Capítulo 3

Transformadas integrales

Objetivos

- Conocer las propiedades de la transformada de Laplace y de Fourier.
- Aplicar la transformada de Laplace y de Fourier a la resolución de ecuaciones diferenciales lineales.

3.1. Transformadas integrales

Las **transformadas integrales** son operadores que asocian nuevas funciones a funciones de un determinado conjunto mediante integración respecto a un determinado parámetro,

$$F(s) = \int_a^b K(t,s)f(t)\,dt. \tag{3.1}$$

A la función $K(t,s)$ se la denomina **núcleo integral** de la transformación y el intervalo de integración (a,b) suele ser infinito. A la función $F(s)$ se la denomina **transformada** de la función f.

Normalmente la transformada integral se puede invertir por medio de una **transformada inversa**, con un núcleo integral parecido al inicial.

Obviamente las transformadas integrales son transformaciones lineales. Para f,g funciones transformables y $a,b \in \mathbb{R}$,

$$h(t) = af(t) + bg(t) \Rightarrow H(s) = aF(s) + bG(s),$$

al estar definidas por medio de integración, que es una operación lineal.

La idea de las transformadas integrales es descomponer la función f en suma infinita de funciones de la forma $K(t,s_0)$, según interese para el problema concreto.

Por ejemplo, en electromagnetismo, óptica, hidrodinámica... puede interesar descomponer una señal $f(t)$ es suma de senos y cosenos de distinta frecuencia ω y amplitud A_ω, las llamadas ondas planas $A_\omega e^{i\omega t}$,

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}f(t)\,dt, \qquad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}F(\omega)\,d\omega,$$

es decir, $F(\omega)$ es esencialmente la amplitud A_ω correspondiente a la frecuencia ω en la descomposición de la señal $f(t)$ en ondas planas.

En teoría de control, circuitos, resistencia de materiales es importante otra transformada integral, la **transformada de Laplace**,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(s)\, dt, \tag{3.2}$$

que, como su aspecto indica, es especialmente útil para analizar problemas en los que predomine un comportamiento exponencial, como, por ejemplo, los sistemas y ecuaciones lineales de coeficientes constantes que se estudiaron en el tema anterior. Esta será la principal aplicación que le daremos en este tema.

En el caso de la transformada de Laplace, la transformada inversa no es sencilla, ya que recurre a técnicas de variable compleja.

Aparte de la transformada de Laplace, existen muchas otras, las transformadas de Hankel, Mellin, Hilbert, Z... que se aplican a problemas concretos de la teoría de la señal.

3.2. Propiedades de la transformada de Laplace

La principal propiedad de las transformadas integrales es que permiten reducir un problema dinámico, dependiente del tiempo, con derivadas de la función señal, a un problema algebraico, sobre el papel mucho más sencillo de resolver.

Integrando por partes, $u = e^{-st}$, $v = f(t)$

$$\int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt = \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = sF(s) - f(0),$$

obtenemos un importante resultado,

$$G(s) = sF(s) - f(0), \quad g(t) = f'(t), \tag{3.3}$$

si $e^{-st} f(t)$ tiende a cero para algún valor de s cuando t tiende a infinito.

Observamos que la transformada ha cumplido su objetivo: ha convertido la derivada de f en un producto por la variable independiente s.

Este resultado se puede iterar para obtener expresiones de derivadas superiores, $h(t) = f^{n)}(t)$,

$$H(s) = s^n F(s) - f^{n-1)}(0) - s f^{n-2)}(0) - \cdots - s^{n-2} f'(0) - s^{n-1} f(0), \tag{3.4}$$

si f, f',..., $f^{n)}$ admiten transformada convergente.

Por tanto, estamos sustituyendo esencialmente derivadas de orden n por potencias de grado n de la variable independiente.

Ejemplo 3.2.1 *Transformada de la función exponencial $f(t) = e^{at}$.*

Por integración directa,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\, dt = \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-a},$$

para $s > a$.

Ejemplo 3.2.2 *Transformada de la función potencia $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$.*

Por integración por partes, $u = t^n$, $v = -e^{-st}/s$

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st} t^n \, dt = -\left[t^n \frac{e^{-st}}{s} \right]_0^\infty + \frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} \, dt \\ &= \frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} \, dt = \cdots = \frac{n!}{s^n} \int_0^\infty e^{-st} \, dt = -\frac{n!}{s^n} \left[\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^\infty = \frac{n!}{s^{n+1}}, \end{aligned}$$

para $s > 0$.

Recurriendo a la función **Gamma de Euler**, definida para $x > 0$,

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, dt, \tag{3.5}$$

que no es más que una generalización del factorial, ya que, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \qquad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n),$$

como se comprueba fácilmente,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} \, dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1 = 0!, \ \Box$$

integrando por partes, $u = t^x$, $v = -e^{-t}$,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x \, dt = [-e^{-t} t^x]_0^\infty + x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, dt = x\Gamma(x), \ \Box$$

y, por tanto,

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2) \cdots 1 \cdot \Gamma(1) = (n-1)!, \ \Box$$

podemos extender la transformada de Laplace a cualquier potencia no entera, $\alpha > -1$, con el cambio de variable $u = st$,

$$\int_0^\infty e^{-st} t^\alpha \, dt = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^\alpha \, du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \ \Box$$

que, obviamente, se reduce a la expresión conocida para $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^\infty e^{-st} t^n \, dt = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Ejemplo 3.2.3 *Transformada de la función $f(t) = \sqrt{t}$.*

Como $f(t) = t^{1/2}$, podemos aplicar la fórmula para potencias no naturales con $\alpha = 1/2$,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \sqrt{t} \, dt = \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}},$$

$$\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

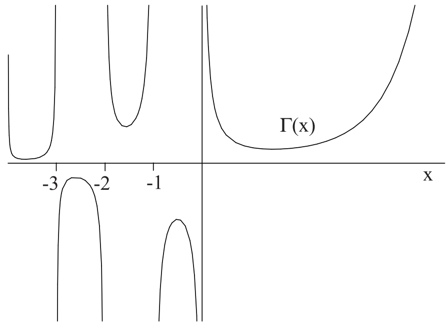

Figura 3.1: Gráfica de la función $\Gamma(x)$

Ejemplo 3.2.4 *Transformada de las funciones $f(t) = \sin at$, $g(t) = \cos at$.*

Las podríamos obtener por integración directa, pero resulta más cómodo usar la transformada de la exponencial,

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt = \frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{-st}\left(e^{iat}-e^{-iat}\right)\,dt \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ia}-\frac{1}{s+ia}\right) = \frac{a}{s^2+a^2}, \\ G(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}\left(e^{iat}+e^{-iat}\right)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ia}+\frac{1}{s+ia}\right) = \frac{s}{s^2+a^2}. \end{aligned}$$

Esta última transformada la podríamos obtener también directamente, teniendo en cuenta que $g(t) = f'(t)/a$. Por tanto,

$$G(s) = \frac{sF(s)-f(0)}{a} = \frac{s}{s^2+a^2}.$$

Hay productos de funciones cuya transformada es sencilla, como es el caso de las exponenciales:
Sea $g(t) = e^{at}f(t)$. Entonces,

$$G(s) = F(s-a), \tag{3.6}$$

es decir, la exponencial se traduce en una traslación del parámetro, como se comprueba,

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt = F(s-a). \ \Box$$

Y también el producto por monomios:
Sea $g(t) = t^n f(t)$. Entonces,

$$G(s) = (-1)^n F^{n)}(s), \tag{3.7}$$

como se comprueba fácilmente, derivando bajo el signo de integral,

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_0^\infty e^{-st}t^n f(t)\,dt = (-1)^n \int_0^\infty \frac{d^n(e^{-st})}{ds^n} f(t)\,dt \\ &= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = (-1)^n F^{n)}(s). \ \square \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.5 *Calcular la transformada de* $h(t) = t^n e^{at}$.

No es preciso realizar integral alguna, ya que, si utilizamos la transformada de $f(t) = t^n$,

$$H(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at} f(t)\,dt = F(s-a) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}},$$

pero también podíamos haberla calculado usando la transformada de $g(t) = e^{at}$,

$$H(s) = \int_0^\infty e^{-st}t^n g(t)\,dt = (-1)^n G^{n)}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s-a}\right) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

No sólo eso, la división por t también tiene transformada sencilla:
Sea $g(t) = f(t)/t$ tal que $\lim\limits_{t\to 0} g(t)$ es finito. Entonces,

$$G(s) = \int_s^\infty F(u)\,du. \tag{3.8}$$

La demostración es sencilla. Para $t > 0$,

$$\int_s^\infty e^{-ut}\,du = -\left[\frac{e^{-ut}}{t}\right]_s^\infty = \frac{e^{-st}}{t},$$

por tanto, sustituyendo esta expresión,

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty dt\, f(t) \int_s^\infty du\, e^{-ut} \\ & \int_s^\infty du \int_0^\infty dt\, f(t)\, e^{-ut} = \int_s^\infty F(u)\,du. \ \square \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.6 *Calcular la transformada de* $g(t) = \dfrac{\sin t}{t}$.

Llamemos $f(t) = \sin t$. Sabemos que $F(s) = 1/(s^2+1)$. Por tanto, aplicando el resultado anterior,

$$G(s) = \int_s^\infty \frac{du}{u^2+1} = [\arctan u]_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \operatorname{arccot} s.$$

También es interesante la expresión de la transformada de una función f periódica de periodo T, $f(t) = f(t+T)$,

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt, \tag{3.9}$$

como se comprueba fácilmente, sin más que descomponer la integral de la transformada en intervalos correspondientes a un periodo,

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsT} \int_{0}^{T} e^{-su} f(u)\, du \\ &= \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-su} f(u)\, du, \end{aligned}$$

haciendo el cambio $u = t - nT$ y usando la suma de una serie geométrica de razón $e^{-sT} < 1$. □

3.3. Inversión de la transformada de Laplace

Dado que la transformada de Laplace permite simplificar y resolver los problemas de ecuaciones diferenciales, reduciéndolos a problemas algebraicos, es necesario saber cómo invertir la transformada de Laplace para devolver la solución del problema a las variables originales.

Desafortunadamente, no hay una expresión de la transformada inversa de Laplace al estilo de la que existe para la transformada de Fourier. Sin embargo, sí se puede abordar el problema con técnicas de variable compleja:

Teorema 3.3.1 *Sea $F(s)$, función holomorfa compleja, salvo en un conjunto finito de puntos $\{s_0, \ldots, s_n\}$ situados en el semiplano $\Re(s) < a$. Si existen $K, R, \alpha > 0$ tales que $F(s)s^{-\alpha} < K$ para $|s| > R$, entonces, para $\Re(s) > a$, $F(s)$ es la transformada de Laplace de una función $f(t)$ dada por*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Res}\,\left(e^{st}F(s), s_k\right), \qquad t > 0. \tag{3.10}$$

El resultado anterior proviene de aplicar el teorema de los residuos a la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \int_{a-iR}^{a+iR} ds e^{st} F(s),$$

cerrando el circuito complejo de modo que la acotación de $F(s)$ permita anular la integral sobre las rectas que cierran el circuito.

Ejemplo 3.3.1 *Hallar la función cuya transformada es $F(s) = (s-a)^{-(n+1)}$.*

Podemos aplicar el teorema anterior, pues claramente se cumple la acotación con $K = 1$, $\alpha = 0$.

Tenemos un polo único de orden $n+1$ en $s = a$, luego el residuo será

$$\mathrm{Res}\,\left(e^{st}(s-a)^{-(n+1)}, a\right) = \frac{1}{n!} \left.\frac{d^n(e^{st})}{ds^n}\right|_{s=a} = \frac{t^n}{n!} e^{at} = f(t),$$

de acuerdo con el resultado del ejemplo 3.2.5.

No obstante lo anterior, en la mayoría de los casos es preferible abordar el problema de la inversión de la transformada de Laplace, bien descomponiendo la función transformada en sumandos que sean fracciones simples de fácil identificación, e inversión, por tanto. O descomponer la función transformada en producto de funciones sencillas cuya transformada inversa se conozca, de modo que la inversión se pueda realizar por convolución. Esta última técnica tiene, no obstante, el problema de tener que realizar la integral de convolución,

Resumiendo, existen al menos tres formas de invertir la transformada de Laplace: recurrir a la integral compleja por el teorema de los residuos, descomponer la función en fracciones simples e identificar los términos resultantes o descomponer la función en producto de funciones sencillas y realizar el producto de convolución de sus primitivas.

3.4. Convolución de funciones

Otra operación importante, relacionada con las transformadas integrales es el **producto de convolución** de dos funciones,

$$\big(f * g\big)(t) := \int_0^t f(u)g(t-u)\,du. \tag{3.11}$$

En realidad la definición usual de convolución de funciones es

$$\big(f * g\big)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)\,du, \tag{3.12}$$

pero como para la transformada de Laplace sólo intervienen los valores $f(t)$, $g(t)$, $t > 0$, es como si hubiéramos tomado nulos los valores $f(t)$, $g(t)$, $t < 0$.

Esta operación es conmutativa, $f * g = g * f$. Comprobémoslo con un cambio de variable de integración $v = t - u$, $dv = -du$,

$$\big(f * g\big)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\,du = \int_0^t f(t-v)g(v)\,dv = \big(g * f\big)(t). \ \square$$

También es sencillo comprobar que esta operación es asociativa,

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

El origen de esta operación, independientemente de sus propiedades matemáticas, es múltiple.

Supongamos que queremos sustituir una función $f(t)$ con malas propiedades de continuidad y derivabilidad por otra función más suave $\tilde{f}(t)$. Una posibilidad sería sustituir $f(t)$ por el promedio de esta función en los valores próximos a t. Para ello, integraríamos la función f por una función de integral unidad que tome valores en torno a t y decaiga muy rápidamente, de modo que sólo contribuyan al promedio los valores próximos a t, por ejemplo, la función $g(u - t) = e^{-(t-u)^2/2}/\sqrt{\pi}$. La nueva función $\tilde{f}(t)$ será, pues,

$$\tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(u-t)\,du,$$

que es esencialmente la convolución de f y g si g es simétrica, $g(t-u) = g(u-t)$.

De este modo, a pesar de que f pueda no ser siquiera continua, su sustituta suavizada, $\tilde{f}(t)$, sería tan suave como g, ya que la clase de derivabilidad de $\tilde{f}$ será la de g, ya que es esta función la que se deriva al derivar $\tilde{f}$. Escogiendo una función g de clase C^∞ estaríamos sustituyendo f por una función $\tilde{f}$ de clase C^∞.

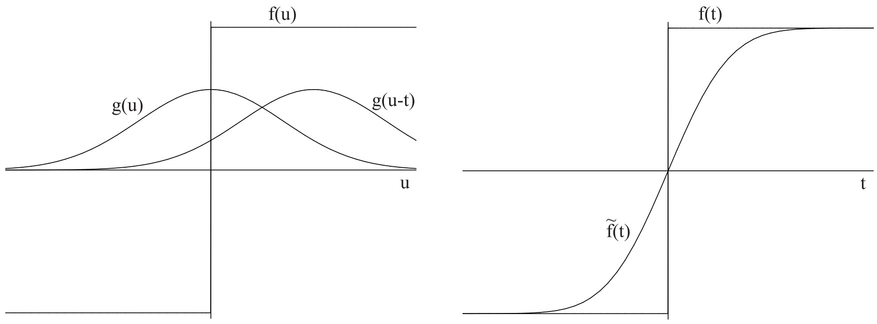

Figura 3.2: Gráfica de $f(u)$ y la función suavizada $\tilde{f}(t) = \big(f * g\big)(t)$

Ejemplo 3.4.1 *Convolución de la función* signo (t) *por* $g(t) = e^{-t^2}/\sqrt{\pi}$.

Haciendo los cambios $v = t - u$, $w = u - t$, y teniendo en cuenta que g es una función par,

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(t) &= \big(f * g)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{signo}(u) e^{-(t-u)^2}\,du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-(t-u)^2}\,du \\
&- \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-(t-u)^2}\,du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-v^2}\,dv - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-t} e^{-w^2}\,dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-t}^{t} e^{-v^2}\,dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{t} e^{-v^2}\,dv = \operatorname{erf}(t).
\end{aligned}$$

Vemos que se ha logrado el objetivo buscado. Se ha sustituido la función signo por una función similar, la función error gaussiano, con mejores propiedades de derivabilidad.

Otra interpretación interesante está relacionada con el proceso de medida de una señal $f(t)$, que involucra la interacción con un aparato de medida, un detector, un filtro, que podemos modelizar en regimen lineal por una función $g(t)$ a través de una integral,

$$\tilde{f}(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(u-t)\,du.$$

Por ejemplo, un modelo sencillo e idealizado de filtro o detector es el que "integra" la señal que le llega en un intervalo centrado alrededor del instante t, $[t - a/2, t + a/2]$, para dar la medida de la señal,

$$g(u) = \frac{\theta(u + a/2) - \theta(u - a/2)}{a} = \frac{\chi_{[-a/2,a/2]}(u)}{a} \Rightarrow \tilde{f}(t) := \frac{1}{a} \int_{t-a/2}^{t+a/2} f(u)\,dt.$$

Vemos que en este caso, en el límite de un intervalo muy pequeño, $a \to 0$, recuperaríamos la señal original, $\lim_{t\to a} \tilde{f}(t) = f(t)$.

Pero la propiedad más relevante a nuestros efectos es que, al aplicar la transformada de Laplace a la convolución de dos funciones, obtenemos el producto ordinario de las funciones transformadas. Sea $h = f * g$,

$$H(s) = F(s)G(s). \tag{3.13}$$

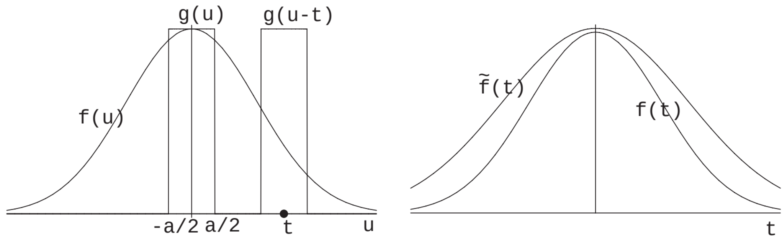

Figura 3.3: Gráficas de la señal $f(u)$, el filtro $g(u)$ y la señal medida $\tilde{f}(t)$

Comprobémoslo haciendo el cambio de variables $T = t - u$, $U = u$,

$$\begin{aligned} H(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\big(f * g\big)(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\,dt \int_0^t f(u)g(t-u)\,du \\ &= \int_0^\infty e^{-sU} f(U)\,dU \int_0^\infty e^{-sT} g(T)\,dT = F(s)G(s). \ \square \end{aligned}$$

Esta expresión va a ser útil para invertir transformadas de Laplace, ya que nos da la función cuya transformada es un producto ordinario de funciones. Y tiene una notable importancia, ya que nos permite factorizar el efecto del filtro o de la función regularizadora $g(t)$.

Ejemplo 3.4.2 *Transformada inversa de* $H(s) = 1/(s^2 - a^2)$.

Podemos considerar la función como un producto,

$$H(s) = F(s)G(s),\ F(s) = \frac{1}{s+a},\ G(s) = \frac{1}{s-a},\ f(t) = e^{-at},\ g(t) = e^{at},$$

de funciones cuya transformada es conocida.

Por tanto, podemos invertir la transformación recurriendo al producto de convolución,

$$\begin{aligned} h(t) &= \big(f * g\big)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\,du = \int_0^t e^{-au}e^{a(t-u)}\,du = e^{at}\left[\frac{e^{-2au}}{-2a}\right]_0^t \\ &= \frac{e^{at} - e^{-at}}{2a} = \frac{\sinh at}{a}, \end{aligned}$$

aunque este resultado se podría haber obtenido de manera directa, descomponiendo en fracciones simples $H(s)$,

$$H(s) = \frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right\} \Rightarrow h(t) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2a}.$$

También podíamos haberlo resuelto usando teoría de residuos, ya que la función es claramente holomorfa, acotada para grandes valores de $|s|$ y tiene sólo dos polos simples, $s = \pm a$. Por tanto,

$$\operatorname{Res}\big(e^{st}(s^2 - a^2)^{-1}, \pm a\big) = \lim_{s \to \pm a} \frac{(s \mp a)e^{st}}{s^2 - a^2} = \lim_{s \to \pm a} \frac{e^{st}}{s \pm a} = \pm\frac{e^{\pm at}}{2a},$$

con lo cual, de acuerdo con los resultados anteriores,

$$f(t) = \mathrm{Res}\,\big(e^{st}(s^2-a^2)^{-1}, a\big) + \mathrm{Res}\,\big(e^{st}(s^2-a^2)^{-1}, -a\big) = \frac{e^{at}}{2a} - \frac{e^{-at}}{2a}.$$

Ejemplo 3.4.3 *Calcular la transformada de la primitiva* $h(t) = \int_0^t f(t)\,dt$ *de una función* f.

De la expresión de h deducimos que esta función es la convolución de f con la función constante unidad $g(t) = 1$. Por tanto, su transformada es

$$H(s) = F(s)G(s) = \frac{F(s)}{s}.$$

Este resultado, sin embargo, es consecuencia directa de la expresión de la transformada de una derivada. Como $f(t) = h'(t)$,

$$F(s) = sH(s) - h(0) \Rightarrow H(s) = \frac{F(s)}{s} + \frac{h(0)}{s},$$

expresión que coincide con la anterior, ya que hemos escogido la primitiva $h(t)$ de modo que se anule en el origen,

$$h(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0.$$

3.5. Distribuciones

Con la idea de representar funciones definidas a trozos, es conveniente introducir la **función paso, escalón o de Heaviside** θ,

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}, \tag{3.14}$$

que multiplicada por una función f tiene el efecto de anular los valores de $f(t)$ en los negativos.

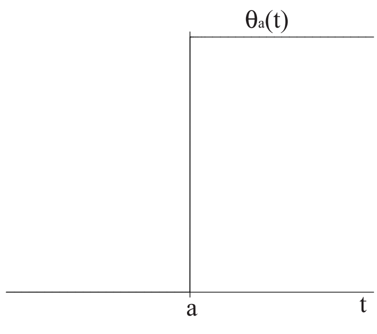

Figura 3.4: Gráfica de la función $\theta_a(t)$

Del mismo modo, podemos definir $\theta_a(t) = \theta(t-a)$,

$$\theta_a(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{array} \right. . \tag{3.15}$$

Por ejemplo, podemos expresar la función característica, o filtro constante, del intervalo $[a,b]$ como el producto $\chi_{[a,b]}(t) = \theta(t-a)\theta(b-t)$,

$$\chi_{[a,b]}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & t \notin [a,b] \\ 1 & t \in [a,b] \end{array} \right. . \tag{3.16}$$

En particular, aparece la relación entre definiciones de convolución,

$$\big(f * g\big)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\theta(u)g(t-u)\theta(t-u)\,du = \int_0^t f(u)g(t-u)\,du,$$

para funciones f, g que se anulan sobre los negativos.

Ejemplo 3.5.1 *Transformada de Laplace de la función paso θ_a, $a > 0$.*

$$\Theta_a(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\theta_a(t)\,dt = \int_a^{\infty} e^{-st}\,dt = -\left[\frac{e^{-st}}{s}\right]_a^{\infty} = \frac{e^{-as}}{s},$$

para $s > 0$.

La función paso es especialmente útil para expresar de manera condensada funciones a trozos.

Ejemplo 3.5.2 *Expresar la función valor absoluto con funciones paso.*

$$|t| = \left\{ \begin{array}{ll} -t & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{array} \right. = t\big(\theta(t) - \theta(-t)\big).$$

Ejemplo 3.5.3 *Expresar la función signo con funciones paso.*

$$\operatorname{signo}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{array} \right. = \theta(t) - \theta(-t),$$

que podemos ver como la derivada de la función valor absoluto,

$$\frac{d|t|}{dt} = \operatorname{signo}(t).$$

También es útil la expresión de la transformada de $g(t) = f(t-a)\theta(t-a)$,

$$G(s) = e^{-as}F(s). \tag{3.17}$$

Haciendo el cambio de variable $u = t - a$,

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st}f(t-a)\theta(t-a)\,dt = \int_a^{\infty} e^{-st}f(t-a)\,dt \\ &= e^{-as}\int_0^{\infty} e^{-su}f(u)\,du = e^{-as}F(s). \ \square \end{aligned}$$

La función paso $\theta_a(t)$ es discontinua en $t = a$, con lo cual no tiene sentido calcular su derivada. Sería nula en todos los puntos, por tratarse de constantes, salvo en $t = a$, donde no está definida (es común representarla en los libros de física como una "función impulso" que se anula en todos los puntos, salvo en $t = a$, donde toma el valor "infinito"). Por ello es por lo que decimos que la derivada de θ_a no es una función, sino una **distribución o función generalizada**, que sólo tiene sentido cuando actúa sobre otras funciones.

Por ejemplo, una función ordinaria f actúa sobre otras funciones ϕ por simple integración,

$$f[\phi] := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)\,dt, \tag{3.18}$$

para lo cual restringiremos ϕ, **función de prueba**, a un espacio de funciones con buenas propiedades. Normalmente se exige que sea de clase C^∞ y que decrezca en infinito más rápido que cualquier polinomio o que sea de soporte compacto, para que la integral anterior esté siempre bien definida.

Por ejemplo, la propia función paso actúa sobre funciones de manera trivial,

$$\theta_a[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_a(t)\phi(t)\,dt = \int_{a}^{\infty} \phi(t)\,dt.$$

De esta manera, aprovechando las buenas propiedades de las funciones de prueba, podemos definir las derivadas de distribuciones por simple integración por partes,

$$f'[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\phi(t)\,dt = [f(t)\phi(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi'(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi'(t)\,dt,$$

aunque el primer término pueda no tener sentido directamente, ya que f puede no ser derivable:

$$f'[\phi] := -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi'(t)\,dt. \tag{3.19}$$

De esta manera, definimos una distribución **delta de Dirac** como $\delta_a(t) = \delta(t-a) = \theta_a'(t)$, de modo que

$$\begin{aligned}\delta_a[\phi] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t)\phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\phi(t)\,dt := -\int_{-\infty}^{\infty} \theta_a(t)\phi'(t)\,dt \\ &= -\int_{a}^{\infty} \phi'(t)\,dt = -\left[\phi(t)\right]_a^{\infty} = \phi(a),\end{aligned}$$

de donde concluimos que la actuación de la delta de Dirac sobre una función simplemente es evaluar esa función en a,

$$\delta_a[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t)f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t)\,dt = f(a). \tag{3.20}$$

Por ello, sólo importa cómo se comporta la función prueba en las proximidades de a.

La distribución δ tiene una serie de propiedades importantes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) = 1, \tag{3.21}$$

como se comprueba haciendo actuar la distribución sobre una función que valga la unidad en torno a $t = a$.

$$f(t)\delta_a(t) = f(a)\delta_a(t), \tag{3.22}$$

como se comprueba directamente.

En este sentido, podemos calcular la transformada de Laplace de la distribución δ,

$$\Delta_a(s) = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t-a)\,dt = \left\{ \begin{array}{ll} e^{-as} & a \geq 0 \\ 0 & a < 0 \end{array} \right. , \tag{3.23}$$

para $s > 0$.

Obsérvese que se ha incluido el caso $a = 0$ en el cálculo anterior, asignando a la distribución $\delta(t)$ la transformada de Laplace $\Delta(s) = 1$ por continuidad en el parámetro a,

$$\Delta(s) = \Delta_0(s) = \lim_{a\to 0^+} \Delta_a(s) = \lim_{a\to 0} e^{-as} = 1, \quad \text{si } s > 0.$$

Esto se hace así dado que la integral,

$$\int_0^\infty e^{-st}\delta(t)\,dt = \int_0^\infty \delta(t)\,dt,$$

no está bien definida, al incluir el valor $t = 0$ en el borde del intervalo.

Por sus propiedades, la delta de Dirac se emplea en física para modelizar fuerzas que actúan durante un breve lapso de tiempo.

Ejemplo 3.5.4 *Derivada de la delta de Dirac.*

También podemos calcular la derivada de la distribución delta de Dirac, usando la definición de la derivada de una distribución,

$$\delta'_a[\phi] = -\int_{-\infty}^\infty \delta(t-a)\phi'(t)\,dt = -\phi'(a),$$

por lo que la derivada de la delta es una distribución que proporciona el valor de la derivada de la función sobre la que actúa en a, cambiado de signo,

$$\int_{-\infty}^\infty \delta'_a(t)\phi(t)\,dt = -\phi'(a).$$

En particular,

$$\int_{-\infty}^\infty \delta'_a(t)\,dt = 0.$$

El producto de una función derivable $f(t)$ por la derivada de la delta también tiene una expresión local, pero no tan sencilla como para la delta,

$$f(t)\delta'_a(t) = f(a)\delta'_a(t) - f'(a)\delta_a(t),$$

como se comprueba con una función prueba $\phi(t)$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \{f(t)\delta'_a(t)\}\,\phi(t)\,dt &= -\big(f\phi\big)'(a) = -f(a)\phi'(a) - f'(a)\phi(a) \\ &= \int_{-\infty}^\infty \{f(a)\delta'_a(t) - f'(a)\delta_a(t)\}\,\phi(t)\,dt. \ \square \end{aligned}$$

Y su transformada de Laplace es, denotando $g(t) = \delta'_a(t)$,

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\delta'_a(t)\,dt = -\int_0^\infty \delta(t-a)\frac{de^{-st}}{dt}\,dt = s\int_0^\infty \delta(t-a)e^{-st\,dt} \\ &= \begin{cases} se^{-as} & a \geq 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

para $s > 0$.

De idéntica manera se pueden definir derivadas de orden superior,

$$\delta_a^{n)}[\phi] = (-1)^n \int_{-\infty}^\infty \delta(t-a)\phi^{n)}(t)\,dt = (-1)^n\phi^{n)}(a),$$

por lo que la derivada n-ésima de la delta proporciona el valor de la derivada n-ésima de la función sobre la que actúa en a, salvo un signo en los órdenes impares,

$$\int_{-\infty}^\infty \delta_a^{n)}(t)\phi(t)\,dt = (-1)^n\phi^{n)}(a).$$

En particular,

$$\int_{-\infty}^\infty \delta_a^{n)}(t)\,dt = 0.$$

Su transformada de Laplace es, denotando $h(t) = \delta_a^{n)}(t)$,

$$\begin{aligned} H(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\delta_a^{n)}(t)\,dt = (-1)^n\int_0^\infty \delta(t-a)\frac{d^n e^{-st}}{dt^n}\,dt \\ &= s^n\int_0^\infty \delta(t-a)e^{-st\,dt} = \begin{cases} s^n e^{-as} & a \geq 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Por tanto, la transformada de la derivada $\delta^{n)}(t)$ es s^n.

3.6. Resolución de ecuaciones diferenciales

Consideremos un sistema físico, un circuito, por ejemplo, modelizado por una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$a_0x^{n)} + a_1x^{n-1)} + \cdots + a_nx = f(t),$$

que proporciona la respuesta $x(t)$ del sistema a una fuerza $f(t)$.

Supongamos que queremos hallar la solución de la ecuación con condiciones iniciales triviales, $x(0) = x'(0) = \cdots = x^{n-1)}(0) = 0$. Es decir, inicialmente el sistema está en reposo.

Si aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación, el primer miembro se convierte en una expresión lineal para $X(s)$,

$$P(s)X(s) = F(s) \Rightarrow X(s) = \frac{F(s)}{P(s)}, \quad P(s) = (a_0s^n + \cdots + a_n),$$

y, por tanto, permite resolver la ecuación directamente. El problema residirá en invertir la transformada de Laplace.

Observamos, pues, que, a nivel de transformadas, la respuesta del sistema es el producto de la fuerza por una función $X_I(s) = 1/P(s)$, que se denomima **función de transferencia**.

Su interpretación es sencilla: consideremos como fuerza f un impulso en el instante $t = 0$, $f(t) = \delta(t)$. En este caso $F(s) = 1$ y la transformada de la respuesta al impulso, $x_I(t)$, es precisamente la función de transferencia.

Es claro que el comportamiento del sistema es conocido con sólo conocer la función de transferencia. Si en lugar de un impulso actúa una fuerza f, la transformada de la respuesta $x(t)$ a dicha fuerza viene dada por $X(s) = X_I(s)F(s)$, con lo cual,

$$x(t) = \big(x_I * f\big)(t),$$

es decir, la respuesta a cualquier fuerza f se obtiene como convolución de esta por la respuesta al impulso.

Obsérvese que, conocida la función de transferencia, es irrelevante conocer el sistema, pues ella nos basta para conocer la respuesta a cualquier fuerza. De ahí su importancia en problemas lineales.

Ejemplo 3.6.1 *Resolver la ecuación* $x'' + 3x' + 2x = te^{-t}$ *para* $t > 0$ *con condiciones iniciales* $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

Transformamos la ecuación,

$$s^2X(s) - x_0' - sx_0 + 3sX(s) - 3x_0 + 2X(s) = s^2X(s) + 3sX(s) + 2X(s) = \frac{1}{(s+1)^2},$$

y podemos despejar la transformada de la solución,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{(s+1)^3(s+2)} \\ &= -\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3}, \end{aligned}$$

la cual, una vez descompuesta en fracciones simples, se puede invertir, identificando los términos,

$$x(t) = -e^{-2t} + e^{-t} - te^{-t} + \frac{t^2}{2}e^{-t}.$$

La ventaja de esta manera de proceder es, no sólo que se ahorran las integraciones, sino que permite obtener la solución del problema de valores iniciales directamente, sin necesidad de pasar por la solución general. Lo cual no quita para que se pueda obtener la solución general, si dejamos libres los parámetros $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_0'$,

$$s^2X(s) - x_0' - sx_0 + 3sX(s) - 3x_0 + 2X(s) = \frac{1}{(s+1)^2},$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{x_0' + sx_0 + 3x_0}{(s+2)(s+1)} + \frac{1}{(s+1)^3(s+2)} \\ &= -\frac{1 + x_0 + x_0'}{s+2} + \frac{1 + 2x_0 + x_0'}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= -(1+x_0+x_0')e^{-2t} + (1+2x_0+x_0')e^{-t} - te^{-t} + \frac{t^2}{2}e^{-2t} \\ &= k_1 e^{-2t} + \left(\frac{t^2}{2} - t + k_2\right)e^{-t}. \end{aligned}$$

Del mismo modo, se puede utilizar este método para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Ejemplo 3.6.2 *Resolver el sistema de ecuaciones $x' = 3x+2y+9t$, $y' = 3y+9$ para $t > 0$ con condiciones iniciales $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.*

Transformamos ambas ecuaciones,

$$sX(s) - x_0 = 3X(s) + 2Y(s) + \frac{9}{s^2}, \quad sY(s) - y_0 = 3Y(s) + \frac{9}{s},$$

de donde podemos despejar las transformadas de la solución, con $x_0 = 0$, $y_0 = 0$,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{18}{s(s-3)^2} + \frac{9}{s^2(s-3)} = \frac{1}{s} - \frac{3}{s^2} - \frac{1}{s-3} + \frac{6}{(s-3)^2} \\ Y(s) &= \frac{9}{s(s-3)} = -\frac{3}{s} + \frac{3}{s-3}, \end{aligned}$$

e identificando términos, podemos invertir las transformadas y obtener la solución pedida,

$$x(t) = 1 - 3t - e^{3t} + 6te^{3t}, \quad y(t) = -3 + 3e^{3t}.$$

Sin embargo, hemos de ser conscientes de que este método no aporta soluciones nuevas. Es decir, los problemas que se pueden resolver por transformada de Laplace son esencialmente los mismos que se pueden resolver por otros métodos.

La principal ventaja de la transformada de Laplace es que permite abordar más fácilmente problemas en los que el término inhomogéneo está definido a trozos o es singular.

Ejemplo 3.6.3 *Resolver la ecuación $x'' + 2x' + 2x = f(t)$ con $f(t) = t$ para $t \in [0, \pi]$, $f(t) = 2\pi - t$ para $t \in [\pi, 2\pi]$, $f(t) = 0$ para $t \geq 2\pi$, con condiciones iniciales $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.*

El término inhomogéneo se puede reescribir de manera cumulativa como

$$f(t) = t - 2(t-\pi)\theta(t-\pi) + (t-2\pi)\theta(t-2\pi),$$

y su transformada de Laplace es, teniendo en cuenta que para $g(t) = f(t - a)\theta(t-a)$, $G(s) = e^{-as}F(s)$,

$$F(s) = \frac{1 - 2e^{-\pi s} + e^{-2\pi s}}{s^2}.$$

Por tanto, la ecuación se transforma en

$$X(s) = \frac{1 - 2e^{-\pi s} + e^{-2\pi s}}{s^2(s^2+2s+2)} = \frac{1 - 2e^{-\pi s} + e^{-2\pi s}}{2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right).$$

El segundo factor se identifica directamente,

$$G(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1} \Rightarrow g(t) = t - 1 + e^{-t}\cos t,$$

con lo cual podemos invertir la transformada de la solución,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}(t-1+e^{-t}\cos t) - \Big((t-\pi) - 1 + e^{-(t-\pi)}\cos(t-\pi)\Big)\,\theta(t-\pi) \\ &+ \Big((t-2\pi) - 1 + e^{-(t-2\pi)}\cos(t-2\pi)\Big)\,\frac{\theta(t-2\pi)}{2}, \end{aligned}$$

que desarrollada adopta la expresión

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{t-1+e^{-t}\cos t}{2} & t \in [0,\pi] \\ \dfrac{1-t}{2} + \pi + e^{-t}\cos t\left(e^{\pi} + \dfrac{1}{2}\right) & t \in [\pi, 2\pi] \\ \left(1 + 2e^{\pi} + e^{2\pi}\right)\dfrac{e^{-t}\cos t}{2} & t \in [2\pi, \infty) \end{cases} .$$

3.7. Aplicaciones de sistemas de ecuaciones lineales

Acabamos la exposición de los sistemas de ecuaciones lineales con unos cuantos ejemplos de aplicación directa a problemas físicos.

Ejemplo 3.7.1 *Circuitos LRC*

En un circuito con un generador de fuerza electromotriz E, continua o alterna, como el de la figura, circula una corriente de intensidad $i(t)$. Las diferencias de potencial, aparte de las debidas al propio generador, son debidas a las resistencias R, $V_R = iR$, a los condensadores de capacidad C, que almacenan una carga Q, $V_C = Q/C$, y a las bobinas de coeficiente de autoinducción L, $V_L = Li'$.

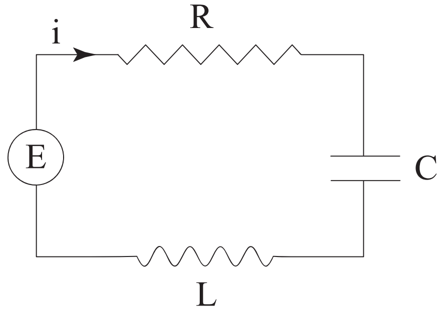

Figura 3.5: Circuito LRC

Los circuitos se rigen por las dos reglas de Kirchoff, de modo que en cada nudo de la malla del circuito la suma de intensidades sea nula (la suma de intensidades salientes debe ser igual a la suma de intensidades entrantes), y la suma de diferencias de potencial debe ser nula, teniendo en cuenta que los términos anteriores se oponen a la circulación de corriente y, por tanto, deben contarse con signo negativo.

Así pues, el circuito de la figura está regido por una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, recordando que la intensidad es $i(t) = Q'(t)$,

$$LQ'' + RQ' + \frac{Q}{C} = E(t),$$

o bien, en función de la intensidad de corriente,

$$Li'' + Ri' + \frac{i}{C} = E'(t).$$

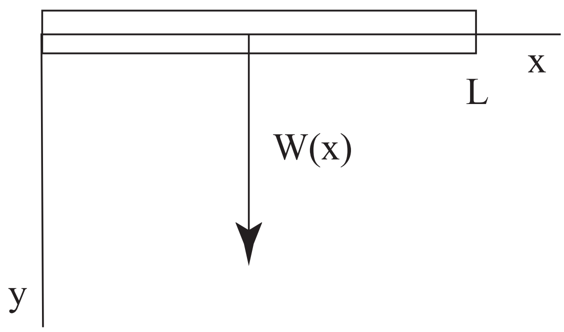

Figura 3.6: Viga

Ejemplo 3.7.2 *Flexión de una viga.*

Consideremos una viga horizontal de longitud L sometida a una carga vertical $W(x)$ por unidad de longitud. La viga sufre una flexión en la dirección vertical $y(x)$, regida por la ecuación diferencial

$$y^{IV)} = \frac{W(x)}{EI}, \quad x \in (0, L),$$

donde E es el módulo de Young de la viga e I es el momento de inercia de una sección recta de la viga respecto a su eje.

Las condiciones de contorno de la ecuación dependerán de la disposición de la viga:

Una viga empotrada por uno de sus extremos, 0, L, tendrá ese extremo a fijo, $y(a) = 0 = y'(a)$.

Una viga articulada por un extremo a, tiene $y(a) = 0 = y''(a)$.

Una viga con un extremo a en voladizo, tiene $y''(a) = 0 = y'''(a)$.

Ejemplo 3.7.3 *Sistema mecánico de resortes acoplados.*

La separación x de una masa m unida a un muelle de constante de rigidez k respecto a su posición de equilibrio está regida por la ecuación del oscilador armónico, $mx'' = -kx$.

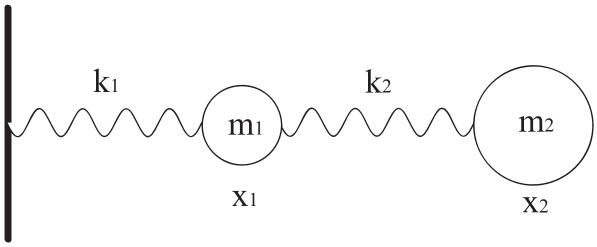

Figura 3.7: Sistema de dos resortes acoplados

Por tanto, la evolución del sistema de la figura, formado por dos muelles de longitudes l_1, l_2, está determinada por el sistema,

$$m_1 x_1'' = -k_1(x_1 - l_1) + k_2(x_2 - x_1 - l_2), \quad m_2 x_2'' = -k_2(x_2 - x_1 - l_2).$$

3.8. Tabla de transformadas de Laplace

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(s)}$	$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(s)}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	$f^{n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^i f^{n-1-i)}(0)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, $s > a$	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
t^n, $n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{n)}(s)$
t^α, $\alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$	$f(t)$ de periodo T	$\frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$f(t)/t$	$\int_s^\infty F(u)\, du$	$\int_0^t f(t)\, dt$	$\frac{F(s)}{s}$
$\theta_a(t)$, $a > 0$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$f(t-a)\theta(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
$\delta_a(t)$, $a \geq 0$	e^{-as}	$\big(f * g\big)(t)$	$F(s)G(s)$

3.9. Transformada de Fourier

Tal como enunciábamos al principio del tema, definimos la **transformada de Fourier** de una función $f(t)$ como una función F de una variable ω,

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, dt. \tag{3.24}$$

Usamos la variable t, en cuyo caso ω tiene la interpretación de una frecuencia. Pero también se suele hacer transformada de Fourier respecto a una variable temporal x. Si x es una variable espacial, la nueva variable k tiene la interpretación de un número de ondas.

Mantenemos la notación de mayúscula para las funciones transformadas, aun a riesgo de confundirlas con la transformada de Laplace. El contexto nos indicará de qué transformada estamos hablando y ganaremos en simplicidad en la notación.

Existen otras notaciones para la transformada de Fourier. En algunas no aparece el factor $\sqrt{2\pi}$, en otras aparece 2π en su lugar. O en lugar de ω aparece $2\pi\omega$. Son todas ellas equivalentes. Si optamos por esta, es porque la identidad de la energía de Plancherel se simplifica en esta notación.

A su vez, definimos la transformada inversa de Fourier de una función $F(\omega)$ como

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega)\, d\omega. \tag{3.25}$$

Como su nombre indica, si transformamos una función f con buenas propiedades, al realizar la transformada inversa de F recuperamos la función f. Aunque si la función f presenta discontinuidades en algunos puntos, el resultado de la transformada inversa puede no ser el correcto en dichos puntos.

Para que la transformada de Fourier exista, tan sólo es necesario que f sea absolutamente integrable en la recta real, es decir, que $|f(t)|$ sea integrable en la recta real,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, dt \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i\omega t} f(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty. \ \square$$

Para ello es necesario que la función $f(t)$ tienda a cero en $\pm\infty$, aunque no es suficiente.

No obstante, en general basta con que $f(t)$ sea una función de cuadrado integrable,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt < \infty,$$

para definir las transformadas de Fourier como valores de Cauchy de las integrales impropias,

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R}, e^{-i\omega t} f(t)\, dt, \\ f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{i\omega t} F(\omega)\, d\omega. \end{aligned} \tag{3.26}$$

De este modo garantizamos que tiene sentido la **identidad de la energía o identidad de Plancherel**,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega, \tag{3.27}$$

propiedad de la transformada de Fourier que no demostraremos.

Nótese que la transformada inversa de Fourier refleja precisamente la interpretación heurística que hemos empleado,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega)\, d\omega \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega\in\mathbb{R}} F(\omega) e^{i\omega t},$$

es decir, hemos descompuesto f en una "suma" de ondas planas de frecuencia angular ω y amplitud $F(\omega)$. La función F simplemente asigna a cada frecuencia del espectro su amplitud correspondiente.

La identidad de Plancherel indica que la "energía" de la señal f, dada por la integral de $|f(t)|^2$, se puede calcular bien como una integral en todo el espacio, bien como "suma" de las energías de las ondas planas constituyentes, $|F(\omega)|^2$, siendo dicha energía igual al cuadrado de su amplitud.

Aplicando reitaradamente la transformada de Fourier a una función, acabamos recuperando la función de partida:

Sea $F(\omega)$, la transformada de una función $f(t)$. Si transformamos a su vez la función F,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\omega}F(\omega)\,d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(-t)}F(\omega)\,d\omega = f(-t) =: \tilde{f}(t),$$

definiendo $\tilde{f}$ como la función simétrica de f respecto al eje de ordenadas.

Por tanto, denotando por T la transformada de Fourier, de modo que $F = T(f)$, obtenemos que $\tilde{f} = T^2(f)$. Es decir, transformando dos veces una función obtenemos la función reflejada.

Y, a su vez, transformando cuatro veces, obtenemos la función original, $f = T^4(f)$,

$$f = \tilde{\tilde{f}} = T^2\left(T^2(f)\right) = T^4(f). \ \square$$

Y como $T^3\left(T(f)\right) = f$, resulta que $T^3 = T^{-1}$ es la transformada inversa de Fourier. Resumiendo,

$$F = T(f), \quad \tilde{f} = T^2(f), \quad f = T^3(F), \quad f = T^4(f). \tag{3.28}$$

Al igual que sucedía con la transformada de Laplace, la transformada de Fourier tiene un buen comportamiento respecto al producto por exponenciales, imaginarias en este caso. Las exponenciales se convierten en traslaciones al transformar:

Sea $g(t) = e^{iat}f(t)$. Entonces,

$$G(\omega) = F(\omega - a). \tag{3.29}$$

Calculamos las transformadas de Fourier directamente,

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-a)t}f(t)\,dt = F(\omega - a). \ \square$$

Este resultado tiene su recíproco, ya que las traslaciones se convierten en exponenciales imaginarias al transformar:

Sea $h(t) = f(t-a)$. Entonces,

$$H(\omega) = e^{-ia\omega}F(\omega). \tag{3.30}$$

Se comprueba fácilmente,

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}f(t-a)\,dt = \frac{e^{-ia\omega}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega y}f(y)\,dy = e^{-ia\omega}F(\omega),$$

haciendo el cambio de variable $y = t - a$. $\square$

Este resultado es interesante, ya que muestra que una traslación se convierte en un desfase al transformar, y a la inversa. El siguiente resultado es también curioso, ya que permite algebrizar la derivada al convertirse en una multiplicación por la variable al transformar. Esto será de importancia para resolver ecuaciones diferenciales, convirtiéndolas en ecuaciones algebraicas, al igual que sucedía con la transformada de Laplace.

Calculemos la transformada de Fourier de $g = f'$ integrando por partes y teniendo en cuenta que la función f debe tender a cero en el infinito para poder ser integrable en el intervalo infinito,

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f'(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[e^{-i\omega t}f(t)]_{-\infty}^{\infty} \\ &+ \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,dt = i\omega\, F(\omega). \ \square \end{aligned}$$

Por tanto, iterando el resultado, obtenemos la transformada de cualquier derivada, suponiendo que exista,

$$g(t) = f'(t) \Rightarrow G(\omega) = i\omega F(\omega), \quad h(t) = f^{n)}(t) \Rightarrow H(\omega) = (i\omega)^n F(\omega). \quad (3.31)$$

Del mismo modo, si $g(t) = tf(t)$, derivando con respecto a ω bajo la integral,

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} tf(t)\,dt = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\omega}\left(e^{-i\omega t}f(t)\right)\,dt = iF'(\omega). \ \square$$

De este modo obtenemos el resultado simétrico del anterior,

$$g(t) = tf(t) \Rightarrow G(\omega) = iF'(\omega), \quad h(t) = t^n f(t) \Rightarrow H(\omega) = i^n F^{n)}(\omega). \quad (3.32)$$

Obsérvese que estos resultados, equivalentes de los obtenidos para la transformada de Laplace, son enteramente simétricos, al no aparecer los términos de valores iniciales, $f(0)$, $f'(0)$... Esto es lógico, ya que integramos en un intervalo infinito, no semiinfinito.

La aplicación principal de esta propiedad de conversión de derivadas en multiplicaciones la tenemos en la resolución de problemas de ecuaciones en derivadas parciales:

Ejemplo 3.9.1 *Resolución de la ecuación de la cuerda vibrante infinita,* $u_{tt} - u_{xx} = 0$.

Supongamos que la función $u(x,t)$ admite transformada de Fourier,

$$U(\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u(x,t)\,dx.$$

La ecuación para la función U es ordinaria y sencilla de resolver,

$$U_{tt} + \omega^2 U = 0 \Rightarrow U(\omega,t) = A(\omega)e^{i\omega t} + B(\omega)e^{-i\omega t},$$

con lo cual, invirtiendo la transformada, la solución de la ecuación de la cuerda vibrante se escribe como,

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{A(\omega)e^{i\omega t + i\omega x} + B(\omega)e^{-i\omega t + i\omega x}\right\}\,d\omega,$$

es decir, hemos descompuesto la onda de la cuerda vibrante como suma de ondas de frecuencia ω que recorren la cuerda en ambos sentidos con amplitudes $A(\omega)$, $B(\omega)$, que deberán determinarse por las condiciones iniciales del problema.

Usando las propiedades de la traslación y la exponencial,

$$u(x,t) = a(x+t) + b(x-t),$$

es decir, la señal u se descompone en una señal que avanza hacia la izquierda y otra que avanza hacia la derecha.

Supongamos como valores iniciales, $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$. Entonces,

$$f = a + b, \quad g = a' - b' \Rightarrow a' = \frac{f' + g}{2}, \quad b' = \frac{f' - g}{2} \Rightarrow$$

$$a = \frac{f + \int g}{2} + k, \qquad b = \frac{f - \int g}{2} - k,$$

con lo cual la solución del problema de valores iniciales es,

$$u(x,t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\, dy.$$

Ejemplo 3.9.2 *Resolución de la ecuación del calor en una varilla infinita,* $u_t - u_{xx} = 0$.

Al igual que en el ejemplo anterior, suponiendo que u admite transformada de Fourier, obtenemos como ecuación para U, fácil de resolver,

$$U_t + k^2 U = 0 \Rightarrow U(k,t) = F(k)e^{-k^2 t},$$

cuya solución, después de invertir la transformación de Fourier, proporciona,

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-k^2 t + ikx}\, dk,$$

que depende de una función arbitraria F, que se determinará a partir de los datos iniciales, $u(x,0) = f(x)$,

$$f(x) = u(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx}\, dk,$$

que sustituida en la expresión de u, nos da la solución del problema de valores iniciales para la varilla infinita, completando cuadrados, es decir, haciendo el cambio de variable $y = k\sqrt{t} - i(x - x')/2\sqrt{t}$,

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x') e^{-k^2 t + ik(x-x')} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x') e^{-y^2 - (x-x')^2/4t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x') e^{-(x-x')^2/4t}.
\end{aligned}$$

El teorema de los residuos permite calcular de manera sencilla numerosas transformadas de Fourier:

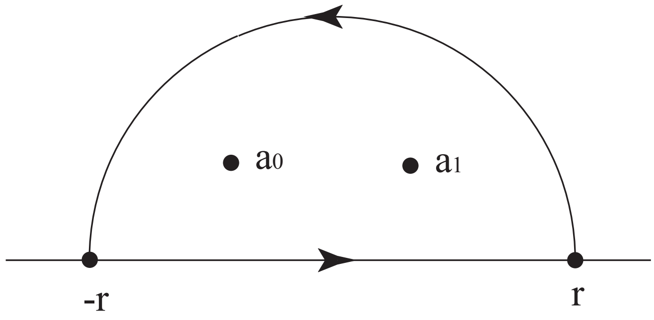

Figura 3.8: Recinto de integración para $\omega > 0$

Proposición 3.9.1 *Sea f una función meromorfa (analítica salvo en un número finito de puntos del plano complejo) con singularidades sólo en puntos fuera del eje real $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{C}$ y que verifica $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Entonces,*

$$F(\omega) = \begin{cases} -\sqrt{2\pi} i \displaystyle\sum_{\Im a_i < 0} \mathrm{Res}(f(z)e^{-i\omega z}, a_i) & si\ \omega > 0 \\ \sqrt{2\pi} i \displaystyle\sum_{\Im a_i > 0} \mathrm{Res}(f(z)e^{-i\omega z}, a_i) & si\ \omega < 0 \end{cases}$$

Es decir, para evaluar la integral hay que calcular los residuos en los polos del semiplano inferior (superior) si $\omega > 0$ (si $\omega < 0$).

Ejemplo 3.9.3 *Transformada de Fourier de $f(t) = (t + ia)^{-1}$, $a \geq 0$.*

La función f es meromorfa y tiene un único polo complejo en $z = -ia$, en el semiplano inferior. Luego, al no haber polos en el semiplano superior, $F(\omega) = 0$ para $\omega < 0$. Para $\omega > 0$,

$$F(\omega) = -\sqrt{2\pi} i \,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{-i\omega z}}{t + ia}, -ia\right) = -\sqrt{2\pi} i e^{-\omega a}. \ \Box$$

La transformada de Fourier se puede aplicar igualmente a distribuciones:

Ejemplo 3.9.4 *Transformada de Fourier de la delta de Dirac.*

$$\Delta_a(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \delta_a(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \delta(t - a)\, dt = \frac{e^{-i\omega a}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (3.33)$$

Esto tiene como consecuencia inesperada, realizando la transformada inversa, que

$$\delta(t - a) = \delta_a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{e^{-i\omega a}}{\sqrt{2\pi}}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-a)}\, d\omega, \quad (3.34)$$

interesante, y útil, representación integral de la delta de Dirac: la delta de Dirac es una suma de ondas planas de amplitud unitaria, $|e^{-i\omega a}| = 1$.

Esta representación proporciona una demostración ingeniosa de la identidad de la energía,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\overline{F(\omega)}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{i\omega y}\overline{f(y)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t) \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \overline{f(y)} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega(y-t)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t) \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \overline{f(y)}\delta(y-t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t)}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt. \ \square
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.9.5 *Transformada de Laplace de la exponencial imaginaria.*

Sabemos que la transformada de $g(t) = e^{iat} f(t)$ es $G(t) = F(\omega - a)$. Por tanto, si tomamos $f(t) = 1$, con transformada $F(\omega) = \sqrt{2\pi}\delta(\omega)$, obtenemos que la exponencial imaginaria $g(t) = e^{iat}$ tiene por transformada

$$G(\omega) = \sqrt{2\pi}\delta(\omega - a) = \sqrt{2\pi}\delta_a(\omega). \ \square$$

Este ejemplo muestra un resultado obvio: como una onda plana e^{iat} sólo tiene una frecuencia a y la transformada simplemente asigna amplitudes a las frecuencias del espectro de la señal, tendrá esta que estar concentrada en $\omega = a$. Es decir, tiene que ser una delta de Dirac centrada en dicha frecuencia.

3.10. Convolución y correlación

También podemos relacionar la convolución de funciones con la transformada de Fourier, como hicimos con la transformada de Laplace. Sólo que, al estar manejando funciones definidas en toda la recta real, usaremos la definición 3.12 de convolución,

$$\big(f * g\big)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)\, du.$$

La integral de convolución está bien definida, ya que, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
|(f*g)(t)| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du\right| \le \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^2 du}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |g(t-u)|^2 du} \\
&= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^2 du}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|^2 dy},
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $u = t - y$ en la segunda integral. Luego $(f * g)(t)$ está acotada superiormente si f, g son funciones de cuadrado integrable. $\square$

Al igual que sucedía con la transformada de Laplace, la transformada de Fourier permite factorizar el producto de convolución de dos funciones:

$$h(t) = (f * g)(t) \Rightarrow H(\omega) = \sqrt{2\pi}F(\omega)G(\omega). \tag{3.35}$$

Haciendo el cambio de variable $t = y + u$,

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\,(f*g)\,(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\,dt \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)\,du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega y} g(y)\,dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} f(u)\,du = 2\pi F(\omega)G(\omega).\ \square\end{aligned}$$

Este resultado tiene su recíproco,

$$j(t) = f(t)g(t) \Rightarrow J(\omega) = \frac{(F*G)\,(\omega)}{\sqrt{2\pi}}. \tag{3.36}$$

Se puede demostrar haciendo la transformada inversa del anterior resultado, pero podemos proceder también de esta manera, a partir del segundo miembro de la identidad,

$$\begin{aligned}(F*G)\,(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(u)G(\omega-u)\,du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-iut} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-i(\omega-u)y} g(y) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t) \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-i\omega y} g(y) \int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{iu(y-t)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t) \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-i\omega y} g(y)\delta(y-t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)g(t)\,dt = \sqrt{2\pi}J(\omega),\end{aligned}$$

usando la representación integral de la delta de Dirac. $\square$

Emparentada directamente con la convolución está la operación de correlación:

Definimos la **correlación** de dos funciones f, g como

$$(f**g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u)}g(u+t)\,du. \tag{3.37}$$

Si $f = g$, denominaremos a $f**f$ la **autocorrelación** de f.

La interpretación de la integral de correlación es directa. Estamos calculando la integral del producto de dos funciones, una de ellas trasladada $-t$. El resultado será mayor cuanto mayor sea el área de la gráfica de la función producto, es decir, cuanto más solapen las gráficas, de ahí el nombre de correlación. Así pues, al variar t vamos desplazando la gráfica de una función sobre la otra fija buscando coincidencias entre las dos funciones.

Esta operación no es, en general, conmutativa. Se podría haber definido también la correlación, haciendo el cambio de variable $u = u' - t$, como

$$\begin{aligned}(f**g)\,(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u)}g(u+t)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u'-t)}g(u')\,du' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\tilde{f}(t-u')}g(u')\,du' = \left(\bar{\tilde{f}} * g\right)(t),\ \square\end{aligned}$$

lo cual supone que la autocorrelación de funciones reales es par (segunda igualdad), $(f**f)(t) = (f**f)(-t)$, y que $f**g = \bar{\bar{f}} * g$, expresión que relaciona convolución y correlación.

Las relación entre transformada de Fourier y correlación,

$$h(t) = (f**g)(t) \Rightarrow H(\omega) = \sqrt{2\pi}G(\omega)\overline{F(\omega)}, \tag{3.38}$$

se deduce de manera inmediata, bien usando las propiedades de la convolución, bien por integración, haciendo el cambio de variable $t = y - u$,

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}(f**g)(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} du\, \overline{f(u)}g(u+t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-i\omega y}g(y) \int_{-\infty}^{\infty} du\, \overline{e^{-i\omega u}f(u)} = 2\pi G(\omega)\overline{F(\omega)}. \ \square \end{aligned}$$

Como curiosidad, nótese que $T(f**f) = \sqrt{2\pi}\,\bar{F}F = \sqrt{2\pi}\,|F|^2$, es decir, la transformada de Fourier de la autocorrelación proporciona el módulo al cuadrado de la transformada de la función. Por tanto, la autocorrelación pierde la información referente a la fase de la función compleja, al contrario de lo que sucede con la autoconvolución, que proporciona el cuadrado de la función y, por tanto, no pierde la información de la fase, ya que se recupera la función completa tomando la raíz cuadrada.

En particular, la acotación de la convolución conduce, para la autocorrelación, a,

$$|f**f(t)| \le \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u)}f(u)\,du = (f**f)(0), \ \square \tag{3.39}$$

lo cual indica que la autocorrelación está acotada superiormente por su valor en $t = 0$.

A veces se define dividiéndola por $\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^2\,du = (f**f)(0)$, de modo que la autocorrelación tome valores con módulo inferior o igual a la unidad.

3.11. Tabla de transformadas de Fourier

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F}(\omega)$	$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F}(\omega)$
$f'(t)$	$i\omega F(\omega)$	$f^{n)}(t)$	$(i\omega)^n F(\omega)$
$t^n f(t)$	$i^n F^{n)}(\omega)$	$F(t)$	$f(-\omega)$
$f(t-a)$	$e^{-ia\omega}F(\omega)$	$e^{iat}f(t)$	$F(\omega - a)$
$(f*g)(t)$	$\sqrt{2\pi}F(\omega)G(\omega)$	$f(t)g(t)$	$(F*G)(\omega)/\sqrt{2\pi}$
$\delta_a(t)$	$e^{-ia\omega}/\sqrt{2\pi}$	e^{iat}	$\sqrt{2\pi}\delta(\omega - a)$