Ecuaciones de primer orden en derivadas parciales

Leonardo Fernández
Matemática Aplicada, ETSI Navales, Universidad Politécnica de Madrid

1. Ecuaciones cuasilineales de primer orden

Notación: $u_x := \dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} := \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} := \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \ldots$
Ecuación cuasilineal de primer orden para $u(x,y)$: $a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$.

Sistema caracteristico: $\dot{x} = a,\ \dot{y} = b,\ \dot{z} = c$ para **curvas características** de soluciones de la ecuación.
Proyecciones caracteristicas: Curvas planas que verifican $\dot{x} = a,\ \dot{y} = b$ si a, b no dependen de u.

2. Problema de valores iniciales

Teorema: Sea la ecuación $a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$. El P.V.I. a lo largo de una curva Γ tiene solución unica en un entorno de Γ si a, b, c son funciones de clase C^1 y $\begin{vmatrix} a\big(f(s), g(s), h(s)\big) & f'(s) \\ b\big(f(s), g(s), h(s)\big) & g'(s) \end{vmatrix} \neq 0$, donde $\gamma(s) = \big(f(s), g(s), h(s)\big)$ es una parametrización del dato inicial ($u\big(f(s), g(s)\big) = h(s)$).

Resolución: Resolver $\dot{x} = a,\ \dot{y} = b,\ \dot{z} = c$ con condiciones iniciales $x(s,0) = f(s),\ y(s,0) = g(s)$, $z(s,0) = h(s)$. Es una solución en forma paramétrica $u\big(x(s,\tau), y(s,\tau)\big) = z(s,\tau)$.
Si h es arbitraria, proporciona una solución general de la ecuación.

3. Solución general

Ecuación cuasilineal: Resolver $\dfrac{dx}{a} = \dfrac{dy}{b} = \dfrac{du}{c}$ con dos constantes, $F(x,y,u) = C_1,\ G(x,y,u) = C_2$.
La solución general se puede escribir de varias maneras:
$F(x,y,u) = f\left(G(x,y,u)\right), \qquad G(x,y,u) = g\left(F(x,y,u)\right), \qquad h\left(F(x,y,u), G(x,y,u)\right) = 0.$

Ecuación *lineal*: $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y,u)$ tiene características $F(x,y) = K$, solución de $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a}$.
Con el cambio $U(x,y) = x$, $V(x,y) = F(x,y)$, la ecuación se reduce a ordinaria $au_U = c$ (forma normal).
Con el cambio $U(x,y) = y$, $V(x,y) = F(x,y)$, la ecuación se reduce a ordinaria $bu_U = c$ (forma normal).