Capítulo 1

Ecuaciones de primer orden

Objetivos

- Resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
- Aplicar los teoremas de existencia y unicidad de soluciones.
- Familiarizarse con métodos cualitativos y numéricos para obtener soluciones aproximadas.

1.1. Conceptos

Las ecuaciones diferenciales son una herramienta matemática que permite modelizar la evolución o la variación de magnitudes físicas, matemáticas, económicas, relacionando los valores de las magnitudes con los de sus derivadas.

Por ejemplo, experimentalmente se comprueba que la cantidad de un material radiactivo en función del tiempo t, $m(t)$, es proporcional a la velocidad con la que se desintegra. Esto permite escribir una ecuación

$$\frac{dm(t)}{dt} = -\lambda m(t),$$

siendo el coeficiente λ la tasa de desintegración del material.

La segunda ley de Newton, comúnmente denotada como la definición del concepto de fuerza, simplemente relaciona la aceleración, segunda derivada de la posición, $x(t)$, de una partícula de masa m con la suma de fuerzas, $f\big(t, x'(t), x(t)\big)$, que actúan sobre ella,

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = f\big(t, x'(t), x(t)\big).$$

Por comodidad emplearemos la notación x', x'',... para indicar las derivadas sucesivas respecto a la variable independiente, siempre que no haya posibilidad de confusión.

Todos estos ejemplos son casos particulares de **ecuaciones diferenciales**. Para una variable dependiente $x(t)$ y una variable independiente t, la expresión más general de una ecuación diferencial es

$$F\big(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots\big) = 0, \tag{1.1}$$

es decir, una función F de la variable independiente y de la variable dependiente y de sus derivadas igualada a cero. La incógnita es la variable dependiente $x(t)$.

Cuando la variable independiente es única, t, normalmente el tiempo, decimos que la ecuación es **ordinaria**. Si tenemos varias ecuaciones para varias variables dependientes, $x_1(t)$, $x_2(t)$,..., $x_n(t)$, decimos que tenemos un **sistema de ecuaciones ordinarias**. Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $x(t)$, $y(t)$, sería

$$\left\{\begin{array}{l} F\big(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, y(t), y'(t), y''(t), \dots\big) = 0 \\ G\big(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, y(t), y'(t), y''(t), \dots\big) = 0 \end{array}\right. .$$

Por ejemplo, la ley de Newton para una partícula de masa m en el espacio, sometida a una fuerzas vectoriales, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$, es un sistema de tres ecuaciones,

$$m\mathbf{x}''(t) = \mathbf{f}\big(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)\big),$$

para la posición $\mathbf{x} = (x, y, z)$

$$\left\{\begin{array}{l} mx''(t) = f_1\big(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)\big) \\ my''(t) = f_2\big(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)\big) \\ mz''(t) = f_3\big(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)\big) \end{array}\right. .$$

El **orden** de la ecuación es el orden de la derivada más alta de la variable o variables dependientes que aparecen en la ecuación.

Así la ecuación de desintegración es de primer orden, porque sólo aparece la primera derivada. En cambio, la ley de Newton es de segundo orden, porque aparece hasta la segunda derivada.

Decimos que una ecuación diferencial es **lineal** si la función F es un polinomio de grado uno en la variable dependiente y sus derivadas,

$$a_n(t)x^{n)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = f(t).$$

Por ejemplo, la ley de desintegración es lineal, pero la ley de Newton no lo es en general. Si el término *independiente* $f(t)$ es nulo, decimos que la ecuación lineal es **homogénea**. Si las funciones $a_0(t)$,...,$a_n(t)$ no dependen de t decimos que la ecuación es **lineal con coeficientes constantes**. Esta terminología se aplica también a los sistemas de ecuaciones.

El caso de la ley de Hooke para un muelle ideal,

$$mx''(t) = -kx(t),$$

con constante del muelle k, es lineal, homogénea, con coeficientes constantes. Para un campo gravitatorio constante g, en cambio,

$$mx''(t) = mg,$$

es lineal, inhomogénea, con coeficientes constantes.

Si la función F es sólo lineal en la derivada de mayor orden de la variable dependiente, es decir, si podemos despejar $x^{n)}(t)$, decimos que la ecuación es **cuasilineal**,

$$x^{n)}(t) = f\big(t, x(t), x'(t), \dots, x^{n-1)}(t)\big).$$

Obsérvese que, formalmente, todas las ecuaciones son cuasilineales, ya que, al menos en teoría, podemos despejar de la ecuación la derivada $x^{n)}$. Otra cuestión es que pueda hacerse analíticamente.

Por ejemplo, la ley de Newton es cuasilineal, si las fuerzas no dependen de la aceleración.

Si no aparece la variable independiente en la ecuación, decimos que la ecuación es **autónoma**,

$$F\big(x(t), x'(t), \ldots, x^{n)}(t)\big) = 0.$$

Por ejemplo, la ley de Newton es una ecuación autónoma si la fuerza no depende explícitamente del tiempo. La ley de desintegración es una ecuación autónoma.

Existen también ecuaciones en las que la variable dependiente depende de varias variables independientes, el tiempo t, la posición x, como la ecuación de la cuerda vibrante,

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = f(t,x),$$

o la ecuación de Laplace,

$$\frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial z^2} = 0,$$

para un potencial V en el espacio.

Este tipo de ecuaciones se denominan **ecuaciones en derivadas parciales**.

Resolver una ecuación diferencial es obtener las soluciones $x(t)$ de la ecuación, lo cual en general es una tarea ardua y complicada, que normalmente se acomete por métodos numéricos.

Una **solución particular** de una ecuación $F\big(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots\big) = 0$ es una función $h(t)$, tal que

$$F\big(t, h(t), h'(t), h''(t), \ldots\big) = 0.$$

Que una función es solución de una ecuación se comprueba por mera sustitución.

Ejemplo 1.1.1 *Comprobar que $x(t) = -t$ es una solución de la ecuación $x''^3 - x'^2 + x + t + 1 = 0$.*

Teniendo en cuenta que $h'(t) = -1$, $h''(t) = 0$, comprobamos que, efectivamente,

$$h''^3(t) - h'^2(t) + h(t) + t + 1 = 0 - 1 - t + t + 1 = 0.$$

En algunos casos es sencillo obtener soluciones por simple inspección o usando funciones sencillas. Por ejemplo, soluciones constantes, $x(t) = A$.

Ejemplo 1.1.2 *Buscar las soluciones constantes de la ecuación $tx' = -x + x^2$.*

Sustituimos $x(t) = A$ en la ecuación,

$$0 = tx' = -A + A^2 = A(A-1) \Rightarrow A = 0, 1,$$

y obtenemos dos soluciones constantes, $x(t) = 0$, $x(t) = 1$.

O soluciones lineales, $x(t) = At$.

Ejemplo 1.1.3 *Buscar las soluciones lineales de la ecuación $t^2x' = -tx + x^2$.*

Sustituimos $x(t) = At$ en la ecuación,

$$At^2 = -At^2 + A^2t^2 \Rightarrow A^2 - 2A = 0 \Rightarrow A = 0, 2,$$

y obtenemos dos soluciones, $x(t) = 0$, $x(t) = 2t$.

Denominamos **solución general** de una ecuación diferencial de orden n a una familia dependiente de n parámetros,

$$x(t) = h(t, k_1, \dots, k_n),$$

de modo que para cualquier valor de las constantes $k_1, \dots, k_n$ se obtiene una solución de la ecuación diferencial.

El ejemplo más sencillo es

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t) \Leftrightarrow x(t) = \int f(t)\, dt + k,$$

que simplemente expresa el cálculo de primitivas de una función f como la solución general de una ecuación diferencial lineal de primer orden.

Observamos en este ejemplo que en la solución general aparece un parámetro libre, la constante de integración k, como corresponde a una ecuación de orden uno.

Ejemplo 1.1.4 *Solución general de la ecuación del oscilador armónico, $x'' = -\omega^2 x$.*

Solución:

Esta ecuación describe oscilaciones de frecuencia ω. Es una ecuación lineal de segundo orden y tiene por solución general,

$$x(t) = A \sin(\omega t - \delta),$$

que depende de dos constantes, la amplitud A de la onda y el desfase de la misma, δ. Comprobamos que realmente es solución,

$$x'(t) = \omega A \cos(\omega t - \delta), \quad x''(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t - \delta) = -\omega^2 x(t).$$

A pesar de su nombre, una solución general de una ecuación diferencial no lineal no tiene por qué incluir todas las soluciones particulares de la ecuación. Estas soluciones no incluidas se denominan **soluciones o integrales singulares**.

Pero en muchos casos no nos interesa conocer el conjunto completo de soluciones, sino una solución concreta, la que cumple una serie de condiciones, normalmente tantas como orden tiene la ecuación. Distinguimos dos casos importantes:

En los **problemas de valores iniciales** buscamos soluciones sabiendo el valor de la variable dependiente y sus derivadas para un valor concreto de t, el *instante* inicial t_0.

Fijar estas condiciones nos permite determinar los valores de los parámetros libres de la solución general. Así, lo usual es que para una ecuación de orden n

el problema de valores iniciales requiera el conocimiento de $x(t_0)$ para un valor t_0 y las derivadas sucesivas hasta orden $n-1$.

Por ejemplo, el problema de valores iniciales para una ecuación de primer orden es de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} F\big(t, x(t), x'(t)\big) = 0 \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. . \tag{1.2}$$

En el caso de la ley de desintegración el problema de valores iniciales supone conocer la cantidad del material que queda en un instante t, $m(t)$, sabiendo que en el instante t_0 había una cantidad $m_0 = m(t_0)$.

O, para ecuaciones de segundo orden,

$$\left\{ \begin{array}{l} F\big(t, x(t), x'(t), x''(t)\big) = 0 \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x'_0 \end{array} \right. . \tag{1.3}$$

Por ejemplo, el problema de valores iniciales para la ley de Newton implica conocer la posición de la partícula en cada instante de tiempo t, sabiendo que en el instante inicial t_0 estaba en la posición $x(t_0) = x_0$ con velocidad $x'(t_0) = x'_0$.

Estos problemas están relacionados con la *predictibilidad* de las ecuaciones diferenciales. Lo deseable es que para un problema físico, las ecuaciones diferenciales que lo describen permitan conocer el valor de una magnitud en cualquier instante futuro, conociendo su valor, y el de sus derivadas, en el instante actual. Si en lugar de una solución hubiera varias, o ninguna, que verificaran las condiciones del problema, la predictibilidad se rompería, ya que no podríamos predecir el valor que va a tomar la magnitud en el futuro.

Por ello es importante conocer bajo qué condiciones el problema de valores iniciales tiene solución (existencia) y es única (unicidad).

Finalmente, otro problema importante es el **problema de contorno**. En este problema conocemos los valores de la variable dependiente para varios valores de la variable independiente. Por ejemplo, para ecuaciones de segundo orden,

$$\left\{ \begin{array}{l} F\big(t, x(t), x'(t), x''(t)\big) = 0 \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \end{array} \right. . \tag{1.4}$$

Nos interesa en este caso conocer los valores de $x(t)$ en el intervalo $[t_0,t_1]$. No suelen ser problemas de *evolución*, t no es un tiempo, sino una posición.

1.2. Ecuaciones separables

Como ya se ha avanzado, lo normal es que las ecuaciones diferenciales, incluso las de orden más bajo, no sean resolubles en términos de funciones elementales. No obstante, detallamos los casos más sencillos de ecuaciones de primer orden que son directamente resolubles.

Omitiremos la dependencia en la variable independiente para agilizar la notación. Es decir, se escribirá, por ejemplo, x' en lugar de $x'(t)$ o x en lugar de $x(t)$.

El caso más sencillo es el de las **ecuaciones separables**. En este caso se puede aislar la dependencia de la función $F\big(t, x(t), x'(t)\big)$ del siguiente modo

$$f(x)x' = g(t) \Leftrightarrow f(x)\,dx = g(t)\,dt \Leftrightarrow \int f(x)\,dx = \int g(t)\,dt + C, \tag{1.5}$$

de modo que la ecuación se resuelve por integración directa, con un parámetro libre, la constante de integración. Normalmente no será posible despejar $x(t)$ en función de t.

Por tanto, el caso se reduce a un problema de cálculo integral. Que la solución general se pueda expresar en términos de funciones elementales dependerá de que las integrales se puedan resolver analíticamente. Si no, habrá que resolverlas numéricamente.

Ejemplo 1.2.1 *Resolver la ecuación $x' = tx$. Obtener la solución que verifica que $x(0) = 1$. ¿Y la solución que verifica $x(0) = 0$?*

La ecuación es separable, por lo que podemos obtener su solución general,

$$\frac{x'}{x} = t \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = \int t\,dt \Leftrightarrow \ln|x| = \frac{t^2}{2} + C \Leftrightarrow x(t) = \pm e^C e^{t^2/2} = k e^{t^2/2},$$

denotando $k = \pm e^C$.

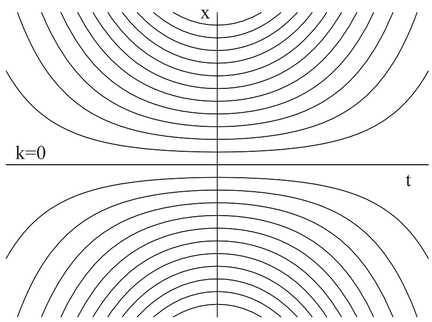

Figura 1.1: Soluciones de la ecuación $x' = tx$

Para hallar la solución que verifica $x(0) = 1$, sustituimos $t = 0$ en la solución general,

$$1 = x(0) = k \Rightarrow x(t) = e^{t^2/2}.$$

En cambio, para la solución particular que verifica $x(0) = 0$ obtenemos

$$0 = x(0) = k \Rightarrow x(t) = 0,$$

para lo cual no era preciso calcular la solución general, ya que es obvio que $x(t) = 0$ es una solución constante de la ecuación.

Existen varios tipos de ecuaciones que, sin ser separables, se reducen a ecuaciones separables por un cambio de variable.

Las **ecuaciones homogéneas** son de la forma

$$x' = f(x/t), \tag{1.6}$$

y mediante el cambio de variable dependiente $y(t) = x(t)/t \Leftrightarrow x(t) = ty(t)$, derivando implícitamente esta expresión,

$$f(y) = f(x/t) = x' = y + ty' \Leftrightarrow \frac{y'}{f(y) - y} = \frac{1}{t},$$

se reducen a ecuaciones separables.

Ejemplo 1.2.2 *Resolver la ecuación $t^2x' = tx - x^2 + t^2$. Obtener la solución particular que verifica $x(0) = 0$. ¿Y para $x(0) = 1$?, ¿y $x(1) = 0$?*

La ecuación es homogénea, ya que

$$x' = \frac{x}{t} - \frac{x^2}{t^2} + 1,$$

con lo cual, realizando el cambio de variable $y = x/t$, obtenemos una ecuación separable,

$$\frac{y'}{1-y^2} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow \operatorname{arctanh} y = \ln|t| + C \Leftrightarrow \frac{x(t)}{t} = y(t) = \tanh\big(\ln|t| + C\big),$$

$$x(t) = t\tanh\big(\ln|t| + C\big) = \frac{t(t^2-k)}{t^2+k},$$

con $k = e^{-2C}$.

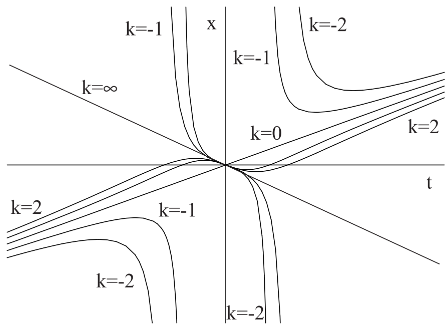

Figura 1.2: Soluciones de la ecuación $t^2x' = tx - x^2 + t^2$

Para esta ecuación, dar valores iniciales en $t = 0$ resulta patológico, puesto que, sustituyendo $t = 0$ en la ecuación, obtenemos $x(0) = 0$. Es decir, $x_0 = 0$ es el único valor permitido para $t = 0$. No existen soluciones para otros valores. Además, de la expresión de la solución general, observamos que todas las soluciones pasan por $x = 0$ para $t = 0$. Es decir, existen infinitas soluciones con dicho valor inicial.

El otro caso, $x(1) = 0$, implica

$$0 = \frac{1-k}{1+k} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x(t) = \frac{t(t^2-1)}{t^2+1}.$$

Nótese la solución lineal $x(t) = t$, que se obtiene para $k = 0$.

Obsérvese también que las soluciones con k negativo presentan un polo para $\bar{t} = \pm\sqrt{-k}$. Por tanto, estas soluciones están definidas para $t \in (-\infty, \bar{t})$ o para $t \in (\bar{t}, \infty)$. No son *prolongables* a todos los valores de t. En cambio, las soluciones con k positivo no presentan polos reales, así que sí son prolongables a todo valor de t.

Nótese también que, para grandes valores de $|t|$, todas las soluciones tienden a la solución lineal $x(t) = t$.

Además, en el límite k tendiendo a infinito, descubrimos otra solución lineal, $x(t) = -t$, que no está comprendida en la solución general obtenida. Es, pues, una integral singular. Otra manera de encontrarla sería buscar soluciones lineales, $x(t) = At$,

$$At^2 = At^2 - A^2t^2 + t^2 \Rightarrow A^2 = 1,$$

lo que nos permite comprobar que las únicas soluciones lineales son precisamente $x(t) = t$, $x(t) = -t$.

Otro tipo que se reduce a ecuaciones separables son las ecuaciones de la forma

$$x' = f(at + bx), \tag{1.7}$$

donde a, b son constantes. El cambio de variable dependiente que las convierte en separables es $y(t) = at + bx(t)$, ya que, derivando implícitamente,

$$y' = a + bx' = a + bf(y) \Leftrightarrow \frac{y'}{a + bf(y)} = 1.$$

Ejemplo 1.2.3 *Resolver la ecuación* $x' = (t + x)^2 - 1$. *Obtener la solución particular que verifica* $x(0) = 1$. *¿Y para* $x(0) = 0$*?*

Basta hacer el cambio $y(t) = t + x(t)$,

$$\frac{y'}{y^2} = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = t + C \Leftrightarrow y(t) = -\frac{1}{t + C},$$

$$x(t) = y(t) - t = -\frac{1}{t + C} - t,$$

soluciones que no están definidas en $t = -C$.

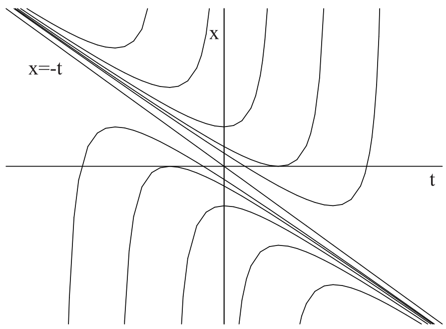

Figura 1.3: Soluciones de la ecuación $x' = (t + x)^2 - 1$

Para hallar la solución que verifica $x(0) = 1$, sustituimos $t = 0$ en la solución general,

$$1 = x(0) = -\frac{1}{C} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{1 - t} - t.$$

En cambio, para $x(0) = 0$,

$$0 = x(0) = -\frac{1}{C} \Rightarrow x(t) = -t,$$

obtenemos una solución que no está incluida formalmente en la solución general, ya que requeriría una constante C infinita. Es una solución singular. Observamos que es un caso límite al que tienden el resto de soluciones, para valores grandes de t y $-t$.

1.3. Ecuaciones exactas

Consideremos una función de dos variables, $F(t,x)$, tal que, si reemplazamos $x = x(t)$, obtenemos una constante, $F\big(t, x(t)\big) = k$. Es decir, estamos tratando con curvas de nivel de la función F.

Derivando esta expresión respecto a la variable t, obtenemos

$$0 = \frac{dF\big(t, x(t)\big)}{dt} = \left.\frac{\partial F(x,t)}{\partial t}\right|_{x=x(t)} + \left.\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x(t)} \frac{dx(t)}{dt},$$

con lo cual deducimos que $x(t)$ satisface una ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{\partial F}{\partial x} x' = -\frac{\partial F}{\partial t}, \tag{1.8}$$

Este tipo de ecuaciones de primer orden se denominan **ecuaciones exactas**, ya que provienen de la diferencial exacta de una función F, y tienen solución general sencilla $F\big(t, x(t)\big) = k$, como hemos visto.

El problema se reduce, pues, a identificar qué ecuaciones son exactas, para poder resolverlas de esta manera.

Si escribimos una ecuación de primer orden como

$$f(t,x)x' + g(t,x) = 0, \tag{1.9}$$

identificando términos con 1.8, obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f, \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = g,$$

que es un sistema de dos ecuaciones de primer orden en derivadas parciales para la función F, el cual, como tiene la forma de un gradiente,

$$\operatorname{grad} F = f\,\mathbf{u_x} + g\,\mathbf{u_t},$$

tendrá solución si y sólo si $\operatorname{rot}\operatorname{grad} F \equiv 0$, es decir, si se verifica

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \tag{1.10}$$

condición que es sencilla de comprobar.

Ejemplo 1.3.1 *Obtener la solución general de la ecuación $tx' + x = 0$. Obtener la solución que verifica $x(0) = 1$. Y la solución que verifica $x(1) = 1$.*

Esta ecuación es homogénea, pero también es exacta, ya que

$$f(t,x) = t, \quad g(t,x) = x, \quad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial t} = 1 - 1 = 0,$$

por tanto, la solución general se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones para el "potencial" F,

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial F}{\partial t}=x\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial x}=t\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}F(t,x)=tx+h(x)\\[2ex] \dfrac{dh(x)}{dx}=0\end{array}\right\}\Rightarrow F(t,x)=xt,$$

salvo una constante de integración, que omitimos, con lo cual la solución general de la ecuación diferencial es

$$k=F(t,x(t))\Rightarrow x(t)=\frac{k}{t}.$$

Estas curvas $xt=k$ son hipérbolas equiláteras.

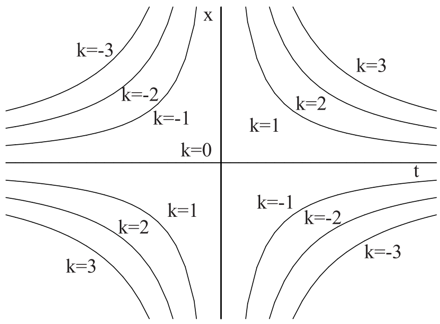

Figura 1.4: Soluciones de la ecuación $tx'+x=0$

Obsérvese que hay una solución constante, $x=0$, que se obtiene de manera directa sin más que imponer $x'=0$.

En $t=0$ no hay soluciones de la ecuación. Nótese que la ecuación diferencial carece de sentido en $t=0$. Por tanto, el problema de valores iniciales $x(0)=1$ no tiene solución.

En cambio, el problema para $x(1)=1$ implica $1=k$. Por tanto, la solución pedida en este caso es $x(t)=1/t$.

Un detalle importante de este método de resolución es que la exactitud de la ecuación depende fuertemente de la forma en la que se presente la ecuación.

Por ejemplo, si expresamos la ecuación del ejemplo anterior como $x'+x/t=0$, es fácil comprobar que, en esta forma, no es exacta. Para recuperar la ecuación exacta, en este caso, basta con volver a multiplicar la ecuación por un factor t.

Este método puede funcionar en varios casos, multiplicar una ecuación no exacta por una función, que denominaremos **factor integrante**, de modo que la ecuación resultante sea exacta. El problema radica en que no es fácil encontrar el factor integrante, aunque pueda existir. Sólo la práctica, o el uso de factores integrantes muy simples, puede facilitar la tarea.

Por ejemplo, consideremos una ecuación diferencial como 1.9. Supongamos que admite un factor integrante $Q(t,x)$, de modo que

$$Qfx'+Qg=0$$

es una ecuación exacta. Por tanto, las funciones Qf y Qg deberán satisfacer la condición de exactitud,

$$0 = \frac{\partial(Qg)}{\partial x} - \frac{\partial(Qf)}{\partial t} = g\frac{\partial Q}{\partial x} - f\frac{\partial Q}{\partial t} + Q\left\{\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial t}\right\},$$

que es una ecuación diferencial en derivadas parciales y, por ello, un problema más complicado que el que pretendíamos resolver.

No obstante, hay algunos casos sencillos que se pueden probar. Por ejemplo, si el factor integrante depende sólo de x,

$$\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dx} = \frac{1}{g}\left\{\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial x}\right\},$$

el segundo miembro de esta igualdad tiene que depender sólo de x, ya que el primero no depende de t. Si esta condición se cumple, el factor integrante se obtiene por simple integración,

$$\ln Q(x) = \int \frac{1}{g}\left\{\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial x}\right\} dx \Rightarrow Q(x) = \exp\left(\int \frac{1}{g}\left\{\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial x}\right\} dx\right),$$

omitiendo la constante de integración, pues sólo nos interesa un factor integrante.

Del mismo modo, si el factor integrante depende sólo de t,

$$\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{f}\left\{\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial t}\right\},$$

el segundo miembro de esta igualdad tiene que depender sólo de t y el factor integrante se obtiene por simple integración,

$$\ln Q(t) = \int \frac{1}{f}\left\{\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial t}\right\} dt \Rightarrow Q(t) = \exp\left(\int \frac{1}{f}\left\{\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial t}\right\} dt\right).$$

Ejemplo 1.3.2 *Obtener la solución general de la ecuación* $x' + x/t = 0$.

Esta ecuación no es exacta con coeficientes $f(t,x) = 1$, $g(t,x) = x/t$,

$$\frac{1}{g}\left\{\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial x}\right\} = -\frac{1}{x},$$

pero como la expresión anterior no depende de t, tiene un factor integrante dependiente sólo de x,

$$\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dx} = -\frac{1}{x} \Rightarrow \ln Q(x) = -\ln x \Rightarrow Q(x) = \frac{1}{x},$$

con lo cual la ecuación

$$\frac{x'}{x} + \frac{1}{t} = 0,$$

es exacta y se puede resolver de la manera habitual,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{1}{x} \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial t} = \dfrac{1}{t} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} F(t,x) = \ln|x| + h(t) \\[2ex] \dfrac{dh(t)}{dt} = \dfrac{1}{t} \end{array}\right\} \Rightarrow F(t,x) = \ln|xt|,$$

de donde recuperamos la solución general ya conocida,

$$\ln|xt| = K \Rightarrow x(t)t = \pm e^K = k.$$

Obviamente, como ya sabemos, como

$$\frac{1}{f}\left\{\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial t}\right\} = \frac{1}{t}$$

no depende de x, también podríamos obtener un factor integrante que dependa sólo de t,

$$\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{t} \Rightarrow Q(t) = t,$$

es decir, recuperamos el factor integrante que ya conocíamos.

En todo caso, este hecho, que una ecuación sea resoluble con dos factores integrantes distintos, no es en absoluto común. Simplemente refleja la multiplicidad de métodos que se pueden aplicar a una ecuación tan sencilla, ya que es lineal, homogénea y exacta.

1.4. Ecuaciones lineales de primer orden

Un caso sencillo, e importante, de ecuaciones resolubles de primer orden lo constituyen las ecuaciones lineales, que ya hemos mencionado anteriormente,

$$x' = a(t)x + f(t). \tag{1.11}$$

El caso homogéneo, $f(t) \equiv 0$, es integrable directamente, ya que es separable,

$$x' = a(t)x \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = \int a(t)\,dt \Leftrightarrow \ln|x| = \int a(t)\,dt + C\,,$$

$$x(t) = ke^{\int a(t)\,dt}, \tag{1.12}$$

donde $k = \pm e^C$, lo cual nos permite obviar el valor absoluto de x.

Es fácil ver que, si conocemos una solución particular de la ecuación inhomogénea 1.11, tenemos la solución general. Sean x_1, x_2 dos soluciones particulares, es decir, verifican

$$x_1' = a(t)x_1 + f(t), \quad x_2' = a(t)x_2 + f(t).$$

Restando las ecuaciones, es obvio que $x_h = x_2 - x_1$ es una solución particular de la ecuación homogénea,

$$x_h' = a(t)x_h.$$

Por tanto, dos soluciones de la ecuación inhomogénea difieren en una solución de la homogénea, $x_2 = x_1 + x_h$. Así pues, si añadimos a una solución particular, x_p, de la ecuación inhomogénea la solución general de la ecuación homogénea, estamos construyendo todas las soluciones posibles de la ecuación inhomogénea, es decir, su solución general,

$$x(t) = x_p(t) + ke^{\int a(t)\,dt}. \tag{1.13}$$

A su vez, también podríamos descomponer, usando el **principio de superposición lineal**, $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, con lo cual la solución particular se descompone a su vez en $x_p = x_{p1} + x_{p2}$, soluciones de las equaciones inhomogéneas con término independiente $f_1(t)$, $f_2(t)$,

$$x'_{p1} = a(t)x_{p1} + f_1(t), \quad x'_{p2} = a(t)x_{p2} + f_2(t),$$

como se comprueba fácilmente,

$$x'_p = x'_{p1} + x'_{p2} = a(t)\,(x_{p1} + x_{p2}) + (f_1(t) + f_2(t)) = a(t)x_p + f(t).$$

Es decir, podemos descomponer $f(t)$ en sumandos $f_1(t)$, $f_2(t)$ y obtener soluciones particulares para cada uno de ellos, x_{p1}, x_{p2}. Una solución particular de la ecuación será la suma de ambas.

La ventaja de esta manera de proceder radica en abordar varios problemas sencillos en lugar de un solo más complejo.

Todas estas consideraciones se extienden sin dificultad a ecuaciones lineales de orden superior y sistemas de ecuaciones lineales.

Todo se reduce, pues, a encontrar una solución particular de la ecuación inhomogénea. En casos sencillos podrá hacerse por inspección directa de la ecuación, pero existe un método algorítmico para generarla.

El **método de Lagrange o de variación de constantes** consiste en buscar soluciones de la forma 1.12 en las que se permite variar a la constante k,

$$x_p(t) = k(t)e^{\int a(t)\,dt}.$$

Al introducir esta expresión en la ecuación inhomogénea obtenemos

$$(k'(t) + a(t)k(t))\,e^{\int a(t)\,dt} = a(t)k(t)e^{\int a(t)\,dt} + f(t),$$

$$k'(t) = e^{-\int a(t)\,dt}f(t) \Rightarrow k(t) = \int e^{-\int a(t)\,dt}f(t)\,dt + c.$$

Por tanto, una solución particular de la ecuación inhomogénea es

$$x_p(t) = e^{\int a(t)\,dt}\int e^{-\int a(t)\,dt}f(t)\,dt,$$

y la solución general será

$$x(t) = ke^{\int a(t)\,dt} + e^{\int a(t)\,dt}\int e^{-\int a(t)\,dt}f(t)\,dt. \tag{1.14}$$

Y la solución del problema de valores iniciales con $x(t_0) = x_0$ será

$$x(t) = x_0e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} + e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds}\int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(u)\,du}f(s)\,ds. \tag{1.15}$$

Ejemplo 1.4.1 *Resolver la ecuación $x' = t^2x + t^2$. Hallar la solución que verifica $x(0) = 0$.*

Es una ecuación lineal con $a(t) = t^2$, $f(t) = t^2$. Comenzamos integrando la ecuación homogénea, $x' = t^2x$,

$$x_h(t) = k\exp\left(\int t^2\,dt\right) = ke^{t^3/3}.$$

Una solución de la ecuación inhomogénea se puede obtener por el método de Lagrange,

$$x_p(t) = e^{t^3/3} \int t^2 e^{-t^3/3}\, dt = -e^{t^3/3} e^{-t^3/3} = -1.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación es

$$x(t) = k e^{t^3/3} - 1.$$

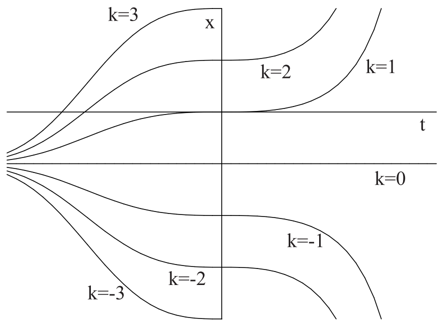

Figura 1.5: Soluciones de la ecuación $x' = t^2 x + t^2$

Una solución particular se podría haber obtenido en este caso de manera más sencilla buscando soluciones constantes, $x(t) = K$,

$$0 = x' = K t^2 + t^2 \Rightarrow K = -1.$$

Obsérvese que todas las soluciones proceden de la solución constante $x = -1$ y van divergiendo a medida que aumenta t. Son todas prolongables para todo valor de t, ya que no presentan polos.

La solución pedida verifica $x(0) = 0$,

$$0 = k - 1 \Rightarrow x(t) = e^{t^3/3} - 1.$$

Las ecuaciones lineales de primer orden se pueden ver como la aproximación de una ecuación más general en la que la velocidad x' se escribe como una serie de potencias en la variable dependiente x,

$$x' = g(t, x) = a_0(t) + a_1(t) x + a_2(t) x^2 + \cdots,$$

en la que nos hubiéramos quedado sólo con los dos primeros términos, $a_0(t) = f(t)$, $a_1(t) = a(t)$, es decir, con la aproximación a primer orden o aproximación lineal.

Por ello, es interesante poder tratar ecuaciones con términos superiores, como la ecuación de Bernoulli o la ecuación de Ricatti, las cuales, como veremos, se pueden reducir al caso lineal, tras un oportuno cambio de variable.

La llamada **ecuación de Bernoulli**,

$$x' = a(t) x + b(t) x^n, \tag{1.16}$$

con n real distinto de la unidad, se transforma sin más que realizar el cambio de variable dependiente $y(t) = x^{1-n}(t)$,

$$y' = (1-n)x^{-n}x' = (1-n)a(t)x^{1-n} + (1-n)b(t) = (1-n)a(t)y + (1-n)b(t),$$

en una ecuación lineal.

Ejemplo 1.4.2 *Resolver la ecuación $x' = tx + tx^2$. Obtener la solución que verifica $x(0) = 1$. Y la que verifica $x(0) = 0$.*

Es una ecuación de Bernoulli de coeficientes $a(t) = t = b(t)$ y $n = 2$. Hacemos el cambio $y = 1/x$,

$$y' = -ty - t,$$

para obtener una ecuación lineal, que se resuelve de manera inmediata. La parte homogénea,

$$y' = -ty \Rightarrow \frac{dy}{y} = -t\,dt \Rightarrow \ln|y| = C - t^2/2 \Rightarrow y_h(t) = ke^{-t^2/2},$$

denotando $k = \pm e^C$.

Y una solución particular de la ecuación inhomogénea, que podemos obtener por el método de variación de constantes,

$$y_p(t) = e^{-t^2/2}\int(-t)e^{t^2/2}\,dt = -e^{-t^2/2}e^{t^2/2} = -1,$$

$$y(t) = ke^{-t^2/2} - 1 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{ke^{-t^2/2} - 1}.$$

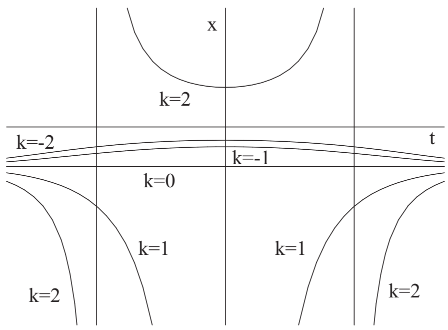

Figura 1.6: Soluciones de la ecuación $x' = tx + tx^2$

Obsérvese que las soluciones con k positivo no están definidas para todo valor de t, ya que son las únicas para las que el denominador se puede anular. En cambio, las soluciones con k negativo o nulo son regulares y negativas. Todas las soluciones tienden, cuando t tiende a $\pm\infty$ a la solución constante $x = -1$.

Buscamos la solución que verifica $x(0) = 1$,

$$1 = \frac{1}{k-1} \Rightarrow k = 2 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2e^{-t^2/2} - 1}.$$

La solución que verifica $x(0) = 0$,

$$0 = \frac{1}{k-1},$$

en principio no parece alcanzable, ya que habría que tomar $k = \infty$. Como hemos visto en ejemplos precedentes, este es un problema de las ecuaciones no lineales, en las que la solución general puede no recoger todas las soluciones por una inadecuada elección de constantes de integración. Si expresamos la solución general como,

$$x(t) = \frac{K}{e^{-t^2/2} - K}, \quad K = 1/k,$$

vemos que la solución buscada es sencillamente

$$0 = \frac{K}{1-K} \Rightarrow K = 0 \Rightarrow x(t) = 0,$$

solución límite que habíamos obviado en la solución general, que podríamos haber encontrado buscando las soluciones constantes de la ecuación,

$$x = c \Rightarrow 0 = x' = t(c + c^2) \Rightarrow c(c+1) = 0 \Rightarrow x = c = 0, -1.$$

Luego esta ecuación tiene dos soluciones constantes.

Otro ejemplo de ecuación reducible a lineal es la **ecuación de Ricatti**,

$$x' = a(t)x + b(t)x^2 + f(t), \tag{1.17}$$

que en el fondo es una ecuación de Bernoulli inhomogénea con $n = 2$.

Si conocemos una solución particular, $x_p(t)$,

$$x_p'(t) = a(t)x_p + b(t)x_p^2 + f(t),$$

haciendo el cambio $x = x_p + y$,

$$x' = x_p' + y' = a(x_p + y) + b(x_p^2 + 2x_p y + y^2) + f \Rightarrow y' = \big(a + 2bx_p\big)y + by^2,$$

esta ecuación se reduce a una ecuación de Bernoulli de coeficientes $a + 2bx_p$, b y es, por tanto, resoluble.

Ejemplo 1.4.3 *Resolver la ecuación $x' = 2tx + tx^2 + t$. Obtener la solución que verifica $x(0) = 0$.*

Claramente se trata de una ecuación de Ricatti con $a(t) = 2t$, $b(t) = t = f(t)$. Encontrar una solución particular es sencillo en este caso, ya que las funciones constantes, $x = K$,

$$0 = x' = t(K^2 + 2K + 1) \Rightarrow K = -1,$$

nos proporcionan una solución $x_p(t) = -1$. Por tanto, el problema se reduce a realizar el cambio de variable $x(t) = y(t) - 1$, para obtener una ecuación separable que se resuelve de manera inmediata,

$$y' = ty^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = t\,dt \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{t^2 + k}{2} \Rightarrow y(t) = \frac{-2}{t^2 + k} \Rightarrow x(t) = -\frac{t^2 + k + 2}{t^2 + k}.$$

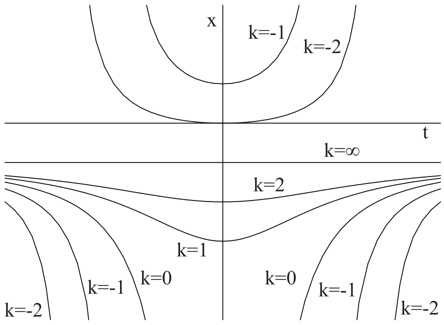

Figura 1.7: Soluciones de la ecuación $x' = 2tx + tx^2 + t$

Obsérvese que la solución constante $x(t) = -1$ no está incluida en esta expresión general, ya que se obtiene en el límite $k \to \infty$. Es una solución singular. Las soluciones son regulares si k es positivo. En caso contrario, no están definidas para todo valor de t, ya que se anula el denominador, $t = \pm\sqrt{-k}$. Todas las soluciones tienden a la constante, $x = -1$, cuando t tiende a $\pm\infty$.

Obtenemos la solución que verifica $x(0) = 0$,

$$0 = -\frac{k+2}{k} \Rightarrow k = -2 \Rightarrow x(t) = \frac{t^2}{2-t^2}.$$

1.5. Análisis cualitativo

En la mayoría de los casos las ecuaciones diferenciales de primer orden no serán solubles por medio de funciones analíticas conocidas. Sin embargo, esto no quiere decir que no podamos extraer información acerca de las soluciones.

Una información muy útil que nos proporciona la ecuación de primer orden, cuando la escribimos en la forma $x' = f(t,x)$, es que la función f nos da la pendiente de la solución o soluciones, si existen, que pasan por cada punto (t,x) del plano TX. Es decir, estamos viendo la ecuación diferencial como un campo vectorial $\mathbf{v}(t,x) = \mathbf{u_t} + f(t,x)\,\mathbf{u_x}$,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v^x}{v^t} = f,$$

de modo que las órbitas de sus líneas de campo son precisamente las curvas dadas por las soluciones $x(t)$ de la ecuación diferencial. Por tanto, $\mathbf{v}$ nos da el **campo de direcciones** tangentes a las curvas que son soluciones de la ecuación diferencial.

Conociendo las tangentes, podemos trazar de modo aproximado las gráficas de las soluciones de la ecuación diferencial. Para ayudarnos, podemos trazar las líneas **isóclinas** de la ecuación $x' = f(t,x)$, que simplemente son las líneas de pendiente constante K,

$$f(t,x) = K,$$

que son especialmente útiles para trazar las líneas del campo.

Ejemplo 1.5.1 *Líneas isóclinas de la ecuación $x' = x - t^2$.*

Las líneas isóclinas de esta ecuación son de la forma,

$$x = t^2 + K,$$

es decir, parábolas de eje vertical y vértice $(0, K)$. Cuánto más alto está el vértice, mayor es la pendiente.

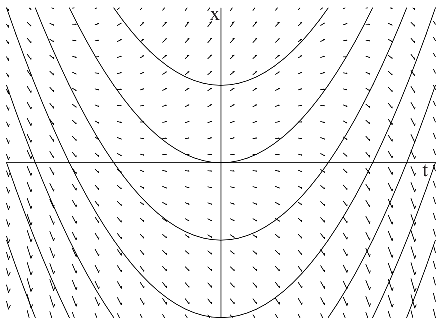

Figura 1.8: Isóclinas de la ecuación $x' = x - t^2$

Uniendo las flechas de las isóclinas, podemos trazar de manera aproximada las soluciones de la ecuación.

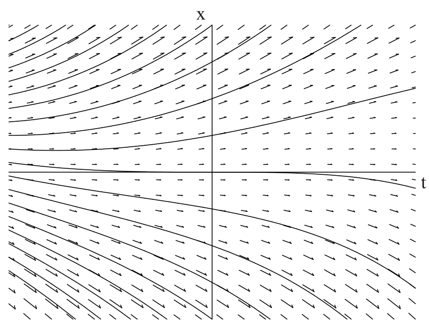

Figura 1.9: Comparación entre soluciones aproximadas y exactas de la ecuación $x' = x - t^2$

Pero como esta es una ecuación lineal, se puede resolver de manera exacta. La solución de la ecuación homogénea,

$$x' = x \Rightarrow x_h(t) = ke^t,$$

y una solución particular de la ecuación inhomogénea,

$$x_p(t) = -e^t \int t^2 e^{-t}\, dt = t^2 + 2t + 2,$$

con lo cual la solución general de la ecuación lineal es

$$x(t) = t^2 + 2t + 2 + ke^t.$$

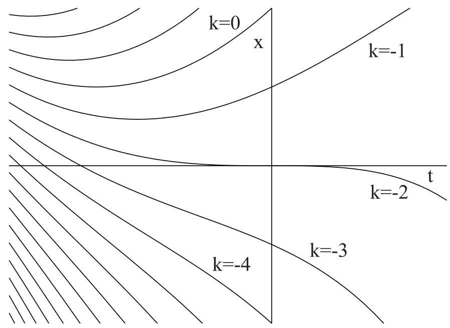

Figura 1.10: Soluciones de la ecuación $x' = x - t^2$

Una manera más directa de obtener una solución particular sería buscar una solución polinómica de grado dos, $x_p(t) = At^2 + Bt + C$, que sustituida en la ecuación,

$$2At + B = At^2 + Bt + C - t^2 \Rightarrow A = 1,\ B = 2,\ C = 2,$$

nos proporciona precisamente la misma solución particular.

1.6. Existencia y unicidad de soluciones

Hasta el momento hemos visto varios ejemplos de resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden y hemos extraído información a partir de las soluciones. En particular, hemos visto que lo común es que el problema de valores iniciales tenga solución única, es decir, que por el punto (t_0, x_0) del plano pase una única gráfica de una solución $x(t)$ de la ecuación $x' = f(t, x)$. Sin embargo, hemos visto ejemplos concretos en los que por un mismo punto pasaban varias gráficas.

Esta información, afortunadamente, se puede extraer de la ecuación sin necesidad de conocer la solución general o del problema de valores iniciales. Daremos unos resultados al respecto sencillos de aplicar.

Teorema 1.6.1 ***Teorema de existencia de Peano:*** *Sea $f(t,x)$ una función continua y acotada ($|f(t,x)| \leq M$ para todo $(t,x) \in R$) en un rectángulo R centrado en (t_0, x_0), $R = (t_0 - a, t_0 + a) \times (x_0 - b, x_0 + b)$. Entonces existe al menos una solución del problema de valores iniciales $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ en el intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ siendo $\delta = \text{mín}(a, b/M)$.*

Olvidándonos por un momento del tamaño del intervalo, el teorema simplemente expresa que si f es continua y acotada en un entorno de (t_0, x_0), por este punto pasa al menos una gráfica de una solución $x(t)$ del problema de valores iniciales $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ y que esta solución existe para valores de t en un entorno de t_0.

Esto quiere decir que por los puntos en el interior de cualquier rectángulo R donde la función f sea continua y acotada pasa al menos una gráfica de una solución de la ecuación.

Sin embargo, este poderoso teorema no afirma nada acerca de la unicidad de la solución. Parece lógico que, imponiendo condiciones más estrictas que la simple continuidad y acotación de la función f, podamos llegar a demostrar la unicidad.

La solución nos la da el bello teorema de Picard, de sencilla demostración a partir del teorema del punto fijo.

Teorema 1.6.2 ***Teorema de existencia y unicidad de Picard-Lindelöf:*** *Sea $f(t,x)$ una función continua, acotada y lipschitziana respecto de la variable x (existe k contante tal que $|f(t,x_2)-f(t,x_1)| \leq k|x_2-x_1|$) en un rectángulo R centrado en (t_0,x_0), $R=(t_0-a,t_0+a)\times(x_0-b,x_0+b)$. Entonces existe solución única del problema de valores iniciales $x'=f(t,x)$, $x(t_0)=x_0$ en el intervalo $(t_0-\delta,t_0+\delta)$ siendo $\delta=\text{mín}(a,b/M,1/2k)$.*

La exigencia de que la función f sea lipschitziana implica que los cocientes

$$\frac{f(t,x_2)-f(t,x_1)}{x_2-x_1},$$

deben estar acotados por una constante k. Por tanto, esta condición se puede sustituir por otra más sencilla de aplicar, aunque más estricta, que es simplemente que función f tenga derivada continua y acotada respecto a la variable x.

Corolario 1.6.1 *Si $f(t,x)$ y $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ son funciones continuas en un entorno de (t_0,x_0), entonces existe solución única del problema de valores iniciales $x'=f(t,x)$, $x(t_0)=x_0$ en un entorno de t_0.*

Por tanto, si en un recinto compacto la función f y su derivada parcial respecto a la variable dependiente x son continuas, por cada punto interior del recinto pasará una y sólo una gráfica de una solución de la ecuación $x'=f(t,x)$. Es decir, las gráficas de las soluciones no se cortan en ningún punto.

Revisemos los ejemplos anteriores a la luz de estos teoremas:

En el ejemplo 1.2.1 la función es $f(t,x)=tx$, polinómica y, por tanto, continua y con derivadas de todos los órdenes continuas en cualquier recinto. Por tanto, el problema de valores iniciales tiene siempre solución única. Lo mismo sucede con la ecuación del ejemplo 1.2.3, de función $f(t,x)=(t+x)^2-1$, con la ecuación del ejemplo 1.3.2, de función $f(t,x)=t^2x+t^2$, la del ejemplo 1.4.2, de $f(t,x))=tx+tx^2$, y la del ejemplo 1.4.3, de $f(t,x))=2tx+tx^2+t$, y la del ejemplo 1.5.1, de $f(t,x))=x-t^2$.

En el ejemplo 1.2.2, la función es $f(t,x)=x/t-x^2/t+1$ que es racional y, por tanto, continua y con derivadas de todos los órdenes continuas en cualquier recinto que no incluya los puntos donde se anula el denominador. Por tanto, el problema de valores iniciales tiene solución única salvo tal vez para $t_0=0$. Observamos que es así. Por $(0,0)$ pasan infinitas gráficas de soluciones y por los puntos $(0,x_0)$, $x_0\neq 0$ no pasa ninguna.

Algo parecido sucede con el ejemplo 1.3.1, donde la función es $f(t,x)=-x/t$. También en este caso el problema de valores iniciales tiene solución única salvo tal vez para $t_0=0$. Por $(0,0)$ pasa una única solución $x(t)=0$ y por los puntos $(0,x_0)$, $x_0\neq 0$ no pasa ninguna.

Comparando el teorema de Peano con el teorema de Picard-Lindelöf, observamos que si la función $f(t,x)$ es continua, pero no es lipschitziana o derivable, podría darse el caso de problemas de valores iniciales cuya solución estuviera garantizada, pero no fuera única. Un ejemplo podría ser el siguiente:

Ejemplo 1.6.1 *Existencia y unicidad de soluciones de la ecuación* $x' = 2\sqrt{x}$.

La ecuación es separable, por tanto, su solución general,

$$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \Rightarrow \sqrt{x} = t - t_0 \Rightarrow x(t) = (t - t_0)^2,$$

está formada por parábolas verticales de vértice $(t_0, 0)$.

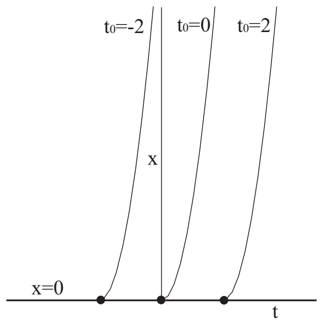

Figura 1.11: Soluciones de la ecuación $x' = 2\sqrt{x}$

Buscamos soluciones de la forma $x(t) = A$,

$$0 = 2\sqrt{A} \Rightarrow A = 0,$$

luego $x(t) = 0$ es una integral singular, ya que no está incluida en la solución general, ni siquiera como caso límite, para ningún valor de t_0. De hecho, esta recta es la envolvente de las parábolas de la solución general, ya que es tangente a todas ellas en el vértice.

El teorema de Peano es aplicable a todo dato inicial $x_0 = x(t_0) \geq 0$, ya que $f(t,x) = 2\sqrt{x}$ es una función continua. En cambio, el teorema de existencia y unicidad sólo es aplicable para $x_0 = x(t_0) > 0$, ya que f no es derivable siquiera en $x = 0$.

¿Qué sucede, pues, en los puntos del eje $x = 0$? El teorema de Peano afirma que existe solución para el problema de valores iniciales con $0 = x(t_0)$, pero ningún teorema garantiza que sea única.

De hecho, eso es lo que hemos comprobado explícitamente. Cualquier problema de valores iniciales de la forma $0 = x(t_0)$ tiene dos soluciones al menos, $x(t) = 0$ y $x(t) = (t - t_0)^2$. Por tanto, la solución para este problema existe, pero no es única.

Y no sólo es que la solución sea doble, sino que podemos generar infinitas soluciones, pegando trozos de recta con parábola,

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t \leq k \\ (t-k)^2 & t \geq k \end{cases},$$

para cualquier valor de $k \geq t_0$. Obviamente, estas funciones son continuas y derivables en $t = k$, $x'(k) = 0$, aunque no son de clase C^2. También podemos usar funciones de la forma

$$x(t) = \begin{cases} (t-k)^2 & t \leq k \\ 0 & t \geq k \end{cases},$$

para $k \leq t_0$.

1.7. Ecuaciones autónomas

Las ecuaciones de primer orden autónomas se integran de manera inmediata,

$$x' = f(x) \Rightarrow t = \int \frac{dx}{f(x)} + k,$$

pero también es posible extraer información de ellas sin necesidad de obtener su solución general. Supondremos que f' existe y es continua para poder aplicar el teorema de existencia y unicidad de soluciones.

La primera propiedad, aparente ya en la solución general, es que si $x(t)$ es una solución, $x(t+t_0)$ es también una solución, ya que f no depende de t y, por tanto, $x'(t) = f(x) = x'(t+t_0)$. Es decir, las soluciones se obtienen unas a partir de otras por traslación.

Otra propiedad es que los ceros de f proporcionan las soluciones constantes: si $f(x_0) = 0$, $x(t) = x_0$ es solución de la ecuación $x' = f(x)$. A estas soluciones se las denomina **soluciones de equilibrio**.

Además, las soluciones de $x' = f(x)$ sólo pueden ser constantes, crecientes o decrecientes. No pueden tener máximos ni mínimos, ya que en ellos $x'(t_0) = 0 = f(x_0)$. Es decir, se cortarían con soluciones de equilibrio, lo cual no está permitido por el teorema de existencia y unicidad.

Por tanto, las soluciones no constantes están acotadas entre dos soluciones constantes, o no están acotadas, pues son monótonas crecientes o decrecientes.

Ejemplo 1.7.1 *Resolver la ecuación $x' = x + x^2$.*

Esta ecuación autónoma es sencilla de resolver,

$$\frac{dx}{x+x^2} = dt \Rightarrow \ln|x| - \ln|x+1| = t - t_0 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{ke^{-t}-1}, \ k = \pm e^{t_0}.$$

Las soluciones de equilibrio son las que verifican $x + x^2 = 0$, es decir, hay dos, $x(t) = 0$, $x(t) = -1$. Nótese que la primera no es accesible por medio de la solución general, ya que corresponde a una constante k infinita.

Tenemos, pues, tres regiones de soluciones:

- Para $x < -1$ las soluciones son crecientes, pues $x' = f(x) > 0$, y tienden, por tanto, a la solución de equilibrio $x = -1$ cuando t tiende a infinito.

- Para $x \in (-1, 0)$ las soluciones son decrecientes, pues $x' = f(x) < 0$, y tienden, por tanto, a la solución de equilibrio $x = 0$ cuando t tiende a menos infinito y a $x = -1$ cuando t tiende a infinito.

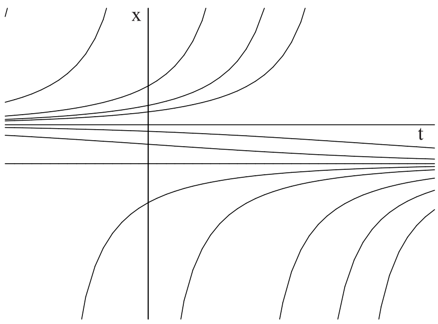

Figura 1.12: Soluciones de la ecuación $x' = x + x^2$

- Para $x > 0$ las soluciones son crecientes, pues $x' = f(x) > 0$, y tienden, por tanto, a la solución de equilibrio $x = 0$ cuando t tiende a menos infinito.

Obsérvese que esta información cualitativa la obtenemos sin necesidad de usar la solución general de la ecuación.

1.8. Métodos numéricos y aproximados

Dado que lo anormal es que podamos resolver de manera exacta una ecuación diferencial, aparte de la información cualitativa que se ha mencionado, es preciso contar con herramientas numéricas que permitan resolver las ecuaciones de manera aproximada.

No es objeto de esta asignatura la resolución por métodos numéricos de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, se darán algunos métodos sencillos que pueden dar una idea de su funcionamiento.

El primero de todos nos lo proporciona la demostración del teorema de Picard. Formalmente podemos escribir la solución de un problema de valores iniciales,

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

del siguiente modo,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)\, ds,$$

lo cual en el fondo supone reescribir el problema como una ecuación integral, ya que la expresión no se puede integrar directamente, al desconocer la forma de $x(s)$.

Sin embargo, esta expresión sugiere que podemos acercarnos tanto como queramos a la solución del problema de manera iterativa, tomando x_0 como primera aproximación de $x(s)$,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_0\big)\, ds \\ x_2(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_1(s)\big)\, ds \\ \ldots \\ x_n(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_{n-1}(s)\big)\, ds \end{aligned}$$

La convergencia de este método, bajo las condiciones del teorema de Picard, está garantizada por el propio teorema.

Este método se conoce como **método de aproximaciones sucesivas o de Picard**.

Ejemplo 1.8.1 *Resolver el problema $x' = tx$, $x(0) = 1$. Resolverlo asimismo para $x(0) = 0$.*

Por el ejemplo 1.2.1 sabemos ya que la solución del problema es

$$x(t) = e^{t^2/2},$$

pero vamos a tratar de obtener una solución aproximada,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 + \int_0^t s\, ds = 1 + \frac{t^2}{2} \\ x_2(t) &= 1 + \int_0^t s x_1(s)\, ds = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} \\ x_3(t) &= 1 + \int_0^t s x_2(s)\, ds = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^6}{48} \\ \ldots \end{aligned}$$

y observamos que obtenemos simplemente el desarrollo de McLaurin de la solución en este caso,

$$e^{t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^6}{48} + O(t^8).$$

Para el valor inicial $x_0 = 0$, el método de Picard conduce a la solución $x(t) = 0$, consistente con la calculada directamente.

Obviamente, este método será viable si conduce a integrales sencillas, de lo contrario estamos abocados a la integración numérica. Por lo que es preferible en general usar otro tipo de métodos, los métodos numéricos.

La idea de los métodos numéricos consiste en sustituir la variable t en un intervalo $[a, b]$ por una sucesión de valores equiespaciados,

$$t_0 = a,\ t_1 = a + h,\ \ldots\ t_n = a + nh,\ \ldots\ t_N = a + Nh = b, \quad h = \frac{b-a}{N},$$

tan próximos como queramos, sin más que aumentar el número de valores N. Estos valores se corresponden con otros, $x_0, \ldots, x_n, \ldots, x_N$, que aproximan los de

$x(t_0), \ldots, x(t_n), \ldots, x(t_N)$ y que obtendremos convirtiendo la ecuación diferencial en un sistema de ecuaciones en diferencias. Los distintos métodos numéricos proceden de la elección de esta ecuación en diferencias.

Para resolver el problema de valores iniciales

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0,$$

en un intervalo $[a,b]$, $a = x_0$, una de las primeras ideas que se nos pueden ocurrir sería aproximar el valor de la derivada por el correspondiente cociente incremental,

$$x'(t_n) = \frac{dx(t_n)}{dt} \simeq \frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n} = \frac{x_{n+1} - x_n}{h},$$

con lo cual el problema discreto que aproxima el problema de valores iniciales será

$$x_{n+1} = x_n + hf\big(t_n, x_n\big), \quad n = 0, \ldots, N-1,$$

con la condición inicial x_0. Este sistema de N ecuaciones con N incógnitas, $x_1, \ldots, x_N$ puede resolver de manera iterativa. Este método se conoce como **método de Euler**.

Este método, no obstante su sencillez, converge muy lentamente, con lo cual no es muy práctico. Proporciona un error de orden h. Una estrategia para mejorarlo sería tomar más términos en el desarrollo de Taylor de $f(t,x)$. Otra alternativa sería considerar en la aproximación, en lugar del valor de f en (t_n, x_n), el valor correspondiente al siguiente punto de acuerdo con el método de Euler, (t_{n+1}, x_{n+1}). Si tomamos la media entre los dos, obtenemos el **método modificado de Euler**, que proporciona una convergencia más rápida que el método convencional de Euler, con un error de orden h^2,

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}\left\{f\big(t_n, x_n\big) + f\big(t_{n+1}, x_n + hf(t_n, x_n)\big)\right\}, \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

En realidad, con este tipo de métodos se puede llegar a errores de orden h^k. Son los métodos de Runge-Kutta de orden k.

Ejemplo 1.8.2 *Resolver numéricamente el problema de valores iniciales* $x' = x + t$, $x(0) = 0$ *para* $t \in [0,1]$ *con intervalos de* 0,1. *Resolver igualmente con condición* $x(0) = -1$.

Esta ecuación se puede resolver de manera exacta con el cambio de variable $y = x + t$,

$$x' = y' - 1 = y \Rightarrow \ln|y+1| = t + C \Rightarrow y(t) = ke^t - 1 \Rightarrow x(t) = ke^t - 1 - t,$$

y con la condición $x(0) = 0$,

$$x(t) = e^t - 1 - t.$$

Aplicando los métodos de Euler y Euler modificado con intervalos $h = 0{,}1$, obtenemos los resultados de la tabla 1.1.

Obsérvese, como era esperable, que la precisión del método de Euler es muy inferior a la del método de Euler modificado.

Del mismo modo, podemos aplicar los métodos a la condición $x(0) = -1$. Los resultados se incluyen en la tabla 1.2.

t	**Exacto**	**Euler**	**Euler mod.**
0.0	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.0052	0.0000	0.0005
0.2	0.0214	0.0100	0.0210
0.3	0.0499	0.0310	0.0492
0.4	0.0918	0.0641	0.0909
0.5	0.1487	0.1105	0.1474
0.6	0.2221	0.1716	0.2204
0.7	0.3138	0.2487	0.3116
0.8	0.4255	0.3436	0.4228
0.9	0.5596	0.4579	0.5562
1.0	0.7183	0.5937	0.7140

Cuadro 1.1: Valores exactos y numéricos para $x' = x + t$, $x(0) = 0$

t	**Exacto**	**Euler**	**Euler mod.**
0.0	-1.0	-1.0	-1.0
0.1	-1.1	-1.1	-1.1
0.2	-1.2	-1.2	-1.2
0.3	-1.3	-1.3	-1.3
0.4	-1.4	-1.4	-1.4
0.5	-1.5	-1.5	-1.5
0.6	-1.6	-1.6	-1.6
0.7	-1.7	-1.7	-1.7
0.8	-1.8	-1.8	-1.8
0.9	-1.9	-1.9	-1.9
1.0	-2.0	-2.0	-2.0

Cuadro 1.2: Valores exactos y numéricos para $x' = x + t$, $x(0) = -1$

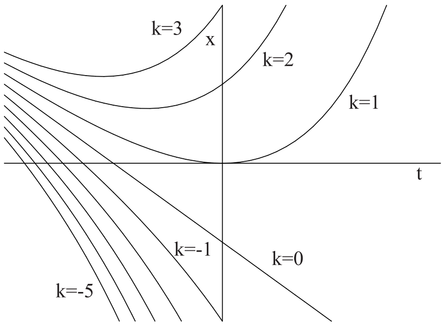

Figura 1.13: Soluciones de la ecuación $x' = x + t$

El resultado puede parecer sorprendente, pero no lo es en absoluto. La solución del problema es la recta $x(t) = -1 - t$. Por tanto, la pendiente de la gráfica es constante y coincide con el valor aproximado obtenido como cociente incremental. Por eso los métodos numéricos proporcionan valores exactos en este caso.