Problemas de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales

Ecuación del calor

1. Hallar la distribución de temperaturas de una varilla infinita sabiendo que el perfil inicial de temperaturas es gaussiano, $u(x,0) = T_0 e^{-x^2/a^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$. ¿Qué sucede para $u(x,0) = T_0 e^{x^2/a^2}$?

2. Una varilla infinita está inicialmente a temperatura T_0, excepto un tramo de longitud L, que está a temperatura $T_1 > T_0$. Hallar la distribución de temperaturas en el futuro.

3. Hallar para $t > 0$ la distribución de temperaturas $u(x,t)$ en una barra semiinfinita ($x \geq 0$), si en $t = 0$ está a temperatura uniforme T_0, y para $t > 0$ se mantiene su extremo a temperatura T_1.

4. Estudiar la evolución de la temperatura de una varilla de longitud L, cuyos extremos están en contacto, respectivamente, con focos de temperatura, T_1 y T_2. Aplicarlo al caso en que la varilla tiene temperatura inicial nula.

5. Hallar la distribución de temperaturas de una varilla de longitud L para $t > 0$ si el flujo de calor por los extremos es nulo, $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$, y la distribución inicial de temperaturas es $u(x,0) = \cos^2(\pi x/L)$.

6. Hallar para $t > 0$ la distribución de temperaturas $u(x,t)$ en una barra de longitud $2l$, si en $t = 0$ su mitad izquierda está a temperatura T_1 y su mitad derecha a temperatura T_2, cumpliéndose $u_x(-l,t) = u_x(l,t) = 0$.

7. Consideremos un anillo de espesor despreciable y radio R, aislado de su entorno. Supuesta una distribución inicial de temperaturas en el anillo, hallar la distribución de temperaturas para tiempos posteriores. Aplicar el resultado a un anillo con distribución inicial de temperaturas $u(\phi,0) = 5\cos\phi$.

8. La temperatura de una varilla de longitud L verifica la siguiente ecuación del calor inhomogénea: $u_t - \kappa u_{xx} = x$, con las siguientes condiciones iniciales y de contorno: $u(x,0) = f(x)$, $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$. Obtener la distribución de temperaturas para $t > 0$. Aplicarlo al caso en el que $f(x) = 0$.

9. Hallar la distribución de temperaturas de una varilla de longitud L para $t > 0$ si los extremos están a temperatura nula, $u(0,t) = 0 = u(L,t)$, y la distribución inicial de temperaturas verifica $u_x(x,0) = g(x)$. Aplicarlo al caso $L = \pi$, $g(x) = \cos^2 x$. Aplicarlo al caso $L = \pi$, $g(x) = \sin 2x$.

10. Hallar la distribución de temperaturas de una varilla de longitud L para $t > 0$ si el flujo de calor por los extremos es nulo, $u_x(0,t) = 0 = u_x(L,t)$, y la distribución inicial de temperaturas verifica $u_x(x,0) = -g(x)$.

11. Hallar la distribución de temperaturas de una varilla de longitud L para $t > 0$ si la temperatura en los extremos es nula, $u(0,t) = u(L,t) = 0$, y la distribución inicial de temperaturas verifica $u_t(x,0) = -f(x)$. Aplicarlo al caso en el que la condición inicial es $u_t(x,0) = x$, $x \in (0,\pi)$.

12. Obtener el núcleo integral para el problema de Cauchy de una varilla infinita que intercambia calor con un medio exterior a temperatura nula, suponiendo que la temperatura de la varilla se rige por la ecuación $u_t = \kappa u_{xx} - hu$, donde κ y h son, respectivamente, los coeficientes de conducción y convección. Aplicarlo al caso particular en el que la temperatura inicial es $u(x,0) = T_0 e^{-x^2/a^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$.