Problemas de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales

Ecuaciones de primer orden

1. Demostrar que la solución de la ecuación cuasilineal $u_y + a(u)u_x = 0$, con la condición inicial $u(x,0) = h(x)$, está dada implícitamente por la expresión $u = h(x - a(u)y)$.

2. Hallar la solución de la ecuación $u_x + y^2 u_y = 2xu$ que satisface $u(x,0) = h(x)$. Y la solución que satisface $u(x,1) = h(x)$. Particularizar para el caso en el que $u(x,1) = x$.

3. Hallar la solución de la ecuación $2xu_y - u_x = 4xy$ que satisface $u(0,y) = h(y)$. Particularizar para el caso en el que $u(0,y) = y^2$. Hallar la solución que satisface $u(x,-x^2) = h(x)$.

4. Hallar la solución de la ecuación $u_x - u_y + \frac{y-x}{xy}u = 0$ que satisface $u(x,1) = x$. Hallar la solución general usando como dato inicial $u(x,0) = h(x)$.

5. Hallar la solución general de $xu_x + yu_y = 1$. Resolver los problemas de valores iniciales $u(x,0) = x$, $u(x,1) = x$. Hallar la solución general usando como dato inicial $u(x,1) = h(x)$.

6. Hallar la solución de la ecuación $2yuu_x + u_y = 0$ que satisface $u(x,0) = h(x)$. Particularizar para el caso en el que $u(x,0) = x$. Hallar la solución que satisface $u(y^2,y) = 1$.

7. Hallar la solución de la ecuación $xuu_x - u_y = 0$ que satisface $u(x,0) = h(x)$. Particularizar para el caso en el que $u(x,0) = \ln x$. Hallar la solución que satisface $u(0,y) = H(y)$.

8. Hallar la solución válida para $t > 0$ de la ecuación $u_t + uu_x + \lambda u = 0$, que verifica $u(x,0) = x$, siendo $\lambda > 0$.

9. Hallar la solución general de la ecuación de Euler $xu_x + yu_y = nu$, siendo $n \neq 0$, usando como dato inicial $u(x,1) = h(x)$. Comprobar que $U(x,y) = x^2 + y^2$ satisface la ecuación. Hallar la solución que verifica $u(x,1) = x$, con $n = 3$.

10. Sea la ecuación $4xu_x + 2yu_y = u$. Estudiar si el problema $u(x,1) = h(x)$ tiene solución única y resolverlo. Particularizar para el caso en el que $u(x,1) = x$. Hallar la solución de la ecuación que satisface $u(y^2,y) = h(y)$.

11. Hallar la solución general de la ecuación de las superficies de revolución, $xz_y - yz_x = 0$, usando como dato inicial $u(x,1) = h(x)$. Hallar la superficie de revolución que verifica $z(x,1) = x$.

12. Hallar la solución general de la ecuación $a(u)u_x - b(u)u_y = 0$, usando como dato inicial $u(x,0) = h(x)$.

13. Hallar la solución general de la ecuación $xy(z_x - z_y) = (x-y)z$, usando como dato inicial $u(x,0) = h(x)$. Hallar la ecuación de la superficie que contiene a la hipérbola $x^2 = y^2 + z^2$, $z = 1$ y que la satisface.