} = -\frac{1}{s-2} - \frac{1/2}{s+1} + \frac{3/2}{s-1}, \end{aligned}$$

obtenemos la solución del problema de valores iniciales, invirtiendo la transformación,

$$x(t) = 4e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{9}{2}e^t, \quad y(t) = -e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^t. \ \square$$

Problema 3.23 *Resolver el sistema $x' = x + y + 2$, $y' = -x - y$. Hallar la solución que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.*

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial,

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4t \end{pmatrix} = AX + F(t).$$

Calculamos los autovalores de A,

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \Rightarrow \lambda = 0,$$

que es un autovalor doble.

Como A no es diagonal, habrá un único autovector linealmente independiente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_0 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pero para construir la base, es preferible comenzar por w_0, que tiene que ser un vector no autovector, tal que Aw_0 sea un autovector.

Tomamos un vector sencillo,

$$w_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_0 = Aw_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, una base que lleva A a la forma canónica de Jordan está formada por $B = \{w_0, v_0\}$ y la matriz de cambio de base será $P = (w_0, v_0)$ para obtener la matriz de Jordan, $A = PJP^{-1}$, con lo cual

$$W(t) = Pe^{Jt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1-t & -1 \end{pmatrix}.$$

Así pues, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = W(t)K = \begin{pmatrix} k_1 t + k_2 \\ k_1(1-t) - k_2 \end{pmatrix}.$$

Como cero es autovalor doble, buscamos una solución particular del sistema, de la forma

$$x_p(t) = at^2 + bt + c, \quad y_p(t) = dt^2 + et + f,$$

$$2at+b = (a+d)t^2 + (b+e)t + (c+f+2),\ 2dt+e = -(a+d)t^2 - (b+e)t - (c+f),$$

$$a = 1,\ d = -1,\ e = 2-b,\ f = b-c-2,\ \forall b, c,$$

y escogemos la más sencilla, con $b = 0 = c$,

$$x_p(t) = t^2, \quad y_p(t) = -t^2 + 2t - 2,$$

con lo cual la solución general del sistema es

$$x(t) = k_1 t + k_2 + t^2, \quad y(t) = k_1(1-t) - k_2 - t^2 + 2t - 2.\ \square$$

Otra manera de obtener una solución particular podría ser el método de Lagrange,

$$\begin{aligned} X_p(t) &= W(t)\int W(t)^{-1}F(t)\,dt = W(t)\int \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-t & -t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= W(t)\int \begin{pmatrix} 2 \\ 2-2t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1-t & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2t \\ 2t-t^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t^2+2t \\ -t^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

que es obviamente una solución particular distinta, la correspondiente a $k_1 = 2$, $k_2 = 0$. $\square$

La solución particular que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$0 = k_2, \quad 0 = k_1 - k_2 - 2 \Rightarrow k_1 = 2,\ k_2 = 0,$$

$$x(t) = 2t + t^2, \quad y(t) = -t^2.\ \square$$

El problema se podría resolver también por transformada de Laplace de las ecuaciones,

$$sX(s) = X(s) + Y(s) + \frac{2}{s}, \quad sY(s) = -X(s) - Y(s),$$

de donde podemos despejar las transformadas de la solución,

$$X(s)=\frac{2}{s^2}+\frac{2}{s^3},\quad Y(s)=-\frac{2}{s^3},$$

y teniendo en cuenta que la transformada de t^p es $p!/s^{p+1}$, podemos invertir fácilmente y obtener la solución del problema de valores iniciales,

$$x(t)=2t+t^2,\quad y(t)=-t^2.\ \square$$

Problema 3.24 *Consideremos el sistema $x'=x-9y$, $y'=x+y-e^t$. Resolver el sistema. Hallar la solución del sistema que verifica $x(0)=0$, $y(0)=0$, a partir de la solución general. Resolver el apartado anterior por transformada de Laplace.*

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial,

$$X'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}=AX+F(t)$$

Calculamos los autovalores de A,

$$0=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -9 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+10\Rightarrow\lambda=1\pm 3i,$$

que resultan complejos.

Buscamos un autovector para $\lambda=1+3i$,

$$\begin{pmatrix} -3i & -9 \\ 1 & -3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow v_{1+3i}\propto\begin{pmatrix} 3i \\ 1 \end{pmatrix},$$

y el conjugado para $\lambda=1-3i$,

$$\overline{v_{1+3i}}\propto\begin{pmatrix} -3i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así pues, una base de autovectores está formada por $B=\{v_{1+3i},\overline{v_{1+3i}}\}$ y la matriz de cambio de base será $P=(v_{1+3i},\overline{v_{1+3i}})$ para obtener la matriz diagonal $D=\mathrm{diag}(1+3i,1-3i)$, $A=PDP^{-1}$,

$$\begin{aligned} e^{At} &= Pe^{Dt}P^{-1}=\begin{pmatrix} 3i & -3i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{(1+3i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-3i)t} \end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -i & 3 \\ i & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 3t & -3\sin 3t \\ \frac{1}{3}\sin 3t & \cos 3t \end{pmatrix}e^t. \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t)=e^{At}K=\left\{\begin{array}{l} x_h(t)=(k_1\cos 3t-3k_2\sin 3t)\,e^t \\ \\ y_h(t)=\left(\dfrac{k_1}{3}\sin 3t+k_2\cos 3t\right)e^t \end{array}\right..\ \square$$

Otra forma de obtener esta solución general es partir de las soluciones linealmente independientes complejas,

$$e^{(1+3i)t}v_{1+3i} = e^t(\cos 3t + i\sin 3t)\begin{pmatrix} 3i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} -3\sin 3t + 3i\cos 3t \\ \cos 3t + i\sin 3t \end{pmatrix},$$

y su compleja conjugada y quedarnos como soluciones reales la parte real e imaginaria,

$$X_1(t) = e^t\begin{pmatrix} -3\sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} 3\cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix},$$

con lo cual la solución general es

$$X(t) = c_1X_1(t) + c_2X_2(t) = \begin{pmatrix} -3c_1\sin 3t + 3c_2\cos 3t \\ c_1\cos 3t + c_2\sin 3t \end{pmatrix} e^t,$$

siendo $c_2 = k_1/3$, $c_1 = k_2$, con lo cual la solución es idéntica a la que habíamos obtenido por el otro método.

Buscamos una solución particular de la forma $x_p(t) = ae^t$, $y_p(t) = be^t$,

$$ae^t = ae^t - 9be^t, \qquad be^t = ae^t + be^t - e^t \Rightarrow a = 1,\ b = 0 \Rightarrow x_p(t) = e^t,\ y_p(t) = 0,$$

con lo cual la solución general es

$$x(t) = (k_1\cos 3t - 3k_2\sin 3t + 1)\,e^t, \quad y(t) = \left(\frac{k_1}{3}\sin 3t + k_2\cos 3t\right)e^t. \ \square$$

La solución que verifica $x(0) = 0 = y(0)$ es

$$0 = k_1 + 1, \quad 0 = k_2 \Rightarrow x(t) = (1 - \cos 3t)e^t, \quad y(t) = \frac{1}{3}e^t\sin 3t. \ \square$$

El problema de valores iniciales también se puede resolver por transformada de Laplace,

$$sX(s) = X(s) - 9Y(s), \qquad sY(s) = X(s) + Y(s) - \frac{1}{s-1},$$

para despejar la transformada de la solución,

$$X(s) = \frac{9}{s^3 - 3s^2 + 12s - 10} = \frac{1}{s-1} - \frac{s-1}{(s-1)^2 + 9},$$

$$Y(s) = -\frac{1}{s^2 - 2s + 10} = -\frac{1}{(s-1)^2 + 9},$$

que factorizada permite invertir la transformación,

$$x(t) = e^t - e^t\cos 3t, \quad y(t) = -\frac{1}{3}e^t\sin 3t. \ \square$$

Problema 3.25 *Consideremos el sistema formado por las ecuaciones* $x' = -3x + 2y + 2e^t$, $y' = -4x + 3y + 2e^t$. *Obtener la solución general del sistema. Obtener la solución que verifica* $x(0) = 0$, $y(0) = 0$. *Obtener la solución del anterior problema de valores iniciales por transformada de Laplace.*

Solución:

En forma matricial, el sistema se puede resolver

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^t \\ 2e^t \end{pmatrix} = AX + F(t),$$

si expresamos A en forma diagonal.

Para ello, calculamos sus autovalores,

$$0 = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1,$$

y sus correspondientes autovectores.

Para $\lambda = -1$,

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_{-1} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Y para $\lambda = 1$,

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, una base de autovectores está formada por $B = \{v_{-1}, v_1\}$ y la matriz de cambio de base será $P = (v_{-1}, v_1)$ para obtener una matriz diagonal $D = \mathrm{diag}(-1, 1)$, $A = PDP^{-1}$,

$$W(t) = Pe^{Dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^t \\ e^{-t} & 2e^t \end{pmatrix}.$$

Así pues, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = W(t)K = \begin{cases} x_h(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^t \\ y_h(t) = k_1 e^{-t} + 2k_2 e^t \end{cases}.$$

Para calcular una solución particular del sistema inhomogéneo, buscamos soluciones de la forma $x_p(t) = (At + B)e^t$, $y_p(t) = (Ct + D)e^t$, que sustituidas en el sistema,

$$0 = (-A - 3A + 2C)te^t + (-B - A - 3B + 2D + 2)e^t,$$

$$0 = (-C - 4A + 3C)te^t + (-D - C - 4B + 3D + 2),$$

proporcionan las siguientes relaciones entre coeficientes,

$$-4A+2C = 0, \quad -4B-A+2D+2 = 0, \quad -4A+2C = 0, \quad -4B-C+2D+2 = 0,$$

cuya solución general es $A = 0$, $C = 0$, $D = 2B - 1$. Una solución sencilla es $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = -1$, con lo cual la solución general del sistema inhomogéneo es

$$x(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^t, \quad y(t) = k_1 e^{-t} + 2k_2 e^t - e^t.$$

La solución particular que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$0 = k_1 + k_2, \quad 0 = k_1 + 2k_2 - 1 \Rightarrow k_1 = -1,\ k_2 = 1,$$

$$x(t) = e^t - e^{-t}, \quad y(t) = e^t - e^{-t}. \ \square$$

Transformamos el sistema con las condiciones iniciales,

$$sX = -3X + 2Y + \frac{2}{s-1}, \qquad sY = -4X + 3Y + \frac{2}{s-1},$$

y despejamos la transformada de la solución,

$$X(s) = \frac{2}{s^2-1} = \frac{2}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} = Y(s),$$

que invertida conduce al resultado ya conocido,

$$x(t) = e^t - e^{-t} = y(t). \ \square$$

Problema 3.26 *Hallar la solución general del sistema $x' = -x - y$, $y' = 4x + 3y - 2e^t$. Hallar la solución del problema de valores iniciales correspondiente al sistema anterior con las condiciones $x(0) = 0$, $y(0) = 0$. Hallar la solución del problema anterior por transformada de Laplace.*

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial,

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2e^t \end{pmatrix} = AX + F(t).$$

Calculamos los autovalores de A,

$$0 = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \Rightarrow \lambda = 1,$$

que es un autovalor doble.

Como A no es diagonal, habrá un único autovector linealmente independiente,

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Pero para construir la base, es preferible comenzar por w_1, que tiene que ser un vector no autovector, tal que $(A - \mathbb{I})w_1$ sea un autovector.

Tomamos un vector sencillo,

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = (A - \mathbb{I})w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, una base que lleva A a la forma canónica de Jordan está formada por $B = \{w_1, v_1\}$ y la matriz de cambio de base será $P = (w_1, v_1)$ para obtener la matriz de Jordan, $A = PJP^{-1}$, con lo cual

$$W(t) = Pe^{Jt} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -te^t & -e^t \\ (1+2t)e^t & 2e^t \end{pmatrix}.$$

Así pues, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = W(t)K = \left\{ \begin{array}{l} x_h(t) = -k_1 te^t - k_2 e^t \\ y_h(t) = k_1(1+2t)e^t + 2k_2 e^t \end{array} \right. .$$

Como los términos inhomogéneos son exponenciales de exponente unidad y uno es autovalor doble, buscamos una solución particular del sistema de la forma

$$x_p(t) = (at^2 + bt + c)e^t, \quad y_p(t) = (dt^2 + et + f)e^t,$$

$$at^2 + (2a+b)t + b + c = -(a+d)t^2 - (b+e)t - c - f,$$

$$dt^2 + (2d+e)t + e + f = (4a+3d)t^2 + (4b+3e)t + 4c + 3f - 2$$

$$\Rightarrow a = 1,\ b = -1 - \frac{e}{2},\ c = \frac{1-f}{2} + \frac{e}{4},\ d = -2.$$

Quedan sin determinar dos constantes, como era de esperar, ya que el autovalor es doble, que tomamos $e = f = 0$ para obtener una solución particular sencilla, $a = 1$, $b = -1$, $c = 1/2$, $d = -2$, $e = 0 = f$,

$$x_p(t) = \left(t^2 - t + \frac{1}{2}\right)e^t, \quad y_p(t) = -2t^2e^t,$$

con lo cual la solución general del sistema es

$$x(t) = \left(-k_1 t - k_2 + t^2 - t + \frac{1}{2}\right)e^t, \quad y(t) = \left(k_1(1+2t) + 2k_2 - 2t^2\right)e^t. \ \Box$$

La solución particular que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$0 = -k_2 + \frac{1}{2}, \quad 0 = k_1 + 2k_2 \Rightarrow k_1 = -1,\ k_2 = \frac{1}{2},$$

$$x(t) = t^2e^t, \quad y(t) = -2(t^2+t)e^t. \ \Box$$

También se puede obtener esta solución por transformada de Laplace. Las ecuaciones transformadas son

$$\left. \begin{array}{l} sX(s) = -X(s) - Y(s) \\ sY(s) = 4X(s) + 3Y(s) - \dfrac{2}{s-1} \end{array} \right\},$$

de donde podemos despejar $X(s)$, $Y(s)$,

$$\left. \begin{array}{l} X(s) = \dfrac{2}{(s-1)^3} \\ Y(s) = -(s+1)X(s) = -\dfrac{2(s+1)}{(s-1)^3} = -\dfrac{2}{(s-1)^2} - \dfrac{4}{(s-1)^3} \end{array} \right\}$$

e identificando las fracciones, podemos invertir la transformación,

$$x(t) = t^2e^t, \quad y(t) = -2(t^2+t)e^t. \ \Box$$

Problema 3.27 *Resolver el sistema $x' = -y + 1 - \theta(t-\pi)$, $y' = x + 1 - \theta(t-\pi)$ con condiciones iniciales $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.*

Solución:

Transformamos ambas ecuaciones,

$$sX(s) = -Y(s) + \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s}, \quad sY(s) = X(s) + \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s},$$

de donde podemos despejar $X(s)$, $Y(s)$,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{(s-1)(1-e^{-\pi s})}{s(s^2+1)} = \left(\frac{s+1}{s^2+1} - \frac{1}{s}\right)(1-e^{-\pi s}), \\ Y(s) &= \frac{(s+1)(1-e^{-\pi s})}{s(s^2+1)} = \left(\frac{1-s}{s^2+1} + \frac{1}{s}\right)(1-e^{-\pi s}), \end{aligned}$$

y ya sólo tenemos que invertir la transformación,

$$x(t) = \sin t + \cos t - 1 - (\sin(t-\pi) + \cos(t-\pi) - 1)\,\theta(t-\pi),$$

$$y(t) = \sin t - \cos t + 1 - (\sin(t-\pi) - \cos(t-\pi) + 1)\,\theta(t-\pi).$$

Simplificando las expresiones, obtenemos el resultado final,

$$x(t) = \sin t + \cos t - 1 + (\sin t + \cos t + 1)\,\theta(t-\pi) = \left\{ \begin{array}{ll} \sin t + \cos t - 1 & t \le \pi \\ 2\sin t + 2\cos t & t \ge \pi \end{array} \right.,$$

$$y(t) = \sin t - \cos t + 1 + (\sin t - \cos t - 1)\,\theta(t-\pi) = \left\{ \begin{array}{ll} \sin t - \cos t + 1 & t \le \pi \\ 2\sin t - 2\cos t & t \ge \pi \end{array} \right.,$$

que son funciones continuas, ya que la discontinuidad aparece en la ecuación en las derivadas solamente. □

Problema 3.28 *Resolver el problema de valores iniciales* $x'' + x = \delta(t-\pi)$ *con* $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. *Lo mismo para* $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

Solución:

Transformamos la ecuación,

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + X(s) = e^{-\pi s} \Rightarrow X(s) = \frac{sx(0) + x'(0) + e^{-\pi s}}{s^2+1},$$

expresión que nos permite recuperar la solución general sin más que realizar la transformada inversa,

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0)\cos t + x'(0)\sin t + \theta(t-\pi)\sin(t-\pi) \\ &= x(0)\cos t + x'(0)\sin t - \theta(t-\pi)\sin t, \end{aligned}$$

sin más que tener en cuenta que la transformada de $f(t-a)\theta(t-a)$ es $F(s)e^{-as}$.

En el caso particular $x(0) = 0 = x'(0)$,

$$x(t) = -\theta(t-\pi)\sin t = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \le \pi \\ -\sin t & x \ge \pi \end{array} \right. . \ \square$$

Obviamente, esta solución es continua, pero no es siquiera derivable en $x = \pi$.

En el caso particular $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$,

$$x(t) = \sin t - \theta(t - \pi) \sin t = \begin{cases} \sin t & x \leq \pi \\ 0 & x \geq \pi \end{cases} = \theta(\pi - t) \sin t. \ \Box$$

Esta solución es curiosa, ya que el efecto del impulso compensa el del movimiento oscilatorio a partir de $t = \pi$.

Problema 3.29 *Resolver el problema de valores iniciales* $x'' + 2x' + 2x = \delta(t - \pi)$ *con* $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

Solución:

Transformamos la ecuación,

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + 2sX(s) - 2x(0) + 2X(s) = e^{-\pi s},$$

y ya sólo tenemos que despejar $X(s)$,

$$X(s) = \frac{s + 2 + e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 2} = \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1} + \frac{1}{(s + 1)^2 + 1} + \frac{e^{-\pi s}}{(s + 1)^2 + 1},$$

e invertir la transformación,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t} \cos t + e^{-t} \sin t + \theta(t - \pi) e^{\pi - t} \sin(t - \pi) \\ &= e^{-t} \big(\cos t + (1 - \theta(t - \pi) e^{\pi}) \sin t \big) \\ &= \begin{cases} e^{-t} \cos t + e^{-t} \sin t & x \leq \pi \\ e^{-t} \cos t + (1 - e^{\pi}) e^{-t} \sin t & x \geq \pi \end{cases} . \ \Box \end{aligned}$$

La solución es continua, ya que las discontinuidades aparecen sólo a partir de la derivada primera en $x = \pi$.

Problema 3.30 *Hallar la solución general de la ecuación* $tx'' + x' = 0$ *directamente y por transformada de Laplace. Comparar los resultados e interpretarlos.*

Solución:

La ecuación es de Euler, con lo cual se resuelve directamente con el cambio $t = e^u$, que la reduce a lineal con coeficientes constantes,

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow x(t) = k_1 u + k_2 = k_1 \ln t + k_2. \ \Box$$

Transformamos la ecuación,

$$-\frac{d}{ds} \big(s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) \big) + sX(s) - x(0) = 0 \Rightarrow -sX(s) - s^2 X'(s) = 0,$$

para obtener otra en $X(s)$ que es sencilla de integrar,

$$X'(s) + \frac{X(s)}{s} = 0 \Rightarrow X(s) = \frac{C}{s} \Rightarrow x(t) = C. \ \Box$$

Observamos que por el camino hemos perdido la solución logarítmica, lo cual no es extraño, ya que, al realizar la transformada de las derivadas de $x(t)$, estamos dando por sentado que está función es continua y derivable en $t = 0$, como refleja el uso de los valores $x(0)$ y $x'(0)$. Por tanto, sólo estamos encontrando soluciones que sean continuas y derivables en $t = 0$, lo cual excluye los logaritmos. $\Box$

Problema 3.31 *Hallar la solución general de la ecuación* $tx''+(t-1)x'-x=0$.

Solución:

Hallamos la transformada de Laplace de la ecuación,

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+sX(s)-x(0)\right)-sX(s)+x(0)-X(s)=0\Rightarrow$$

$$-(s^2+s)X'(s)-(3s+2)X(s)+2x(0)=0,$$

y obtenemos una ecuación lineal de primer orden para $X(s)$.

Hallamos la solución general de la ecuación homogénea,

$$X_h(s)=C\exp\left(-\int\frac{3s+2}{s^2+s}\,ds\right)=Ce^{-2\ln|s|-\ln|s+1|}=\frac{k}{s^2(s+1)},\ k=\pm C,$$

teniendo en cuenta que

$$-\frac{3s+2}{s^2+s}=-\frac{2}{s}-\frac{1}{s+1}\Rightarrow-\int\frac{3s+2}{s^2+s}\,ds=-2\ln|s|-\ln|s+1|.$$

Para la ecuación inhomogénea, buscamos una solución de la forma $X_p(s)=k(s)/s^2(s+1)$,

$$\frac{k'(s)}{s}=2x_0\Rightarrow k(s)=x_0s^2\Rightarrow X_p(s)=\frac{x_0}{s+1}\Rightarrow$$

$$X(s)=\frac{k}{s^2(s+1)}+\frac{x_0}{s+1}=\frac{k}{s^2}-\frac{k}{s}+\frac{k+x_0}{s+1},$$

y una vez obtenida la solución general, sólo tenemos que invertir la transformada,

$$x(t)=k(t-1)+(k+x_0)e^{-t}.\ \square$$

Otra manera de resolver la ecuación sería, sabiendo que $t-1$ es una solución particular de la ecuación, rebajar el orden a una ecuación mediante el cambio $x(t)=(t-1)y(t)$, $z=y'$,

$$(t^2-t)z'+(t^2+1)z=0\Rightarrow z'=\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t-1}-1\right)z,$$

ecuación lineal homogénea, que se resuelve inmediatamente, $k_1=-e^{\pm C}$,

$$y'(t)=z(t)=C\exp\left(\ln|t|-2\ln|t-1|-t\right)=-\frac{k_1te^{-t}}{(t-1)^2}\Rightarrow y(t)=k_2+\frac{k_1e^{-t}}{t-1},$$

$$x(t)=k_2(t-1)+k_1e^{-t}.$$

Problema 3.32 *Resolver la ecuación integral* $x(t)=t^3+\int_0^t\sin(t-u)x(u)\,du$ *para* $x(t)$.

Solución:

Observemos que la integral es un producto de convolución, denotando $f(t) = \sin t$,

$$\int_0^t \sin(t-u)x(u)\,du = (f * x)(t).$$

Transformamos la ecuación,

$$X(s) = \frac{6}{s^4} + \frac{X(s)}{s^2+1} \Rightarrow X(s) = \frac{s^2+1}{s^2}\frac{6}{s^4} = \frac{6}{s^4} + \frac{6}{s^6},$$

y obtenemos directamente la expresión de $X(s)$.

Por tanto, sólo tenemos que invertir la transformación para resolver la ecuación,

$$x(t) = t^3 + \frac{t^5}{20}. \ \square$$

Problema 3.33 *Hallar las transformadas de Fourier de las siguientes funciones de variable real:*

1. $f(t) = \chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 0 & t \notin [a,b] \\ 1 & t \in [a,b] \end{cases}$,
2. $g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-at} & t \geq 0 \end{cases}$, $\quad a > 0$.
3. $h(t) = \dfrac{1}{t^2 + a^2}$.
4. $j(t) = e^{-t^2/2}$.
5. $m(t) = \dfrac{t}{t^2 + a^2}$.

Solución:

1. Se trata de la función característica del intervalo $[a,b]$,

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\chi_{[a,b]}(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-i\omega t}\,dt = \left[\frac{i\,e^{-i\omega t}}{\omega\sqrt{2\pi}}\right]_a^b \\ &= i\frac{e^{-i\omega b} - e^{-i\omega a}}{\omega\sqrt{2\pi}}. \ \square \end{aligned}$$

Un caso particular acontece cuando $a = -b$, ya que entonces,

$$F(\omega) = \frac{e^{i\omega b} - e^{-i\omega b}}{i\omega\sqrt{2\pi}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin b\omega}{\omega} = \frac{2b}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{sinc} b\omega.$$

2. Una función tan peculiar tiene, en cambio, una transformada bien sencilla,

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} g(t)\,dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-(a+i\omega)t}}{\sqrt{2\pi}}dt = \left.\frac{-e^{-(a+i\omega)t}}{\sqrt{2\pi}(a+i\omega)}\right|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(a+i\omega)}. \ \square \end{aligned}$$

3. En vez de realizar la integral de Fourier, vamos a aprovechar el resultado anterior, tomando $a > 0$ y descomponiendo,

$$h(t) = \frac{1}{t^2 + a^2} = \frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{a + it} + \frac{1}{a - it}\right\} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\{G(t) + G(-t)\},$$

es decir, denotando $G(-t) = \tilde{G}(t)$, podemos escribir, teniendo en cuenta que la inversión es T^2,

$$h = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\{G + \tilde{G}\} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\{T(g) + T^3(g)\},$$

de donde se infiere, usando el hecho de que T^4 es la identidad,

$$H = T(h) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\{T^2(g) + T^4(g)\} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\{\tilde{g} + g\},$$

e introduciendo la variable ω, obtenemos, sin necesidad de haber realizado ninguna integral,

$$H(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\{g(\omega) + g(-\omega)\} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\, e^{-a|\omega|}. \ \Box$$

Otra posibilidad es extender la función h al plano complejo, cambiando t por z. La función $h(z)$ tiene un número finito de polos, $\pm ia$, y ninguno en el eje real, y como

$$\lim_{z\to\infty} h(z) = 0,$$

podremos aplicar el método de los residuos para calcular la integral.

Para $\omega > 0$, la exponencial de la integral tendrá un factor decreciente si z tiene parte imaginaria negativa. Cerrando el circuito con una semicircunferencia de radio R en el semiplano inferior, cuyo radio se hace tender a infinito, la contribución de la semicircunferencia añadida será nula. Así pues, el valor de la integral para $\omega > 0$ será,

$$H(\omega) = -\sqrt{2\pi} i \sum_{\operatorname{Im} z_i < 0} \operatorname{Res}\left(h(z)e^{-i\omega z}, z_i\right),$$

sumando sobre los polos con parte imaginaria negativa. El signo menos proviene de que el circuito se recorre en sentido horario (negativo).

Para $\omega < 0$, la exponencial es decreciente sólo en el semiplano superior, por lo que cerraremos el circuito con una semicircunferencia de radio R tendiendo a infinito en dicho semiplano. Al igual que en el caso anterior, la semicircunferencia no contribuye y la integral pedida depende de la suma de los residuos en los polos del semiplano superior.

$$H(\omega) = \sqrt{2\pi} i \sum_{\operatorname{Im} z_i > 0} \operatorname{Res}\left(h(z)e^{-i\omega z}, z_i\right),$$

Como la fórmula del residuo en un polo z_i de orden p de una función f es,

$$\operatorname{Res}\left(f(z), z_i\right) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z\to z_i} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left\{(z - z_i)^p f(z)\right\},$$

resulta que los residuos pedidos en los polos simples $\pm ia$ son,

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-i\omega z}}{z^2+a^2}, \pm ia\right) = \pm\frac{e^{\pm\omega a}}{2ia},$$

con lo cual,

$$H(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}e^{-\omega a} & \omega > 0 \\ \\ \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}e^{\omega a} & \omega < 0 \end{array} \right\} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\, e^{-a|\omega|},$$

que concuerda con el resultado obtenido previamente. □

4. La transformada de la función gaussiana se puede realizar directamente, completando cuadrados en la exponencial y cambiando de variable,

$$\begin{aligned} J(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}e^{-t^2/2}\, dt \\ &= \frac{e^{-\omega^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+i\omega)^2/2}\, dt = \frac{e^{-\omega^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy = e^{-\omega^2/2}, \end{aligned}$$

pues la integral de la gaussiana es $\sqrt{2\pi}$. Con lo cual $J = j$. □

El procedimiento anterior es difícil de justificar, por lo que propondremos un segundo método, muy utilizado para resolver ecuaciones diferenciales. Como $j'(t) = -t\, j(t)$, podemos transformar esta ecuación,

$$i\omega J(\omega) = -iJ'(\omega),$$

es decir, J verifica la misma ecuación diferencial que j,

$$-\omega J(\omega) = J'(\omega) \Rightarrow -\omega = \frac{d}{d\omega}\ln J(\omega) \Rightarrow \ln C - \frac{\omega^2}{2} = \ln J(\omega),$$

por lo que conocemos J salvo una constante C,

$$J(\omega) = C\, e^{-\omega^2/2},$$

que es fácil de obtener, ya que conocemos el valor de $J(0) = 1 = C$, debido a que el valor de la integral de la gaussiana es $\sqrt{2\pi}$.

Por tanto, hemos obtenido el mismo valor para J. □

5. También se puede realizar sin necesidad de calcular ninguna integral, ya que $m(t) = th(t)$ y $M(\omega) = iH'(\omega)$, con lo cual, como la derivada de H es,

$$H'(\omega) = g'(\omega) - g'(-\omega) = -\text{signo}(\omega)\, \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\, e^{-a|\omega|},$$

$$M(\omega) = i\, H'(\omega) = -i\, \text{signo}(\omega)\, \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\, e^{-a|\omega|}. \ \square$$

Como en este caso, al igual que h, la función m extendida a los complejos tiene sólo dos polos simples $\pm ia$ y se verifica que,

$$\lim_{z\to\infty} m(z) = 0,$$

se podrá aplicar el método de los residuos para calcular la integral. Los residuos en los polos simples $\pm ia$ son,

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z\, e^{-i\omega z}}{z^2+a^2}, \pm ia\right) = \frac{e^{\pm\omega a}}{2},$$

con lo cual,

$$M(\omega) = \left\{\begin{array}{ll} -i\frac{\sqrt{2\pi}}{2}e^{-\omega a} & \omega > 0 \\ i\frac{\sqrt{2\pi}}{2}e^{\omega a} & \omega < 0 \end{array}\right\} = -i\,\mathrm{signo}(\omega)\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\, e^{-a|\omega|},$$

que concuerda con el resultado obtenido previamente. □

Nótese que la función m no es absolutamente integrable.

Problema 3.34 *Hallar la transformada de Fourier de la función $f(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$. Usar el resultado para calcular la transformada de las funciones $g(t) = te^{-a|t|}$, $h(t) = \mathrm{signo}\,(t)e^{-a|t|}$, $j(t) = |t|e^{-a|t|}$.*

Solución:

Calculamos la integral de Fourier,

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-\infty} e^{-i\omega t}e^{-a|t|}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}\,dt\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[\frac{e^{(a-i\omega)t}}{a-i\omega}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{a+i\omega}\right]_{0}^{\infty}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a-i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{\omega^2+a^2}\ . \ \square \end{aligned}$$

La función g es el resultado de multiplicar $f(t)$ por la variable t, $g(t) = tf(t)$. Por tanto, $G(\omega) = iF'(\omega)$,

$$G(\omega) = i\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{\omega^2+a^2}\right) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{4a\omega}{(\omega^2+a^2)^2}\ . \ \square$$

Por otra parte, como $h(t) = -f'(t)/a$, $H(\omega) = -i\omega F(\omega)/a$,

$$H(\omega) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{2\omega}{\omega^2+a^2}\ . \ \square$$

Finalmente, como $j(t) = th(t)$, $J(\omega) = iH'(\omega)$,

$$J(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{a^2-\omega^2}{(\omega^2+a^2)^2}\ . \ \square$$