Capítulo 2

Sistemas y ecuaciones de orden superior

Objetivos

- Resolver sistemas de ecuaciones de primer orden y ecuaciones de orden superior.
- Conocer las propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales.
- Aplicar los teoremas de existencia y unicidad.

2.1. Conceptos

En este tema estudiaremos las propiedades de los sistemas de ecuaciones diferenciales cuasilineales de primer orden y, como consecuencia, las propiedades de las ecuaciones diferenciales de orden superior al primero, que se reducen a los anteriores sin más que realizar sencillos cambios de variable.

Los sistemas de ecuaciones de los que nos ocuparemos son los cuasilineales, para los cuales podemos despejar las derivadas de las variables dependientes, $x_1, \ldots, x_n$. Por tanto, los podremos expresar como

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ &\cdots \qquad (2.1) \\ x_n' &= f_n(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad (2.2) \end{aligned}$$

donde a las funciones $f_1, \ldots, f_n$ se les exigirán algunas buenas propiedades, como ser continuas al menos.

El problema de valores iniciales para estos sistemas es una simple generalización del estudiado para una única ecuación,

$$x_1(t_0) = x_{10}, \ \ldots, \ x_n(t_0) = x_{n0},$$

es decir, una condición por cada variable y ecuación.

Podemos agilizar la notación denotando

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix},$$

de modo que adoptamos una notación vectorial para los sistemas,

$$X' = F(t, X), \quad X(t_0) = X_0.$$

Una solución del sistema de ecuaciones será, pues, un vector de n funciones, $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^t$, que satisfaga todas las ecuaciones del sistema.

Los resultados de existencia y unicidad para el problema de valores iniciales son similares a los enunciados para ecuaciones de primer orden.

Teorema 2.1.1 *Si f_i y $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$, son funciones continuas en un entorno de $(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0})$, entonces existe solución única del problema de valores iniciales $X' = F(t, X)$, $X(t_0) = X_0$ en un entorno de t_0.*

Ejemplo 2.1.1 *Estudiar la existencia y unicidad de soluciones del sistema $x' = y/t$, $y' = t/x$.*

Las funciones $f_1(t, x, y) = y/t$, $f_{1,y}(t, x, y) = 1/t$ son continuas salvo en el cero del denominador, $t = 0$.

La función $f_2(t, x, y) = t/x$, $f_{2,x}(t, x, y) = -t/x^2$ son continuas salvo en el cero del denominador, $x = 0$.

Las funciones $f_{1,x}(t, x, y) = 0 = f_{2,y}(t, x, y)$ son constantes y continuas.

Recapitulando, el sistema tiene solución única para cualquier conjunto de valores iniciales (t_0, x_0, y_0) con $t_0 \neq 0 \neq x_0$.

Por su parte, el problema de valores iniciales para las ecuaciones diferenciales de orden n,

$$\begin{aligned} &x^{n)} = f\left(t, x, x', \ldots, x^{n-1)}\right), \\ &x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0, \quad \ldots \quad x^{n-1)}(t_0) = x_0^{n-1)}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

se puede reducir al problema para un sistema de n ecuaciones diferenciales de orden uno, sin más que realizar el cambio de variables

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad \ldots \quad x_n = x^{n-1)},$$

que proporciona el sistema

$$\begin{aligned} &x'_1 = x_2 \\ &\ldots \\ &x'_{n-1} = x_n \\ &x'_n = f(t, x_1, \ldots, x_n), \\ &x_1(t_0) = x_0, \quad x_2(t_0) = x'_0, \quad \ldots \quad x_n(t_0) = x^{n-1)}(t_0), \end{aligned} \tag{2.4}$$

con lo cual el vector de funciones del sistema es simplemente $F = (x_2, \ldots, x_n, f)^t$ y el vector de condiciones iniciales, $\left(x_0, x'_0, \ldots, x_0^{n-1)}\right)^t$.

Ejemplo 2.1.2 *Expresar el problema $x'' = -\sin x$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$ como un problema para un sistema de ecuaciones de primer orden.*

Tomamos $x_1 = x$, $x_2 = x'$. Por tanto,

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -\sin x_1, \quad x_1(0) = x_0, \quad x_2(0) = x'_0.$$

Al poder expresar las ecuaciones de orden superior como sistemas, el teorema de existencia y unicidad para sistemas se aplica directamente a ecuaciones de orden n:

Corolario 2.1.1 *Si f y $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x'}$,... son funciones continuas en un entorno de $\left(t_0, x_0, x'_0 \dots, x_0^{n-1)}\right)$, entonces existe solución única del problema de valores iniciales (2.3) en un entorno de t_0.*

El razonamiento es claro. El vector F está formado por monomios, $x_2, \dots, x_n$, que son de clase C^∞ y por la función f. Por tanto, es esta última y sus derivadas las que determinan si hay solución única o no. □

Ejemplo 2.1.3 *Estudiar la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación $x'' = t^3 + x/\sin x'$.*

La función $f(t, x, x') = t^3 + x/\sin x'$ es continua salvo en los ceros del denominador, $x' = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

La función $f_x(t, x, x') = 1/\sin x'$ es continua en los mismos puntos que la anterior.

La función $f_{x'} = (t, x, x') = -x \cos x'/\sin^2 x'$ es continua en los mismos puntos que la anterior.

Por tanto, recapitulando, la ecuación tiene solución única para cualquier conjunto de valores iniciales (t_0, x_0, x'_0) con $x'_0 \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.2. Resolución de ecuaciones de orden superior

Las ecuaciones de orden superior al primero que son resolubles por métodos analíticos son muchas menos que las que se podían resolver de primer orden. No obstante, hay algunos casos en los que el orden se puede reducir, lo cual facilita la integración.

Si no aparece explícitamente en la ecuación la variable x, podemos reducir una unidad el orden haciendo el cambio de variable dependiente $y = x'$,

$$x^{n)} = f\left(t, x', \dots, x^{n-1)}\right) = y^{n-1)} = f\left(t, y, \dots, y^{n-2)}\right).$$

Ejemplo 2.2.1 *Resolver la ecuación $x'' = x' + 1$.*

Hacemos el cambio $y = x'$. Denotando $k_1 = \pm e^C$,

$$y' = y + 1 \Rightarrow \ln|y + 1| = t + C \Rightarrow x'(t) = y(t) = k_1 e^t - 1 \Rightarrow x(t) = k_2 + k_1 e^t - t,$$

y obtenemos la solución general, que, obviamente, depende de dos parámetros, ya que es una ecuación de segundo orden.

Por supuesto, este proceso se puede iterar si, aparte de x, no aparece x' y derivadas superiores en la ecuación. Basta tomar $y = x^{k)}$, siendo k el orden de la derivada de menor orden que aparece en la ecuación.

Ejemplo 2.2.2 *Resolver la ecuación* $x''' = x'' + t$.

Hacemos el cambio $y = x''$ y después de resolver la ecuación en y,

$$y' = y + t \Rightarrow x''(t) = y(t) = k_1 e^t - t - 1 \Rightarrow x'(t) = k_1 e^t - \frac{t^2}{2} - t + k_2,$$

integramos dos veces para obtener $x(t)$,

$$x(t) = k_1 e^t - \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + k_2 t + k_3,$$

que depende de tres parámetros, por tratarse de una ecuación de tercer orden.

Otra situación propicia para la reducción de grado es la de las ecuaciones autónomas, en las que no aparece la variable independiente t. El cambio sugerido es tomar la propia x como nueva variable dependiente y tomar como variable independiente $y = x'$. El resto de derivadas las obtenemos por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= y, \\
\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = y\frac{dy}{dx}, \\
\frac{d^3x}{dt^3} &= \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(y\frac{dy}{dx}\right) = y\frac{d}{dx}\left(y\frac{dy}{dx}\right) = y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2\frac{d^2y}{dx^2},
\end{aligned}$$

lo cual permite reducir el grado una unidad, aunque al precio de incluir expresiones no lineales.

Ejemplo 2.2.3 *Resolver la ecuación* $x'' + \omega^2 x = 0$.

Esta es la famosa ecuación del oscilador armónico, que describe la elongación de un muelle ideal de frecuencia ω.

Realizamos el cambio $x' = y$ y obtenemos una ecuación separable,

$$y\frac{dy}{dx} = -\omega^2 x \Rightarrow y\,dy = -\omega^2 x\,dx,$$

que a su vez conduce a otra ecuación separable de primer orden,

$$x'^2 = y^2 = -\omega^2 x^2 + C \Rightarrow x' = \pm\sqrt{C - \omega^2 x^2} \Rightarrow \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{\omega x}{\sqrt{C}}\right) = t - t_0,$$

que conduce al resultado conocido, en función de la amplitud $A = \sqrt{C}/\omega$ y el desfase t_0,

$$x(t) = A \sin \omega(t - t_0).$$

Este resultado se puede expresar de diversas maneras, simplemente desarrollando el seno,

$$x(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t, \quad a = A\cos\omega t_0,\ b = -A\sin\omega t_0,$$

o usando la relación entre coseno y seno,

$$x(t) = A\cos\omega(t - T_0), \quad T_0 = t_0 + \frac{\pi}{2\omega},$$

o incluso en función de exponenciales imaginarias,

$$x(t) = Ce^{i\omega t} + De^{-i\omega t}, \quad C = \frac{A}{2i}e^{-i\omega t_0},\ D = -\frac{A}{2i}e^{i\omega t_0},$$

según convenga para el problema concreto.

Obviamente, esta no es la manera más eficiente de obtener este resultado.

2.3. Sistemas de ecuaciones lineales

Nos centraremos ahora en las propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales, es decir, en los sistemas de la forma

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ &\cdots \qquad (2.5) \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t), \qquad (2.6) \end{aligned}$$

que podemos expresar en forma vectorial,

$$X' = A(t)X + F(t), \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Para garantizar que el problema de valores iniciales,

$$X' = A(t)X + F(t), \quad X(t_0) = X_0,$$

tenga solución única, exigiremos que las funciones $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$ sean continuas.

Tal como hicimos con las ecuaciones de primer orden, estudiaremos primero el sistema homogéneo, $X' = AX$, para pasar a continuación al sistema inhomogéneo.

La primera propiedad importante de los sistemas lineales es el llamado **principio de superposición lineal**, que simplemente expresa que combinaciones lineales de soluciones $X_1(t)$,..., $X_r(t)$ de $X' = AX$ son también solución del sistema.

Consideremos una función vectorial,

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i(t), \text{ tal que } X_i' = AX_i,$$

entonces $Y(t)$ es también solución del sistema,

$$Y'(t) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i'(t) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i A(t)X_i(t) = A(t)\sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i(t) = A(t)Y(t). \ \square$$

En particular, dado que el sistema verifica las condiciones del teorema de existencia y unicidad de soluciones, podemos considerar soluciones X_i del problema de valores iniciales,

$$X' = AX, \quad X(t_0) = e_i = \left(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0\right)^t,$$

es decir, el vector de valores iniciales en t_0 es nulo salvo la coordenada i-ésima, que toma el valor unidad.

Estas soluciones generan todo el conjunto de soluciones del problema, ya que, si consideramos una solución con valores iniciales $X(t_0) = (x_{10}, \ldots, x_{n0})^t$, podemos escribirla como

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i0} X_i(t),$$

que es solución, por el principio de superposición lineal, y además verifica las condiciones iniciales,

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i0} X_i(t_0) = \sum_{i=1}^{n} x_{i0} e_i = X(t_0). \ \Box$$

Además, son linealmente independientes: tomemos una combinación lineal nula y particularicémosla en t_0,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i(t) \Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i,$$

de donde concluimos que los coeficientes λ_i son nulos, puesto que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es base lineal de $\mathbb{R}^n$.

Por tanto, como $\{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$ generan el conjunto de soluciones de $X' = AX$ y son linealmente independientes, podemos afirmar:

Teorema 2.3.1 *El conjunto de soluciones del sistema $X' = AX$ es un espacio lineal de dimensión n.*

No sólo eso, si conocemos n soluciones $B = \{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$ del sistema $X' = AX$ y consideramos la matriz

$$W(t) = \big(X_1(t), \ldots, X_n(t)\big) = \begin{pmatrix} X_{11}(t) & \cdots & X_{n1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1n}(t) & \cdots & X_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

cuyas columnas son las propias soluciones $X_i(t)$, podemos concluir que B es una base del espacio de soluciones del sistema $X' = AX$ si y sólo si la matriz $W(t)$ es no singular para al menos algún valor t_0.

Supongamos que existe un valor s tal que $W(s)$ es singular, es decir, $|W(s)| = 0$. Esto quiere decir que las columnas de la matriz son linealmente dependientes. Por tanto, es posible escribir, con algún coeficiente λ_i no nulo,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i(s).$$

Consideremos, pues, la solución del sistema dada por $Y(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i(t)$. Como en $t = s$ se anula, es solución del problema de valores iniciales

$$X' = A(t)X, \quad X(s) = 0,$$

que tiene por solución trivial y única a la solución nula $X(t) \equiv 0$. Por tanto, para todo valor de t,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i(t),$$

es decir, las soluciones $X_i(t)$ son linealmente dependientes.

En resumen, si $W(t)$ es singular en un valor s, lo es también para todo valor de t. Y, a la inversa, si $W(t)$ es regular para un valor de t, lo es para todo valor de t.

Teorema 2.3.2 *Sean $B = \{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$ soluciones del sistema $X' = AX$. Si la matriz $W(t) = \big(X_1(t), \ldots, X_n(t)\big)$ es regular en un valor cualquiera t_0, $|W(t_0)| \neq 0$, entonces B es una base del espacio de soluciones del sistema de ecuaciones.*

A esta matriz $W(t)$ formada por soluciones independientes la llamaremos **matriz fundamental**.

Así pues, resolver un sistema lineal de ecuaciones homogéneo es equivalente a encontrar n soluciones $B = \{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$ linealmente independientes en un valor t_0, tantas como ecuaciones. La solución general es la combinación lineal con coeficientes generales de las n soluciones independientes,

$$X(t) = k_1 X_1(t) + \cdots + k_n X_n(t) = W(t)K, \quad K = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

Conocida la matriz fundamental $W(t)$, la solución del problema de valores iniciales $X(t_0) = X_0$ se reduce a resolver el sistema lineal

$$W(t_0)K = X_0,$$

para los parámetros $k_1, \ldots, k_n$.

En el caso de una ecuación lineal, podíamos resolver la ecuación inhomogénea hallando una solución particular por el método de variación de constantes. El mismo procedimiento es válido para sistemas.

El primer resultado importante para sistemas inhomogéneos es que la solución general del sistema $X' = A(t)X + F(t)$ es

$$X(t) = W(t)K + X_p(t), \tag{2.7}$$

donde $X_p(t)$ es una solución particular del sistema inhomogéneo. La demostración es idéntica a la del caso de una ecuación.

Este resultado muestra que la solución general de un sistema lineal inhomogéneo de n ecuaciones diferenciales tiene la estructura de espacio afín de dimensión n.

Procedamos por el método de variación de constantes para obtener una solución particular, pues, del sistema inhomogéneo. Consideramos $X(t) = W(t)K(t)$ y lo sustituimos en el sistema $X' = A(t)X + F(t)$,

$$X'(t) = W'(t)K(t) + W(t)K'(t) = A(t)W(t)K(t) + F(t) \Rightarrow W(t)K'(t) = F(t),$$

ya que $W(t)K$ es solución del sistema homogéneo. Por tanto, sólo resta integrar

$$K'(t) = W(t)^{-1}F(t) \Rightarrow K(t) = \int W(t)^{-1}F(t)\,dt,$$

omitiendo constantes de integración, ya que sólo buscamos una solución particular. Así pues, una solución del sistema inhomogéneo es

$$X_p(t) = W(t)\int W(t)^{-1}F(t)\,dt, \tag{2.8}$$

y la solución general del sistema inhomogéneo es

$$X(t) = W(t)\int W(t)^{-1}F(t)\,dt + W(t)K. \ \square \tag{2.9}$$

No obstante, a diferencia del caso de una ecuación de primer orden, para que esta expresión sea útil es preciso conocer n soluciones independientes del sistema homogéneo, algo que no es trivial conseguir.

2.4. Sistemas lineales con coeficientes constantes

El problema se simplifica bastante si consideramos sistemas de ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes constantes, es decir, ahora en el sistema $X' = AX + F(t)$ la matriz A es constante. Los elementos a_{ij} no dependen de t.

Definimos la **exponencial de una matriz cuadrada** A por medio de la serie de potencias de la función exponencial,

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!} = \mathbb{I} + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots, \tag{2.10}$$

donde $\mathbb{I}$ es la matriz identidad y $A^n = A\cdots A$ es el producto de n copias de la matriz A.

Obviamente, esta expresión no se puede calcular directamente, salvo en algunos casos concretos, como cuando la matriz es diagonal,

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n), \quad D^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k,\ldots,\lambda_n^k), \quad e^D = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1},\ldots,e^{\lambda_n}).$$

La exponencial de matrices verifica propiedades que la asemejan a la exponencial ordinaria,

$$\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}, \qquad e^{B+C} = e^B e^C \text{ si } BC = CB,$$

es decir, si B y C conmutan.

La primera identidad es trivial a partir de la segunda,

$$e^A e^{-A} = e^{A-A} = \mathbb{I} \Rightarrow \left(e^A\right)^{-1} = e^{-A},$$

ya que A conmuta consigo misma. $\square$

Para la segunda,

$$e^{B+C} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(B+C)^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n}{n!}\right) = e^B e^C,$$

ya que podemos podemos juntar las potencias de B y las potencias de C, ya que el orden de las matrices es irrelevante, puesto que conmutan y podemos aplicar los resultados de la exponencial de números. □

Otra propiedad importante es la buena relación de la exponencial con los cambios de base. Si P es una matriz regular, tenemos que

$$A = PBP^{-1}, \quad A^2 = PBP^{-1}PBP^{-1} = PB^2P^{-1}, \ \ldots, \quad A^k = PB^kP^{-1}.$$

Por tanto, la exponencial es compatible con los cambios de base,

$$e^A = Pe^BP^{-1}.$$

Por ejemplo, si la matriz A es diagonalizable por un cambio de base de matriz P a una matriz diagonal D, $A = PDP^{-1}$, el cálculo de la exponencial se simplifica mucho,

$$e^A = Pe^DP^{-1}.$$

Analógamente a lo que sucedía para una única ecuación, la exponencial nos proporciona la solución general del sistema inhomogéneo:

Teorema 2.4.1 *El sistema homogéneo $X' = AX$ tiene por matriz fundamental de soluciones $W(t) = e^{At}$. Por tanto, la solución general del sistema es $X(t) = e^{At}K$ y la solución del problema de valores iniciales con $X(t_0) = X_0$ es $X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0$.*

Por su parte, la solución general del sistema inhomogéneo $X' = AX + F(t)$ es

$$X(t) = e^{At}K + e^{At}\int e^{-At}F(t)\,dt, \tag{2.11}$$

y la solución del problema de valores iniciales con $X(t_0) = X_0$ es

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0 + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-As}F(s)\,ds. \tag{2.12}$$

La demostración es sencilla, teniendo en cuenta las buenas propiedades de convergencia de la exponencial,

$$W(t) = e^{At} = \mathbb{I} + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots,$$

por tanto, derivando la expresión,

$$W'(t) = A + tA^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \cdots = Ae^{At} = AW(t),$$

concluimos que, efectivamente, las columnas de la matriz $W(t)$ son soluciones del sistema $X' = AX$.

Además la matriz $W(t)$ es regular, ya que $W(0) = \mathbb{I}$. Por tanto, es una matriz fundamental del sistema y la solución general será $X(t) = W(t)K$.

Para el sistema inhomogéneo, simplemente aplicamos la fórmula (2.9) de Lagrange y comprobamos que en t_0 verifica las condiciones iniciales,

$$X(t_0) = e^{A(t_0-t_0)}X_0 + e^{At_0}\int_{t_0}^{t_0} e^{-As}F(s)\,ds = X_0. \ \square$$

Desafortunadamente, sabemos que no todas las matrices cuadradas son diagonalizables. Cuando un autovalor se repite con multiplicidad algebraica m_λ, puede ocurrir que la dimensión del subespacio (multiplicidad geométrica), g_λ, que generan sus autovectores correspondientes sea distinta. Siempre sucede que $m_\lambda \geq g_\lambda$, con lo cual necesitamos vectores para completar la base.

Por ejemplo, en el caso de dimensión dos, pueden darse cuatro situaciones, según los valores que tomen los autovalores, λ, μ, de la matriz A:

- $\lambda \neq \mu$: En este caso la matriz es diagonalizable y la matriz del cambio de base la definen dos autovectores correspondientes a λ, μ: $P = (v_\lambda, v_\mu)$.

- $\lambda = \mu$ y existen dos autovectores $v_{\lambda,1}$, $v_{\lambda,2}$ linealmente independientes: En este caso la matriz es diagonal y, por tanto, directamente exponenciable.

- $\lambda = \mu$ y existe sólo un autovector v_λ linealmente independiente: En este caso la matriz no es diagonalizable, pero se puede reducir a una forma sencilla, la forma canónica de Jordan, J, y la matriz del cambio de base la define $P = (w_\lambda, v_\lambda)$, donde w_λ es un vector que verifique $v_\lambda = (A - \lambda\mathbb{I})w_\lambda$,

  $$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = D + N.$$

  Descomponiendo J en suma de una matriz diagonal $D = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda)$ y una matriz nilpotente N ($N^k = 0$, para algún k), es fácil obtener que la exponencial de J,

  $$e^{Jt} = e^{Dt}e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}.$$

- $\lambda = a + ib$, $\mu = \bar{\lambda} = a - ib$, $b > 0$: En principio, este caso es idéntico al primero, ya que los autovalores son distintos. Pero si A es real, es razonable expresar el resultado en forma de matriz real, de manera de que, en lugar de exponenciales complejas, $e^{(a+ib)t}$, $e^{(a-ib)t}$, aparezcan expresiones reales, parte real e imaginaria de las anteriores, $e^{at}\cos bt$, $e^{at}\sin bt$. Para ello, es preciso tomar autovectores conjugados $P = (v_\lambda, \overline{v_\lambda})$.

En realidad, para obtener una matriz fundamental del sistema, no es preciso calcular $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$, ya que la solución general del sistema homogéneo se puede escribir como

$$X(t) = e^{At}K = Pe^{Jt}P^{-1}K = Pe^{Jt}\tilde{K},$$

ya que la matriz P^{-1} lo único que hace es combinar linealmente los coeficientes k_i.

Por tanto, $W(t) = Pe^{Jt} = e^{At}P$ es también una matriz fundamental del sistema lineal. Y como $P = (v_\lambda, v_\mu)$, en el caso diagonalizable, podemos escribir la solución general como

$$X(t) = k_1 e^{\lambda t} v_\lambda + k_2 e^{\mu t} v_\mu,$$

como se comprueba fácilmente,

$$X(t) = Pe^{Dt}\tilde{K} = (v_\lambda, v_\mu)\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = (v_\lambda, v_\mu)\begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda t} \\ k_2 e^{\mu t}\end{pmatrix}. \ \square$$

Y en el caso no diagonalizable, $P = (w_\lambda, v_\lambda)$,

$$X(t) = (k_1 w_\lambda + (k_1 t + k_2) v_\lambda)\, e^{\lambda t},$$

como se comprueba fácilmente,

$$X(t) = Pe^{Jt}\tilde{K} = (w_\lambda, v_\lambda)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = (w_\lambda, v_\lambda)\begin{pmatrix} k_1 \\ tk_1 + k_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}. \ \square$$

En el caso complejo, es preferible seguir multiplicando por P^{-1} para obtener una solución real. Por su parte, si $W(t) = Pe^{Jt}$, entonces $W^{-1}(t) = e^{-Jt}P^{-1}$.

Por ello, para eludir las matrices inversas complejas, podemos partir de la solución general basada en autovectores conjugados, $X(t) = c_1 e^{\lambda t} v_\lambda + c_2 e^{\bar{\lambda} t}\overline{v_\lambda}$, que, como acabamos de mencionar, tiene el problema de ser compleja. Sin embargo, como las soluciones de la base $\{e^{\lambda t} v_\lambda, e^{\bar{\lambda} t}\overline{v_\lambda}\}$ son una conjugada de la otra, podemos construir otra base de soluciones simplemente tomando la parte real e imaginaria, es decir, realizando sencillas combinaciones lineales,

$$X_1(t) = \Re\left(e^{\lambda t} v_\lambda\right) = \frac{e^{\lambda t} v_\lambda + e^{\bar{\lambda} t}\overline{v_\lambda}}{2}, \qquad X_2(t) = \Im\left(e^{\lambda t} v_\lambda\right) = \frac{e^{\lambda t} v_\lambda - e^{\bar{\lambda} t}\overline{v_\lambda}}{2i},$$

que ya son reales, lo cual nos permite expresar la solución general en forma manifiestamente real,

$$X(t) = k_1 X_1(t) + k_2 X_2(t).$$

Estas expresiones se pueden desarrollar un poco más. Si $v_\lambda = u + iw$, siendo u, v vectores reales, parte real e imaginaria respectivamente de v_λ, $u = \Re(v_\lambda)$, $w = \Im(v_\lambda)$, resulta que, descomponiendo $\lambda = a + bi$,

$$X_1(t) = e^{at}\left(u\cos bt - v\sin bt\right), \quad X_2(t) = e^{at}\left(u\sin bt + v\cos bt\right),$$

pero para ello el vector $\mathbf{v}_\lambda$ debe estar expresado de manera que sea sencillo obtener sus partes real e imaginaria.

Ejemplo 2.4.1 *Resolver el sistema de ecuaciones $x' = -x + 3y + e^t$, $y' = 3x - y + 1$. Hallar la solución que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.*

En forma matricial, el sistema se puede resolver

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix} = AX + F(t),$$

si expresamos A en forma diagonal.

Para ello, calculamos sus autovalores,

$$0 = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 8 \Rightarrow \lambda = -4, 2,$$

y sus correspondientes autovectores.

Para $\lambda = -4$,

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_{-4} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Y para $\lambda = 2$,

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, una base de autovectores está formada por $B = \{v_{-4}, v_2\}$ y la matriz de cambio de base será $P = (v_{-4}, v_2)$ para obtener una matriz diagonal $D = \mathrm{diag}(-4, 2)$, $A = PDP^{-1}$,

$$W(t) = Pe^{Dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-4t} & e^{2t} \\ -e^{-4t} & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Así pues, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = W(t)K \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_h(t) = k_1 e^{-4t} + k_2 e^{2t} \\ y_h(t) = -k_1 e^{-4t} + k_2 e^{2t} \end{array} \right. .$$

Otra manera de resolver el sistema homogéneo, una vez que sabemos que los autovalores son $-4, 2$ y que las soluciones tienen que se combinaciones de exponenciales e^{-4t}, e^{2t}, consiste en probar con funciones de la forma

$$x_h(t) = k_1 e^{-4t} + k_2 e^{2t}, \quad y_h(t) = k_3 e^{-4t} + k_4 e^{2t},$$

que introducimos en el sistema para eliminar las dos constantes que sobran,

$$\begin{array}{rcl} x_h' & = & -4k_1 e^{-4t} + 2k_2 e^{2t} = -x_h + 3y_h = (3k_3 - k_1)e^{-4t} + (3k_4 - k_2)e^{2t} \\ y_h' & = & -4k_3 e^{-4t} + 2k_4 e^{2t} = 3x_h - y_h = (3k_1 - k_3)e^{-4t} + (3k_2 - k_4)e^{2t}, \end{array}$$

y, agrupando los términos de cada exponencial, que tienen que ser nulos, llegamos a un sistema de ecuaciones lineales,

$$k_1 + k_3 = 0, \quad k_2 - k_4 = 0 \Rightarrow k_3 = -k_1, \quad k_4 = k_2,$$

$$x_h(t) = k_1 e^{-4t} + k_2 e^{2t}, \quad y_h(t) = -k_1 e^{-4t} + k_2 e^{2t}.$$

Este procedimiento ahorra el uso de matrices, pero es ineficiente a medida que aumenta el número de ecuaciones.

Para calcular una solución particular del sistema inhomogéneo, usamos el método de variación de constantes,

$$\begin{aligned}
X_p(t) &= W(t)\int W^{-1}(t)F(t)\,dt = W(t)\int \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{4t} & -e^{4t} \\ e^{-2t} & e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t} \\ 1\end{pmatrix}dt \\
&= \frac{W(t)}{2}\int\begin{pmatrix} e^{5t}-e^{4t} \\ e^{-t}+e^{-2t}\end{pmatrix}dt = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-4t} & e^{2t} \\ -e^{-4t} & e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{e^{5t}}{5}-\dfrac{e^{4t}}{4} \\ -e^{-t}-\dfrac{e^{-2t}}{2}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{5}e^{t}-\dfrac{3}{8} \\ -\dfrac{3}{5}e^{t}-\dfrac{1}{8}\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

con lo cual la solución general del sistema inhomogéneo es

$$x(t) = k_1e^{-4t}+k_2e^{2t}-\frac{2}{5}e^{t}-\frac{3}{8},\quad y(t) = -k_1e^{-4t}+k_2e^{2t}-\frac{3}{5}e^{t}-\frac{1}{8}.$$

La solución particular que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$0 = k_1+k_2-\frac{31}{40},\quad 1 = -k_1+k_2-\frac{29}{40} \Rightarrow k_1 = -\frac{19}{40},\ k_2 = \frac{5}{4},$$

$$x(t) = \frac{5}{4}e^{2t}-\frac{19}{40}e^{-4t}-\frac{2}{5}e^{t}-\frac{3}{8},\quad y(t) = \frac{5}{4}e^{2t}+\frac{19}{40}e^{-4t}-\frac{3}{5}e^{t}-\frac{1}{8}.$$

Ejemplo 2.4.2 *Resolver el sistema de ecuaciones* $x' = 2x+5\cos t$, $y' = 2y+2t$. *Hallar la solución que verifica* $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

En forma matricial, el sistema se puede resolver

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2t\end{pmatrix} = AX+F(t),$$

con A en forma diagonal, de autovalor doble $\lambda = 2$.

En realidad, como A es diagonal, el sistema se compone realmente de dos ecuaciones desacopladas, que podemos resolver independientemente.

Comenzamos con el sistema homogéneo,

$$\left\{\begin{array}{l} x' = 2x \\ y' = 2y\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x(t) = k_1e^{2t} \\ y(t) = k_2e^{2t}\end{array}\right. .$$

En lugar de aplicar la tediosa fórmula de variación de constantes, probamos con funciones trigonométricas para encontrar una solución particular de la primera ecuación, $x_p(t) = a\cos t+b\sin t$,

$$b\cos t-a\sin t = (2a+5)\cos t+2b\sin t \Rightarrow a = -2,\ b = 1,$$

$$x_p(t) = \sin t-2\cos t,$$

y un polinomio para la segunda ecuación, $y_p(t) = ct + d$,

$$c = y_p'(t) = 2y_p(t) + 2t = (2c+2)t + 2d \Rightarrow c = -1,\ d = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_p(t) = -t - \frac{1}{2},$$

con lo cual la solución general del sistema inhomogéneo es

$$x(t) = k_1 e^{2t} + \sin t - 2\cos t, \quad y(t) = k_2 e^{2t} - t - \frac{1}{2}.$$

La solución particular que verifica $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$1 = k_1 - 2, \quad 0 = k_2 - \frac{1}{2} \Rightarrow k_1 = 3,\ k_2 = \frac{1}{2},$$

$$x(t) = 3e^{2t} + \sin t - 2\cos t, \quad y(t) = \frac{e^{2t}}{2} - t - \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 2.4.3 *Resolver el sistema de ecuaciones $x' = 2y + 5e^t$, $y' = -2x + 3\sin t$. Hallar la solución que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.*

En forma matricial, el sistema se puede resolver

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5e^t \\ 3\sin t \end{pmatrix} = AX + F(t),$$

si expresamos A en forma diagonal.

Para ello, calculamos sus autovalores,

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 \Rightarrow \lambda = \pm 2i,$$

que resultan complejos.

Buscamos un autovector para $\lambda = 2i$,

$$\begin{pmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_{2i} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$$

y el conjugado para $\lambda = -2i$,

$$\overline{v_{2i}} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Así pues, una base de autovectores está formada por $B = \{v_{2i}, \overline{v_{2i}}\}$ y la matriz de cambio de base será $P = (v_{2i}, \overline{v_{2i}})$ para obtener la matriz diagonal $D = \operatorname{diag}(2i, -2i)$, $A = PDP^{-1}$,

$$\begin{aligned} e^{At} &= Pe^{Dt}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i2t} & 0 \\ 0 & e^{-i2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = e^{At}K \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_h(t) = k_1 \cos 2t + k_2 \sin 2t \\ y_h(t) = -k_1 \sin 2t + k_2 \cos 2t \end{array} \right. .$$

Finalmente, otra manera, sencilla, de obtener la solución general del sistema homogéneo es partir de las soluciones linealmente independientes complejas,

$$e^{2it}v_{2i} = (\cos 2t + i\sin 2t)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t + i\sin 2t \\ -\sin 2t + i\cos 2t \end{pmatrix},$$

y su compleja conjugada y quedarnos como soluciones reales la parte real e imaginaria,

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix},$$

con lo cual la solución general es

$$X(t) = k_1X_1(t) + k_2X_2(t) = \begin{pmatrix} k_1\cos 2t + k_2\sin 2t \\ -k_1\sin 2t + k_2\cos 2t \end{pmatrix},$$

tal como habíamos obtenido por los otros dos métodos.

Sólo nos resta, pues, hallar una solución particular del sistema inhomogéneo. La forma de $F(t)$ nos sugiere probar

$$x_p(t) = ae^t + b\cos t + c\sin t, \quad y_p(t) = de^t + f\cos t + g\sin t,$$

que sustituidas en el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} ae^t - b\sin t + c\cos t = (2d+5)e^t + 2f\cos t + 2g\sin t \\ de^t - f\sin t + g\cos t = -2ae^t - 2b\cos t + (3-2c)\sin t \end{array}\right.,$$

nos proporcionan una solución particular, $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$, $d = -2$, $f = 1$, $g = 0$,

$$x_p(t) = e^t + 2\sin t, \quad y_p(t) = -2e^t + \cos t,$$

y la solución general del sistema inhomogéneo,

$$x(t) = k_1\cos 2t + k_2\sin 2t + e^t + 2\sin t, \quad y(t) = -k_1\sin 2t + k_2\cos 2t - 2e^t + \cos t,$$

La solución particular que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$0 = k_1 + 1, \quad 0 = k_2 - 1 \Rightarrow k_1 = -1,\ k_2 = 1,$$

$$x(t) = -\cos 2t + \sin 2t + e^t + 2\sin t, \quad y(t) = \sin 2t + \cos 2t - 2e^t + \cos t.$$

Ejemplo 2.4.4 *Resolver el sistema de ecuaciones $x' = 3x+2y+9t$, $y' = 3y+9$. Hallar la solución que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.*

En forma matricial, el sistema se puede resolver

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9t \\ 9 \end{pmatrix} = AX + F(t).$$

La matriz A tiene trivialmente un autovalor doble, $\lambda = 3$ y sólo va a haber, ya que A no es diagonal, un único autovector linealmente independiente,

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pero para construir la base, es preferible comenzar por w_3, que tiene que ser un vector no autovector, tal que $(A-3\mathbb{I})w_3$ sea un autovector.

Tomamos un vector sencillo,

$$w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = (A-3\mathbb{I})w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, una base que lleva A a la forma canónica de Jordan está formada por $B = \{w_3, v_3\}$ y la matriz de cambio de base será $P = (w_3, v_3)$ para obtener la matriz de Jordan, $A = PJP^{-1}$, con lo cual

$$W(t) = Pe^{Jt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ te^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2te^{3t} & 2e^{3t} \\ e^{3t} & 0 \end{pmatrix}.$$

Así pues, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = W(t)K = \begin{cases} x_h(t) = k_2 e^{3t} + 2k_1 te^{3t} \\ y_h(t) = k_1 e^{3t} \end{cases},$$

cambiando k_2 por $k_2/2$ para hacer más compacta la expresión.

El sistema homogéneo se puede abordar también a partir del momento en el que sabemos que las soluciones contienen funciones e^{3t}, te^{3t}, buscando soluciones de la forma

$$x_h(t) = c_1 e^{3t} + c_2 te^{3t}, \quad y_h(t) = c_3 e^{3t} + c_4 te^{3t},$$

que sustituidas en el sistema proporcionan

$$\begin{aligned} x_h' &= (3c_1 + c_2)e^{3t} + 3c_2 te^{3t} = 3x_h + 2y_h = (3c_1 + 2c_3)e^{3t} + (3c_2 + 2c_4)te^{3t} \\ y_h' &= (3c_3 + c_4)e^{3t} + 3c_4 te^{3t} = 3c_3 e^{3t} + 3c_4 te^{3t}, \end{aligned}$$

de donde extraemos como condiciones los coeficientes de las funciones e^{3t}, te^{3t} de cada ecuación, que tienen que ser nulos por tratarse de funciones linealmente independientes,

$$c_4 = 0, \quad c_3 = \frac{c_2}{2},$$

$$x_h(t) = c_1 e^{3t} + c_2 te^{3t}, \quad y_h(t) = \frac{c_2}{2} e^{3t},$$

que es, obviamente, la misma solución general, $c_1 = k_2$, $c_2 = 2k_1$, que habíamos obtenido previamente.

Buscamos una solución particular del sistema, de la forma

$$x_p(t) = at + b, \quad y_p(t) = ct + d,$$

$$a = (3a+2c+9)t + (3b+2d), \quad c = 3ct + 3d + 9 \Rightarrow a = -3,\ b = 1,\ c = 0\ d = -3,$$

$$x_p(t) = -3t + 1, \quad y_p(t) = -3,$$

con lo cual la solución general del sistema es

$$x(t) = k_2 e^{3t} + 2k_1 te^{3t} - 3t + 1, \quad y(t) = k_1 e^{3t} - 3.$$

Aunque, en este caso concreto, una manera más sencilla de abordar el sistema habría sido resolver primero la segunda ecuación, que está desacoplada y se puede resolver independientemente,

$$y' = 3y + 9 \Rightarrow y(t) = k_1 e^{3y} - 3,$$

y sustituir el resultado en la primera,

$$x' = 3x + 2y + 9t = 3x + 2k_1e^{3y} - 6 + 9t \Rightarrow x(t) = k_2e^{3t} + 2k_1te^{3t} - 3t + 1.$$

La solución particular que verifica $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ la podemos obtener resolviendo el sistema correspondiente de ecuaciones,

$$0 = k_2 + 1, \quad 0 = k_1 - 3 \Rightarrow k_2 = -1,\ k_1 = 3,$$

$$x(t) = -e^{3t} + 6te^{3t} - 3t + 1, \quad y(t) = 3e^{3t} - 3.$$

En el caso de dimensión tres, pueden darse más casos, según los valores que tomen los autovalores, λ, μ, ν de la matriz A:

- λ, μ, ν distintos: En este caso la matriz es diagonalizable y la matriz del cambio de base la definen tres autovectores correspondientes a λ, μ, ν: $P = (v_\lambda, v_\mu, v_\nu)$.

- λ doble, μ y existen dos autovectores $v_{\lambda,1}$, $v_{\lambda,2}$ linealmente independientes: En este caso la matriz es diagonal también y $P = (v_{\lambda_1}, v_{\lambda_2}, v_\mu)$.

- λ doble, μ y existe sólo un autovector v_λ, linealmente independiente: La matriz no es diagonalizable, pero se puede reducir a la forma canónica de Jordan, J, y la matriz del cambio de base la define $P = (w_\lambda, v_\lambda, v_\mu)$, donde w_λ es un vector que verifique $v_\lambda = (A - \lambda\mathbb{I})w_\lambda$,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N.$$

  Descomponiendo J en suma de una matriz diagonal $D = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda)$ y una matriz nilpotente N ($N^2 = 0$), es fácil obtener que la exponencial de J,

$$e^{At} = e^De^N = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ te^{\lambda t} & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}.$$

- λ triple y existen tres autovectores linealmente independientes. Se reduce al primer caso.

- λ triple y existen dos autovectores linealmente independientes. Se reduce al tercer caso.

- λ triple y existe un autovector linealmente independiente: La matriz no es diagonalizable, pero se puede reducir a la forma canónica de Jordan, J, y la matriz del cambio de base la define $P = (u_\lambda, w_\lambda, v_\lambda)$, donde u_λ es un vector que verifique $w_\lambda = (A - \lambda\mathbb{I})u_\lambda \neq 0$, $v_\lambda = (A - \lambda\mathbb{I})w_\lambda \neq 0$.

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = D + N.$$

Descomponiendo J en suma de una matriz diagonal $D = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda)$ y una matriz nilpotente N ($N^3 = 0$), es fácil obtener que la exponencial de J,

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t^2/2 & t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t^2/2 & t & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}.$$

- $\lambda = a + ib$, $\bar{\lambda} = a - ib$, ν, $b > 0$: En principio, este caso es idéntico al primero, ya que los autovalores son distintos, aunque complejos. Pero si A es real, es razonable expresar el resultado en forma de matriz real. Para ello, es preciso tomar autovectores conjugados v_λ, $\overline{v_\lambda}$), aparte de v_ν.

Los casos de dimensión superior se abordan de manera análoga. De hecho, podemos obviar el uso de matrices de cambio de base y el cálculo de autovectores. Si la matriz A del sistema tiene n autovalores distintos, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, basta probar soluciones de la forma

$$x_i(t) = k_{i,1}e^{\lambda_1 t} + \cdots + k_{i,n}e^{\lambda_n t},\ i = 1, \ldots, n,$$

lo cual supone n^2 constantes $k_{i,j}$, que quedarán reducidas a n tras imponer las n ecuaciones diferenciales.

Si un autovalor λ está repetido m veces, las funciones que aparecen en la combinación lineal deberán ser $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$,..., $t^{m-1}e^{\lambda t}$.

Si aparecen autovalores conjugados $\lambda = a + ib$, $\bar{\lambda} = a - ib$, $b > 0$, podemos mantener combinaciones de exponenciales $e^{\lambda t}$, $e^{\bar{\lambda} t}$ o, preferiblemente, usar combinaciones de funciones reales, $e^{at}\cos bt$, $e^{at}\sin bt$.

Del mismo modo, si los autovalores λ, $\bar{\lambda}$ tienen multiplicidad m, podemos emplear funciones $e^{at}\cos bt$, $e^{at}\sin bt$, $te^{at}\cos bt$, $te^{at}\sin bt$,..., $t^{m-1}e^{at}\cos bt$, $t^{m-1}e^{at}\sin bt$.

Ejemplo 2.4.5 *Resolver el sistema* $x' = 2x - z$, $y' = x + y - z$, $z' = -2x + 2y + 3z$.

La matriz del sistema $X' = AX$ es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

que tiene polinomio característico $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$, con autovalores distintos $\lambda = 1, 2, 3$. Por tanto, las soluciones serán combinaciones de exponenciales e^t, e^{2t}, e^{3t}. Probamos

$$x(t) = a_1e^t + a_2e^{2t} + a_3e^{3t},\ y(t) = b_1e^t + b_2e^{2t} + b_3e^{3t},\ z(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{3t},$$

que sustituidas en el sistema de ecuaciones proporcionan un sistema,

$$\begin{aligned} 0 &= (-a_1 + c_1)e^t + c_2e^{2t} + (a_3 + c_3)e^{3t} \\ 0 &= (-a_1 + c_1)e^t + (-a_2 + b_2 + c_2)e^{2t} + (-a_3 + 2b_3 + c_3)e^{3t} \\ 0 &= (2a_1 - 2b_1 - 2c_1)e^t + (2a_2 - 2b_2 - c_2)e^{2t} + (2a_3 - 2b_3)e^{3t}, \end{aligned}$$

que se reduce a uno lineal, teniendo en cuentas que las exponenciales son linealmente independientes y, por tanto, todos sus coeficientes tienen que ser nulos,

$$a_1 = c_1,\ b_1 = 0,\ a_2 = b_2,\ c_2 = 0,\ a_3 = -c_3,\ a_3 = b_3,$$

y al resolverlo nos quedamos con sólo tres constantes independientes,

$$x(t) = a_1 e^t + a_2 e^{2t} + a_3 e^{3t},\ y(t) = a_2 e^{2t} + a_3 e^{3t},\ z(t) = a_1 e^t - a_3 e^{3t},$$

resultado este que podríamos obtener asimismo por el procedimiento habitual de diagonalización.

2.5. Ecuaciones lineales de orden superior

Hemos visto que las ecuaciones diferenciales se pueden reducir a sistemas de ecuaciones de primer orden introduciendo variables nuevas iguales a las derivadas de la variable dependiente, $x_1 = x$, $x_2 = x'$,..., $x_n = x^{n-1)}$. Por tanto, en esta sección nos limitaremos a aplicar la teoría de sistemas de ecuaciones.

En particular, la ecuación lineal

$$x^{n)} + a_1(t)x^{n-1)} + \cdots + a_n(t)x = f(t), \tag{2.13}$$

se reduce a un sistema lineal de primer orden $X' = A(t)X + F(t)$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & \cdots & \cdots & \cdots & -a_1(t) \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

y el teorema de estructura de las soluciones de los sistemas lineales se adapta a ecuaciones de orden superior:

Sean $x_1^*(t), \ldots, x_n^*(t)$ n soluciones de la ecuación homogénea,

$$x^{n)} + a_1(t)x^{n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0.$$

Definimos la matriz $W(t)$,

$$W(t) = \begin{pmatrix} x_1^*(t) & \cdots & x_n^*(t) \\ x_1^{*\prime}(t) & \cdots & x_n^{*\prime}(t) \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ x^{*n-1)}_1(t) & \cdots & x^{*n-1)}_n(t) \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

que será una matriz fundamental del sistema y, por tanto, de la ecuación, si y sólo si su determinante, que denominaremos **wronskiano**, es distinto de cero para algún valor de t.

Ya sabemos que si $|W(t)|$ no se anula para algún valor, no se anula para ninguno y, por tanto, tenemos garantizado que $x_1^*(t), \ldots, x_n^*(t)$ son n soluciones linealmente independientes, con lo cual tenemos construida la solución general de la ecuación,

$$x(t) = k_1 x_1^*(t) + \cdots + k_n x_n^*(t). \tag{2.16}$$

Asimismo, podemos construir una solución particular del sistema inhomogéneo por el método de variación de constantes,

$$X_p(t) = W(t) \int W^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} dt. \tag{2.17}$$

Una solución particular de la ecuación inhomogénea será, pues, el primer elemento del vector $X_p(t)$. Por ejemplo, en el caso de orden dos,

$$W^{-1}(t) = \frac{1}{|W(t)|} \begin{pmatrix} {x^*}'_2(t) & -x^*{}_2(t) \\ -{x^*}'_1(t) & x^*{}_1(t) \end{pmatrix},$$

$$x_p(t) = -x^*{}_1(t) \int \frac{x^*{}_2(t) f(t)}{|W(t)|}\, dt + x^*{}_2(t) \int \frac{x^*{}_1(t) f(t)}{|W(t)|}\, dt. \tag{2.18}$$

En general es complicado, incluso en el caso lineal, hallar un conjunto de n soluciones de la ecuación homogénea, pero el problema se simplifica a medida que vamos conociendo soluciones.

Si $x_1(t)$ es una solución de la ecuación lineal homogénea, entonces el cambio $x = x_1 y$ permite reducir una unidad el orden de la correspondiente ecuación para y.

El argumento es sencillo. Supongamos que $x_1(t)$ es solución de la ecuación,

$$x^{n)} + a_1(t) x^{n-1)} + \cdots + a_n(t) x = 0.$$

Hacemos el cambio $x = x_1 y$,

$$x' = x_1' y + x_1 y', \cdots, \ x^{n)} = x_1^{n)} y + \cdots + x_1 y^{n)},$$

y al sustituir en la ecuación observamos que los primeros términos,

$$y \left(x_1^{n)} + a_1(t) x_1^{n-1)} + \cdots a_n(t) x_1 \right) = 0,$$

se van por ser x_1 solución de la ecuación. Por tanto, la ecuación resultante depende sólo de las derivadas de y, y',..., $y^{n)}$, pero no de y, con lo cual se puede reducir el orden de la ecuación una unidad tomando $z = y'$. □

Ejemplo 2.5.1 *Reducir el orden de la ecuación $x'' + x = 0$ sabiendo que $x_1(t) = \sin t$ es una solución de la ecuación.*

Conocemos la solución $\sin t$ de la ecuación homogénea. Por ello, probamos el cambio $x(t) = y(t) \sin t$,

$$x'' + x = y'' \sin t + 2y' \cos t = 0 \Rightarrow z' = -2z \cot t,$$

haciendo el cambio habitual $z = y'$.

Por tanto, hemos conseguido rebajar el orden de la ecuación y obtener una resoluble,

$$\frac{dz}{z} = -2 \cot t\, dt \Rightarrow \ln|z| = -2 \ln|\sin t| + C \Rightarrow y'(t) = z(t) = -\frac{k_1}{\sin^2 t},$$

denotando $k_1 = \mp e^C$. Integrando una vez más,

$$y(t) = k_1 \cot t + k_2 \Rightarrow x(t) = k_1 \cos t + k_2 \sin t,$$

recuperamos el resultado ya conocido.

2.6. Ecuaciones con coeficientes constantes

Centrémosnos en el caso de la ecuación de coeficientes constantes,

$$x^{n)} + a_1 x^{n-1)} + \cdots + a_n x = f(t). \tag{2.19}$$

Si recurriéramos al sistema lineal equivalente, estaríamos buscando soluciones de la forma $x(t) = e^{\lambda t}$. Por tanto, podemos ahorrarnos ese paso y plantear directamente la **ecuación característica** con este tipo de soluciones exponenciales para la ecuación homogénea,

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

que proporciona n autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, con lo cual, en el caso de que todos sean distintos, tenemos ya la solución general de la ecuación,

$$x(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + k_n e^{\lambda_n t}, \tag{2.20}$$

sin necesidad de pasar por cambios de base ni diagonalizaciones.

Para el caso en el que aparezcan autovalores complejos, si la ecuación tiene coeficientes reales, deberemos expresar el resultado con funciones reales y los autovalores aparecerán en parejas de autovalores conjugados, $\lambda = a + ib$, $\bar{\lambda} = a - ib$, $b > 0$. En este caso, en lugar de presentar la solución con términos de la forma

$$k e^{\lambda t} + \bar{k} e^{\bar{\lambda} t} = c e^{at} \cos bt + d e^{at} \sin bt,$$

denotando $k = (c - id)/2$. Con lo cual, aparte de la exponenciales reales aparecen productos de exponenciales y funciones trigonométricas.

Finalmente, existe la posibilidad de que aparezcan autovalores repetidos. En este caso, la experiencia de los sistemas también ayuda, ya que sabemos que las exponenciales aparecen multiplicadas por polinomios. Si λ es un autovalor de multiplicidad g, las soluciones asociadas a este autovalor son de la forma

$$(k_1 t^{g-1} + \cdots + k_{g-1} t + k_g) e^{\lambda t},$$

es decir, un producto de un polinomio de grado $g - 1$ y la exponencial. Este caso cierra totalmente el problema de obtención de la solución general de la ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes.

2.7. Método de coeficientes indeterminados

Para resolver la ecuación inhomogénea basta encontrar una solución particular y agregarla a la solución general de la ecuación homogénea. Podemos abordar el problema por el método de variación de constantes, pero sabemos que conduce normalmente a expresiones farragosas. Por ello es conveniente, como ya hemos visto en algunos casos, recurrir a otras posibilidades, según la forma que tenga la función $f(t)$:

- $f(t) = e^{at} p_m(t)$, donde $p_m(t)$ es un polinomio de grado m: Si a no es solución de la ecuación característica, se puede probar una solución particular de la forma
$$x_p(t) = e^{at} q_m(t),$$

donde $q_m(t)$ es un polinomio de grado m. Si a es solución de multiplicidad g de la ecuación característica, se puede probar con

$$x_p(t) = t^g e^{at} q_m(t).$$

Obsérvese que el caso polinómico $a = 0$ está incluido. Por tanto, si $\lambda = 0$ es solución de la ecuación característica con multiplicidad g, lo cual supone que $x(t) = 1, t, \ldots, t^{g-1}$ son soluciones de la ecuación homogénea, y además $f(t) = p_m(t)$, tendremos que probar una solución particular de la forma

$$x_p(t) = t^g q_m(t).$$

- $f(t) = e^{at}\big(p_m(t)\cos bt + \tilde{p}_m(t)\sin bt\big)$, donde $p_m(t)$, $\tilde{p}_m(t)$ son polinomios de grado m: Si $a+ib$ no es solución de la ecuación característica, se puede probar una solución particular de la forma

$$x_p(t) = e^{at}\big(q_m(t)\cos bt + \tilde{q}_m(t)\sin bt\big),$$

donde $q_m(t)$, $\tilde{q}_m(t)$ son polinomios de grado m. Si $a + ib$ es solución de multiplicidad g de la ecuación característica, se puede probar con

$$x_p(t) = t^g e^{at}\big(q_m(t)\cos bt + \tilde{q}_m(t)\sin bt\big).$$

Ejemplo 2.7.1 *Veamos algunos casos particulares de aplicación del método a una ecuación cuyo término inhomogéneo es $f(t)$:*

Si $\lambda = 1, 2, 3$ y $f(t) = e^{2t}$, entonces $x(t) = k_1e^t + k_2e^{2t} + k_3e^{3t} + x_p(t)$ y hay que probar $x_p(t) = ate^{2t}$.
Si $\lambda = 1, 2, 3$ y $f(t) = te^{2t}$, hay que probar $x_p(t) = (at + b)te^{2t}$.
Si $\lambda = 1, 2, 2$ y $f(t) = e^{2t}$, entonces $x(t) = k_1e^t + k_2e^{2t} + k_3te^{2t} + x_p(t)$ y hay que probar $x_p(t) = at^2e^{2t}$.
Si $\lambda = 1, 2, 2, 2$ y $f(t) = t^2e^{2t}$, entonces $x(t) = k_1e^t + k_2e^{2t} + k_3te^{2t} + k_4t^2e^{2t} + x_p(t)$ y hay que probar $x_p(t) = (at^2 + bt + c)t^3e^{2t}$.
Si $\lambda = 0, 1, 2$ y $f(t) = t$, entonces $x(t) = k_1 + k_2e^t + k_3e^{2t} + x_p(t)$ y hay que probar $x_p(t) = (at + b)t$.
Si $\lambda = 0, 0, 2$ y $f(t) = t$, entonces $x(t) = k_1 + k_2t + k_3e^{2t} + x_p(t)$ y hay que probar $x_p(t) = (at + b)t^2$.
Si $\lambda = 0, 0, 2$ y $f(t) = 1$, hay que probar $x_p(t) = at^2$.
Si $\lambda = 0, 1, 2$ y $f(t) = \sin t$, hay que probar $x_p(t) = a\cos t + b\sin t$.
Si $\lambda = 0, 1 \pm 3i$ y $f(t) = e^{2t}\cos 3t$, entonces $x(t) = k_1 + k_2e^t\cos 3t + k_3e^t\sin 3t + x_p(t)$ y hay que probar $x_p(t) = e^{2t}(a\cos 3t + b\sin 3t)$.
Si $\lambda = 0, 2 \pm 3i$ y $f(t) = e^{2t}\sin 3t$, entonces $x(t) = k_1 + k_2e^{2t}\cos 3t + k_3e^{2t}\sin 3t + x_p(t)$ y hay que probar $x_p(t) = te^{2t}(a\cos 3t + b\sin 3t)$.
Si $\lambda = 0, 2 \pm 3i, 2 \pm 3i$ y $f(t) = te^{2t}\cos 3t$, entonces $x(t) = k_1 + k_2e^t\cos 3t + k_3e^t\sin 3t + k_4te^t\cos 3t + k_5te^t\sin 3t + x_p(t)$ y hay que probar

$$x_p(t) = t^2e^{2t}\big((at + b)\cos 3t + (ct + d)\sin 3t\big).$$

Si $\lambda = 1, 2, 3$ y $f(t) = t + e^{2t}$, hay que probar $x_p(t) = ate^{2t} + bt + c$.

Ejemplo 2.7.2 *Resolver la ecuación $x'' + 3x' + 2x = te^{-t}$. Hallar la solución que verifica $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.*

La ecuación característica,

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

proporciona autovalores distintos, $\lambda = -2, -1$. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-t}.$$

El término inhomogéneo, $f(t) = te^{-t}$, incluye una exponencial de un autovalor simple. Luego tenemos que probar una solución particular de la forma $x_p(t) = \left(at^2 + bt\right) e^{-t}$,

$$2at + (2a + b) = t \Rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = -1 \Rightarrow x_h(t) = \left(\frac{t^2}{2} - t\right) e^{-t},$$

con lo cual la solución general de la ecuación es

$$x(t) = k_1 e^{-2t} + \left(\frac{t^2}{2} - t + k_2\right) e^{-t}.$$

Resolvemos el problema de valores iniciales. Como

$$x'(t) = -2k_1 e^{-2t} + \left(-\frac{t^2}{2} + 2t - 1 - k_2\right) e^{-t},$$

$$1 = x(0) = k_1 + k_2, \quad 0 = x'(0) = -2k_1 - 1 - k_2 = 0 \Rightarrow k_1 = -2,\ k_2 = 3,$$

la solución pedida es

$$x(t) = -2e^{-2t} + \left(\frac{t^2}{2} - t + 3\right) e^{-t}.$$

Ejemplo 2.7.3 *Resolver la ecuación $x'' + 6x' + 9x = 50 \sin t$. Hallar la solución que verifica $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.*

La ecuación característica,

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0,$$

proporciona un autovalor doble, $\lambda = -3$. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = k_1 e^{-3t} + k_2 t e^{-3t}.$$

Para el término inhomogéneo, $f(t) = 50 \sin t$, tenemos que probar una solución particular de la forma $x_p(t) = a \sin t + b \cos t$,

$$(8a - 6b) \sin t + (8b + 6a) \cos t = 50 \sin t \Rightarrow a = 4,\ b = -3,$$

con lo cual la solución general de la ecuación es

$$x(t) = k_1 e^{-3t} + k_2 t e^{-3t} + 4 \sin t - 3 \cos t.$$

Resolvemos el problema de valores iniciales. Como

$$x'(t) = -3k_1 e^{-3t} + k_2(1 - 3t)e^{-3t} + 4 \cos t + 3 \sin t,$$

$$0 = x(0) = k_1 - 3, \quad 0 = x'(0) = -3k_1 + k_2 + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = 3,\ k_2 = 5,$$

la solución pedida es

$$x(t) = 3e^{-3t} + 5te^{-3t} + 4 \sin t - 3 \cos t.$$

Ejemplo 2.7.4 *Resolver la ecuación* $x'' - 2x' + 2x = 2t^2$. *Hallar la solución que verifica* $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

La ecuación característica,

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

proporciona dos autovalores complejos conjugados, $\lambda = 1 \pm i$. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = k_1 e^t \sin t + k_2 e^t \cos t.$$

Para el término inhomogéneo, $f(t) = 2t^2$, tenemos que probar una solución particular de la forma $x_p(t) = at^2 + bt + c$,

$$2at^2 + 2(b - 2a)t + 2(a - b + c) = 2t^2 \Rightarrow a = 1,\ b = 2,\ c = 1 \Rightarrow x_p(t) = (t + 1)^2,$$

con lo cual la solución general de la ecuación es

$$x(t) = k_1 e^t \sin t + k_2 e^t \cos t + (t + 1)^2.$$

Resolvemos el problema de valores iniciales. Como

$$x'(t) = k_1 e^t (\sin t + \cos t) + k_2 e^t (\cos t - \sin t) + 2(t + 1),$$

$$0 = x(0) = k_2 + 1, \quad 0 = x'(0) = k_1 + k_2 + 2 = 0 \Rightarrow k_1 = -1,\ k_2 = -1,$$

la solución pedida es

$$x(t) = -e^t \sin t - e^t \cos t + (t + 1)^2.$$

Esta técnica puede usarse, como hemos hecho, para sistemas de ecuaciones lineales de primer orden también. En este caso, la diferencia sutil radica en que si alguna función $f_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, es autofunción del sistema homogéneo de multiplicidad g, no basta con multiplicar la función prueba por t^g, sino que pueden aparecer los términos de potencias inferiores, $t^{g-1}, \ldots, t, 1$:

Sea $X' = AX + F(t)$ un sistema lineal con coeficientes constantes. Los casos de funciones $f_1(t), \ldots,\ f_n(t)$ que se pueden abordar sistemáticamente por el procedimiento de coeficientes indeterminados son los siguientes:

- $f_i(t) = e^{at} p_{m\,i}(t)$, donde $p_{m\,i}(t)$ es un polinomio de grado m: Si a no es solución de la ecuación característica, se puede probar una solución particular de la forma

  $$x_{p\,j}(t) = e^{at} q_{m\,j}(t), \quad j = 1, \ldots, n,$$

  donde $q_{m\,j}(t)$ son polinomios de grado m. Si a es autovalor de multiplicidad g del sistema homogéneo, se puede probar con

  $$x_{p\,j}(t) = e^{at} q_{m+g\,j}(t),$$

  es decir, se usan polinomios de grado $m + g$.

- $f_i(t) = e^{at}\big(p_{m\,i}(t)\cos bt + \tilde{p}_{m\ i}(t)\sin bt\big)$, donde $p_{m\,i}(t)$, $\tilde{p}_{m\,i}(t)$ son polinomios de grado m: Si $a+ib$ no es autovalor del sistema homogéneo, se puede probar una solución particular de la forma

$$x_{p\,j}(t) = e^{at}\big(q_{m\,j}(t)\cos bt + \tilde{q}_{m\,j}(t)\sin bt\big), \quad j = 1,\ldots,n,$$

donde $q_{m\,j}(t)$, $\tilde{q}_{m\,j}(t)$ son polinomios de grado m. Si $a+ib$ es solución de multiplicidad g de la ecuación característica, se puede probar con

$$x_{p\,j}(t) = e^{at}\big(q_{m+g\,j}(t)\cos bt + \tilde{q}_{m+g\,j}(t)\sin bt\big).$$

En ambos casos sobrarán g constantes arbitrarias, las debidas a las soluciones del sistema homogéneo, que se pueden tomar nulas de antemano o usarse para simplificar la solución particular.

La explicación para este proceder es sencilla. Por simplicidad, pensemos en un sistema de dos ecuaciones,

$$x' = ax + by + f(t), \quad y' = cx + dy + g(t),$$

donde $f(t)$, $g(t)$ entran en el marco anterior.

Para reducir el problema para el sistema a una ecuación, derivamos una de ellas, por ejemplo, la de x' y usamos las ecuaciones para eliminar y, y',

$$x'' = ax' + by' + f'(t) = ax' + bcx + bdy + bg(t) + f'(t),$$

y obtener una ecuación sólo en x,

$$x'' = (a+d)x' + (bc-ad)x + bg(t) + f'(t) - df(t),$$

de modo que, una vez resuelta, podemos obtener y simplemente despejando,

$$y = \frac{x' - ax - f(t)}{b}.$$

A la vista de esta expresión es claro que en la solución puede aparecer $f(t)$, aunque sea autofunción.

Ejemplo 2.7.5 *Veamos algunos casos particulares de aplicación del método a un sistema con términos inhomogéneos $f(t)$, $g(t)$:*

Si $\lambda = 1, 2$ y $f(t) = e^{2t}$, hay que probar $x_p(t) = (at+b)e^{2t}$, $y_p(t) = (ct+d)e^{2t}$, aunque sobrará un coeficiente, b o d.
Si $\lambda = 1, 2$ y $f(t) = te^{2t}$, hay que probar

$$x_p(t) = (at^2 + bt + c)e^{2t}, \quad y_p(t) = (dt^2 + et + f)e^{2t},$$

aunque sobrará un coeficiente, c o f.
Si $\lambda = 2, 2$ y $f(t) = e^{2t}$, hay que probar

$$x_p(t) = (at^2 + bt + c)e^{2t}, \quad y_p(t) = (dt^2 + et + f)e^{2t},$$

aunque sobrarán dos coeficientes.
Si $\lambda = 2, 2$ y $f(t) = te^{2t}$, hay que probar

$$x_p(t) = (at^3 + bt^2 + ct + d)e^{2t}, \quad y_p(t) = (et^3 + ft^2 + gt + h)e^{2t},$$

aunque sobrarán dos coeficientes.
Si $\lambda = 0, 1$ y $f(t) = t$, hay que probar $x_p(t) = at^2 + bt + c$, $y_p(t) = dt^2 + et + f$, aunque sobrará un coeficiente, c o f.
Si $\lambda = 0, 0$ y $f(t) = t$, hay que probar

$$x_p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d, \quad y_p(t) = et^3 + ft^2 + gt + h,$$

aunque sobrarán dos coeficientes.
Si $\lambda = 0, 0$ y $f(t) = 1$, hay que probar $x_p(t) = at^2 + bt + c$, $x_p(t) = dt^2 + et + f$, aunque sobrarán dos coeficientes.
Si $\lambda = 0, 1$ y $f(t) = \sin t$, hay que probar

$$x_p(t) = a\cos t + b\sin t, \quad y_p(t) = c\cos t + d\sin t.$$

Si $\lambda = 1 \pm 3i$ y $f(t) = e^{2t}\cos 3t$, hay que probar

$$x_p(t) = e^{2t}(a\cos 3t + b\sin 3t), \quad y_p(t) = e^{2t}(c\cos 3t + d\sin 3t).$$

Si $\lambda = 2 \pm 3i$ y $f(t) = e^{2t}\sin 3t$, hay que probar

$$x_p(t) = e^{2t}\left((at + b)\cos 3t + (ct + d)\sin 3t\right),$$

$$y_p(t) = e^{2t}\left((et + f)\cos 3t + (gt + h)\sin 3t\right),$$

aunque sobrarán dos coeficientes.
Si $\lambda = 1, 2$ y $f(t) = e^{3t}$, $g(t) = t$, hay que probar

$$x_p(t) = ae^{3t} + bt + c, \quad y_p(t) = de^{3t} + et + f.$$

Si $\lambda = 1, 2$ y $f(t) = e^{3t}$, $g(t) = \sin t$, hay que probar

$$x_p(t) = ae^{3t} + b\cos t + c\sin t, \quad y_p(t) = de^{3t} + e\cos t + f\sin t.$$

Ejemplo 2.7.6 *Resolver el sistema de ecuaciones* $x' = 2x + 3y + 4te^t$, $y' = -x - 2y$.

En forma matricial, el sistema se puede resolver

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4te^t \\ 0 \end{pmatrix} = AX + F(t).$$

Para ello, calculamos sus autovalores,

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1,$$

y sus correspondientes autovectores.

Para $\lambda = -1$,

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_{-1} \propto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Y para $\lambda = 1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 \propto \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, una base de autovectores está formada por $B = \{v_{-1}, v_1\}$ y la matriz de cambio de base será $P = (v_{-1}, v_1)$ para obtener una matriz diagonal $D = \mathrm{diag}(-1, 1)$, $A = PDP^{-1}$,

$$W(t) = Pe^{Dt} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} & -3e^t \\ e^{-t} & e^t \end{pmatrix}.$$

Así pues, la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = W(t)K = \left\{ \begin{array}{l} x_h(t) = -k_1 e^{-t} - 3k_2 e^t \\ y_h(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^t \end{array} \right. .$$

Para calcular una solución particular del sistema inhomogéneo, como e^t es autofunción de multiplicidad uno del problema homogéneo, buscamos soluciones de la forma

$$x_p(t) = (at^2 + bt + c)e^t, \quad y_p(t) = (dt^2 + et + f)e^t,$$

que sustituidas en el sistema proporcionan

$$(a - 2a - 3d)t^2 + (b + 2a - 2b - 4 - 3e)t + (c + b - 2c - 3f) = 0,$$

$$(d + a + 2d)t^2 + (e + 2d + b + 2e)t + (f + e + c + 2f) = 0,$$

$$a = 3,\ b = -1,\ c = -1 - 3f,\ d = -1,\ e = 1,\ \forall f.$$

Escogemos una solución particular sencilla, como $f = 0$,

$$x_p(t) = (3t^2 - t - 1)e^t, \quad y_p(t) = (-t^2 + t)e^t,$$

y la solución general del sistema será

$$x(t) = -k_1 e^{-t} - 3k_2 e^t + (3t^2 - t - 1)e^t, \quad y(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^t + (t - t^2)e^t.$$

Obviamente, la diferencia entre soluciones particulares debida a f es una solución del sistema homogéneo.

2.8. Ecuaciones de Euler

Finalmente, acabamos la sección con un tipo de ecuaciones lineales que se reducen a ecuaciones con coeficientes constantes. Son las llamadas **ecuaciones de Euler**,

$$t^n x^{n)} + a_1 t^{n-1} x^{n-1)} + \cdots + a_{n-1} t x' + a_n x = f(t), \quad t > 0. \tag{2.21}$$

Si realizamos el cambio de variable independiente $t = e^u \Leftrightarrow u = \ln t$,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du}\frac{du}{dt} = \frac{1}{t}\frac{dx}{du}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{t^2}\left\{\frac{d^2x}{du^2} - \frac{dx}{du}\right\}, \ldots$$

observamos que cada derivada k-ésima de x respecto a t se ve sustituida por una combinación lineal de derivadas con respecto a u dividida por t^k, con lo cual al sustituir en la ecuación los términos dependientes de t desaparecen y nos queda una ecuación con coeficientes constantes.

Ejemplo 2.8.1 *Expresar* $t^2x'' + atx' + bx = 0$ *como ecuación lineal con coeficientes constantes.*

Al realizar el cambio de variable y sustituir las derivadas correspondientes, la ecuación equivalente es

$$\ddot{x} + (a-1)\dot{x} + bx = 0,$$

denotando con un punto las derivadas respecto a u.

Ejemplo 2.8.2 *Resolver la ecuación* $t^2x'' + tx' + x = t$. *Hallar la solución que verifica* $x(1) = 0 = x'(1)$.

La ecuación homogénea se reduce a una ecuación con coeficientes constantes mediante el cambio $t = e^u$,

$$\ddot{x} + x = 0 \Rightarrow x_h(t) = k_1 \sin u + k_2 \cos u = k_1 \sin(\ln t) + k_2 \cos(\ln t).$$

La ecuación inhomogénea con coeficientes constantes es

$$\ddot{x} + x = e^u,$$

con lo cual podemos probar una solución inhomogénea de la forma $x_p(u) = ae^u$,

$$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow x_p(t) = \frac{e^u}{2} = \frac{t}{2},$$

y la solución general de la ecuación es, pues,

$$x(t) = k_1 \sin(\ln t) + k_2 \cos(\ln t) + \frac{t}{2}.$$

Buscamos la solución que verifica $x(1) = 0$,

$$0 = x(1) = k_2 + \frac{1}{2},\ 0 = x'(1) = k_1 + \frac{1}{2} \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{2} = k_2,$$

$$x(t) = \frac{t - \sin(\ln t) - \cos(\ln t)}{2}.$$