# Problemas de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales

## Ecuaciones de segundo orden: ecuación de ondas

1. Expresar la ecuación $u_{xx} + u_{yy}/x^2 + u_x/x = 0$ en forma normal. Tomar $x > 0$.

2. Expresar la ecuación de Tricomi, $u_{yy} - yu_{xx} = 0$, en forma normal.

3. Expresar en forma normal la ecuación $u_{xx} - u_{xy} = 0$ y obtener su solución general.

4. Reducir a forma normal y hallar la solución general de $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$.

5. Hallar la solución de la ecuación $u_{tt} - u_{xx} = 0$, $t > 0$, con datos iniciales $u(x, 0) = 0$ para $x < 0$, $u(x, 0) = \sin \pi x$ para $x \in [0, 1]$, y $u(x, 0) = 0$ para $x > 1$, mientras que $u_t(x, 0) = 0$, para todo $x$.

6. Sea $u(x, t)$ una función que verifica la ecuación $u_{tt} - u_{xx} = 0$, $t > 0$, $0 < x < L$, con condiciones iniciales $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 1$ y condiciones de contorno de extremos fijos, $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$. Calcular $u(x, 2L/3)$.

7. Considérese $u(x, t)$, que satisface $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ en $t > 0$ y $-a < x < a$. Sea $u(x, 0) = 0$ y $u_t(x, 0) = \frac{c}{a} \sin \frac{2\pi x}{a}$, ambas en $|x| < a$, y $u(-a, t) = u(a, t) = 0$. Dar la solución $u(x, t)$ para $|x| < a$ y $0 < t < 2a/c$. En particular, dar $u(x, 2a/c)$.

8. Sea $u = u(x, t)$ una función que satisface la ecuación de ondas de modo que $u(x, 0) = 0$ para $x \leq 0$, $u(x, 0) = 1$ para $x > 0$ y $u_t(x, 0) = 1$ para $x \leq 0$ y $u_t(x, 0) = 0$ para $x > 0$. Hallar dicha función $u(x, t)$.

9. La función $u(x, t)$ satisface la ecuación de ondas para $x \in (0, L)$, $t > 0$, con condiciones iniciales $u(x, 0) = 0 = u_t(x, 0)$ y condiciones de contorno $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = u_0 \sin \omega t$, siendo $u_0$, $\omega$ constantes. Hallar $u$ en el rectángulo $(0, L) \times (0, L/c)$.

10. Sea $u = u(x, t)$ una función que satisface la ecuación de ondas para todo $x$ y $t > 0$, y tal que $u(x, 0) = \sin x$ en $x \geq 0$, $u(x, 0) = 0$ en $x < 0$, $u_t(x, 0) = -\cos x$ en $x \geq 0$, y $u_t(x, 0) = 0$ en $x < 0$. Hallar $u(x, t)$ en el semiplano $t > 0$. Tomar $c = 1$.

11. Una función $u(x, t)$ satisface la ecuación de ondas para $x \in (-a, a)$, $t > 0$, con datos iniciales $u(x, 0) = u_0 \sin(\pi x/a)$ y velocidad inicial nula. Las condiciones de contorno son $u(-a, 0) = 0$, $u(a, t) = A \sin \omega t$, siendo $A$, $u_0$, $\omega$ constantes no nulas. Hallar $u(x, 2a/c)$.

12. Hallar la solución del problema mixto de la ecuación de ondas para $t > 0$, $x \in (0, L)$ con datos iniciales $u(x, 0) = L/2 - |L/2 - x|$, $u_t(x, 0) = 0$ y extremos fijos. Obtener la solución usando series de Fourier. Calcular la energía de la onda.

13. Resolver la ecuación $u_{tt} = u_{xx}$, $t > 0$, $x \in (0, \pi)$, con condiciones iniciales $u(x, 0) = 1$, $u_t(x, 0) = 0$ y extremos fijos. Resolver el problema por series de Fourier y por la ley del paralelogramo.

14. Hallar en forma de serie la solución del problema mixto $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ con condiciones iniciales $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$ y condiciones de contorno $u_x(0,t) = 0 = u_x(L,t)$, $t > 0$, $x \in (0,L)$. Aplicarlo al caso en el que $f(x) = \cos^2(\pi x/L)$, $g(x) = \sin^2(\pi x/L)$. ¿Se puede resolver por la ley del paralelogramo?

15. Resolver la ecuación $u_{tt} - c^2 u_{xx} = x^2$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ con condiciones iniciales $u(x,0) = x$, $u_t = 0$.

16. Consideremos una cuerda circular de radio $R$. Expresar la ecuación de la cuerda vibrante usando como variable el ángulo polar $\phi$, es decir para la función $u(\phi,t)$. Hallar en forma de serie la solución del problema de condiciones iniciales $u(\phi,0) = f(\phi)$, $u_t(\phi,0) = g(\phi)$, $t > 0$, $\phi \in (0,2\pi)$. Aplicarlo al caso en el que las condiciones iniciales son $u(\phi,0) = \sin\phi\cos\phi$, $u_t(\phi,0) = \cos^2\phi$, con $R = 1 = c$.