Problemas de Ecuaciones en Derivadas Parciales

Ecuación de Laplace

1. Sea $u(x, y)$ una función armónica para $x, y \in (0, \pi)$ que es nula en el borde de dicho cuadrado salvo $u(x, 0) = 3 \sin x$, $x \in (0, \pi)$.

2. Sea $u(x, y)$ una función tal que $u_{xx} + u_{yy} = -2 \sin x \sin y$ para $x, y \in (0, \pi)$ que satisface $u = 0$ en el borde de dicho cuadrado. Calcular $u(x, y)$.

3. Hallar en forma de serie la solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace $\Delta u(x, y) = 0$ para $x \in (0, L)$, $y \in (0, M)$ con condiciones de contorno $u(x, M) = f(x)$, $u(x, 0) = 0$ para $x \in (0, L)$, $u(0, y) = 0 = u(L, y)$ para $y \in (0, M)$. Aplicar el resultado al caso en el que $L = \pi = M$, $f(x) = 5 \sin x \cos x$. Comprobar explícitamente que la función obtenida satisface la ecuación y las condiciones de contorno. Aplicar el resultado al caso en el que $L = \pi = M$, $f(x) = 1$.

4. Hallar en forma de serie la solución del problema de Neumann para la ecuación de Laplace $\Delta u(x, y) = 0$ para $x \in (0, L)$, $y \in (0, M)$ con condiciones de contorno $u_y(x, 0) = -g(x)$, $u_y(x, M) = 0$ para $x \in (0, L)$, $u_x(0, y) = 0 = u_x(L, y)$ para $y \in (0, M)$.

5. Hallar en forma de serie la solución del problema de Neumann para la ecuación de Laplace $\Delta u(x, y) = 0$ para $x \in (0, L)$, $y \in (0, M)$ con condiciones de contorno $u_y(x, M) = g(x)$, $u_y(x, 0) = 0$ para $x \in (0, L)$, $u_x(0, y) = 0 = u_x(L, y)$ para $y \in (0, M)$. Aplicar el resultado al caso en el que $L = \pi = M$, $g(x) = 2 \sin^2 3x - 1$. Lo mismo para $g(x) = 2 \sin^2 3x$.

6. Hallar en forma de serie la solución del problema para la ecuación de Laplace $\Delta u(z, \phi) = u_{zz} + u_{\phi\phi} = 0$, $u(0, \phi) = 0$, $u(L, \phi) = f(\phi)$, $u(z, 0) = u(z, 2\pi)$, $u_\phi(z, 0) = u_\phi(z, 2\pi)$ para $z \in (0, L)$, $\phi \in (0, 2\pi)$. Aplicar el resultado al caso en el que $L = \pi$, $f(\phi) = 4 \sin 2\phi \cos 2\phi + \cos^2 2\phi$.

7. Sea $u(x, y)$ una función armónica para $x, y \in (0, \pi)$ cuya derivada normal es nula en el borde de dicho cuadrado salvo $u_y(x, 0) = 5 \cos 3x$, $x \in (0, \pi)$.

8. Hallar en forma de serie la solución del problema para la ecuación de Laplace $\Delta u(x, y) = 0$ para $x \in (0, L)$, $y \in (0, M)$ con condiciones de contorno $u(x, 0) = 0$, $u(x, M) = f(x)$ para $x \in (0, L)$, $u_x(0, y) = 0 = u_x(L, y)$ para $y \in (0, M)$. Aplicar el resultado al caso en el que $L = \pi = M$, $f(x) = \cos^2 2x$. Lo mismo para $f(x) = \cos(x/2)$.

9. Una función $u(r, \phi)$ satisface la ecuación de Laplace en un círculo de radio R centrado en el origen, y verifica $u(R, \phi) = \cos^2 \phi$. Hallar $u(r, \phi)$ en el interior del círculo.

10. La función $u(r, \phi)$ es armónica en el interior del círculo de radio a centrado en el origen, siendo $u(a, \phi) = 5 + \sin \phi \cos \phi$. Hallar $u(r, \varphi)$ en el interior del círculo.

11. Hallar en forma de serie la solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace $\Delta u(r, \phi) = 0$ en el semicírculo de radio R, $y \geq 0$, con condiciones de contorno $u(R, \phi) = f(\phi)$, $u(r, 0) = 0 = u(r, \pi)$, $r \in (0, R)$, $\phi \in (0, \pi)$. Aplicarlo al caso $f(\phi) = 6 \sin 4x \cos 4x$.

12. Sea u una función armónica en el disco de radio a centrado en el origen y que se anula en el diámetro $y = 0$. Demostrar que $u(x, -y) = -u(x, y)$.

13. Sea $u(x, y)$ una función armónica para $x \in (0, \pi)$, $y > 0$. Se tiene que $u(x, 0) = 1$ para $x \in (0, \pi)$, $u(0, y) = 0 = u(\pi, y)$ para $y > 0$. Hallar $u(x, y)$.

14. Hallar en forma de serie la solución del problema de Neumann para la ecuación de Laplace $\Delta u(r, \phi) = 0$ en el círculo de radio R con condiciones de contorno $u_r(R, \phi) = g(\phi)$, $r \in (0, R)$, $\phi \in (0, 2\pi)$. Aplicar el resultado al caso en el que $g(\phi) = 1$ y al caso en el que $g(\phi) = \sin \phi \cos \phi$.

15. Sea u una función armónica y no negativa en el círculo de radio R centrado en el origen, y continua en su borde. Demostrar las desigualdades

$$\frac{R - ||\mathbf{x}||}{R + ||\mathbf{x}||} u(\mathbf{0}) \leq u(\mathbf{x}) \leq \frac{R + ||\mathbf{x}||}{R - ||\mathbf{x}||} u(\mathbf{0}).$$

    Utilizar la fórmula integral de Poisson.

16. Obtener la función de Green para el problema de Dirichlet en el semiespacio $z > 0$ en $\mathbb{R}^3$.