Problemas de Ecuaciones en Derivadas Parciales

Problemas de contorno

1. Obtener los autovalores y autofunciones del problema $x'' + \lambda x = 0$, $x(0) = x(1)$, $x'(0) = -x'(1)$.

2. Obtener los autovalores y autofunciones del problema $x'' + \lambda x = 0$, $x(0) = 0 = x(L)$.

3. Obtener los autovalores y autofunciones del problema $x''+\lambda x = 0$, $x(-L/2) = 0 = x(L/2)$.

4. Obtener los autovalores y autofunciones del problema $x''+\lambda x = 0$, $x'(0) = 0 = x'(L)$.

5. Obtener los autovalores y autofunciones del problema $x'' + \lambda x = 0$, $x(0) = 0 = x'(L)$.

6. Obtener los autovalores y autofunciones del problema $x''+\lambda x = 0$, $x'(0) = 0 = x(L)$.

7. Obtener los autovalores y autofunciones del problema $x''+\lambda x = 0$, $x(-L) = -x(L)$, $x'(-L) = -x'(L)$.

8. Obtener los autovalores y autofunciones del problema $x''-2x'+x+\lambda x = 0$, $x(0) = 0 = x(1)$.

9. Obtener los autovalores y autofunciones del problema $t^2x'' + tx' + \lambda x = 0$, $x(e) = 0 = x(e^2)$.

10. Obtener los autovalores y autofunciones del problema $x'' + \lambda x = 0$, $x(0) = 0 = x(1) + x'(1)$.

11. Obtener los autovalores y autofunciones del problema $t^2x'' - 2tx' + (2 + \lambda t^2)x = 0$, $x(0) = 0 = x(2\pi)$. Usar el cambio de variable $x(t) = ty(t)$.

12. Hallar la función de Green para el problema $(tx')' = f(t)$, $x(1) = 0 = x(e)$. Aplicarla al caso $f(t) = t$.

13. Obtener la función de Green del problema $x'' + x = f(t)$, $x(0) = 0 = x(1)$ resolviendo la ecuación $G'' + G = \delta(t - s)$, con las correspondientes condiciones de contorno.

14. Hallar la función de Green para el problema $x'' + x' - 2x = f(t)$, $x(0) - x'(0) = 0 = x(1)$. Aplicarla al caso $f(t) = t$.

15. Hallar la función de Green para el problema $\big(tx'\big)' - x/t = f(t)$, $x(1) + x'(1) = 0 = x(2)$. Aplicarla al caso $f(t) = t$.

16. Obtener el desarrollo de $f(t) = t$ en serie de senos y cosenos en $[-\pi, \pi]$. Estudiar la convergencia de la serie de Fourier. Usar la serie para calcular las sumas $\sum(-1)^n/(2n + 1)$, $\sum n^{-2}$.

17. Obtener el desarrollo de $f(t) = t^2$ en serie de senos y cosenos en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Estudiar la convergencia de la serie de Fourier. Usar la serie para calcular las sumas $\sum(-1)^n/n^2$, $\sum n^{-2}$, $\sum n^{-4}$.

18. Hallar el desarrollo de Fourier de la función coseno en serie de senos en el intervalo $[0, \pi]$. Usar el resultado para calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2}$.

19. Hallar el desarrollo de Fourier de la función seno en serie de cosenos en el intervalo $[0, \pi]$. Usar el resultado para calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

20. Hallar el desarrollo de Fourier de la función $f(t) = \text{signo}\,(t)$ en serie de senos y cosenos en $[-\pi, \pi]$. ¿A qué valores converge el desarrollo en dicho intervalo? Calcular la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n \text{ impar}} n^{-2}$.

21. Calcular el desarrollo de la función $f(t) = \cosh t$ en serie de exponenciales imaginarias en el intervalo $[-\pi, \pi]$. ¿A qué valores converge el desarrollo de Fourier de f en los puntos de $[-\pi, \pi]$? Calcular la suma de las siguientes series, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)^2}$.

22. Resolver el problema mixto para la cuerda vibrante, de longitud L, regido por la ecuación $u_{tt} = u_{xx}$, donde $u(x,t)$ refleja la separación de la cuerda de su posición de equilibrio en el instante t en el punto x, con condiciones de contorno tales que los extremos de la cuerda están fijos, $u(0,t) = 0 = u(L,t)$, y la posición inicial de la cuerda y su derivada vienen dadas por $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$. Aplicarlo al caso en el que $f(x) = \sin \pi x/L$, $g(x) = 0$.