Ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden: ecuación de ondas

Leonardo Fernández
Matemática Aplicada, ETSI Navales, Universidad Politécnica de Madrid

1. Características de ecuaciones cuasilineales

Ecuaciones cuasilineales de orden dos para $u(x,y)$: $au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}=d$ donde a,b,c,d dependen de x,y,u,u_x,u_y.

Curvas características: Verifican $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$. Tipos:

- Ecuaciones elípticas: $b^2-ac<0$. No poseen curvas características reales.
- Ecuaciones hiperbólicas: $b^2-ac>0$. Poseen dos familias de curvas características reales.
- Ecuaciones parabólicas: $b^2-ac\equiv 0$. Poseen una sola familia de curvas características.
- Ecuaciones sin tipo definido: aquellas para las que el discriminante cambia de signo.

Formas cánonicas o normales de las ecuaciones de orden dos, donde a, b, c dependen sólo de x, y:

- Ecuaciones hiperbólicas: Dos familias de características, $U(x,y)=K$, $V(x,y)=\tilde{K}$. Con el cambio a coordenadas $U(x,y)$, $V(x,y)$, la ecuación se reduce a forma normal $u_{UV}=D(U,V,u,u_U,u_V)$.
- Ecuaciones elípticas: Dos familias complejas conjugadas, $U(x,y)+iV(x,y)=K$, $U-iV(x,y)=\tilde{K}$. Con el cambio a $U(x,y)$, $V(x,y)$ la ecuación se reduce a forma normal $u_{UU}+u_{VV}=D(U,V,u,u_U,u_V)$.
- Ecuaciones parabólicas: Una familia de características $V(x,y)=K$. Con el cambio a $U(x,y)=x$ (o $U(x,y)=y$), $V(x,y)$, la ecuación se reduce a forma normal de la $u_{UU}=D(U,V,u,u_U,u_V)$.

2. Ecuación de la cuerda vibrante infinita

Solución general de $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$ para $u(x,t)$: $u(x,t)=H(x+ct)+G(x-ct)$ con G,H arbitrarias.

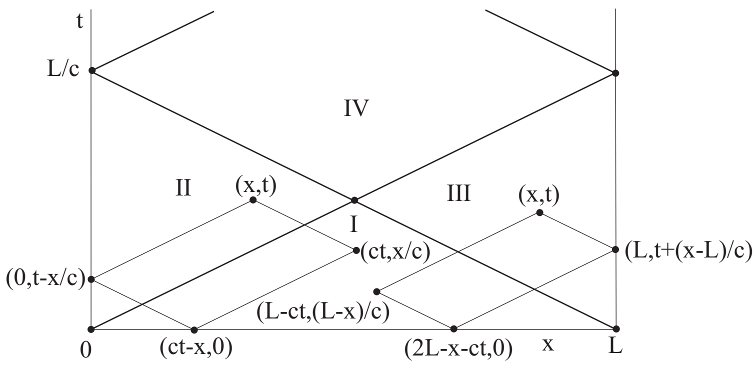
Teorema (d'Alembert): El P.V.I. $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$, $u(x,0)=f(x)$, $u_t(x,0)=g(x)$ para $t>0$, $x\in\mathbb{R}$, con f de clase C^2, g de clase C^1, tiene solución $u(x,t)=\dfrac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct}g(X)\,dX$.
Dominio de dependencia del punto (x,t): El intervalo $[x-ct,x+ct]$.
Dominio de influencia del punto (x,t): Región limitada por las semirrectas de pendiente $\pm c$ que parten de dicho punto.
Ley del paralelogramo: Sea u solución de $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$. Si A,C y B,D son parejas de vértices opuestos de un paralelogramo formado por segmentos de características, se cumple $u(A)+u(C)=u(B)+u(D)$.

3. Ecuación de la cuerda vibrante finita

Problema mixto: $u_{tt}-c^2u_{xx}=0,\ x\in(0,L),\ t>0,\quad u(x,0)=f(x),\quad u_t(x,0)=g(x),\quad u(0,t)=\alpha(t),\quad u(L,t)=\beta(t)$.
Condiciones de compatibilidad: $f(0)=\alpha(0),\quad f(L)=\beta(0),\quad g(0)=\alpha'(0),\quad g(L)=\beta'(0),\quad c^2f''(0)=\alpha''(0),\quad c^2f''(L)=\beta''(0)$.

Solución por zonas:

- Zona I: aplicamos la fórmula de d'Alembert directamente.
- Zona II: podemos usar la ley del paralelogramo con paralelogramos característicos que se apoyen, por ejemplo, en la recta $x = 0$ y en la recta $t = 0$.
- Zona III: del mismo modo, podemos usar la ley del paralelogramo con paralelogramos característicos que se apoyen, por ejemplo, en la recta $x = L$ y en la recta $t = 0$.
- Resto de zonas: podemos trazar paralelogramos característicos que se apoyen bien en las rectas $x = 0$, $x = L$, bien en zonas donde ya conozcamos la solución.



Energía de una onda u, solución de la ecuación $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$: $E[u] := \int_0^L \left(u_t^2 + c^2 u_x^2\right)\, dx \geq 0$

Teorema: Es única la solución del problema mixto $u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)$, $\quad u(x,0) = f(x)$, $\quad u_t(x,0) = g(x)$, $u(0,t) = \alpha(t)$, $\quad u(L,t) = \beta(t)$, $\quad t > 0,\ x \in (0, L)$.

Teorema: Es única la solución del problema mixto $u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)$, $\quad u(x,0) = f(x)$, $\quad u_t(x,0) = g(x)$, $u_x(0,t) = \alpha(t)$, $\quad u_x(L,t) = \beta(t)$, $\quad t > 0,\ x \in (0, L)$.

4. Ecuación inhomogénea de la cuerda vibrante

Teorema: El problema de valores iniciales $u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)$, $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$ para $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, siendo f de clase C^2, g, F de clase C^1, tiene por solución

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(X)\, dX + \frac{1}{2c}\int_0^t dT \int_{x-c(t-T)}^{x+c(t-T)} dX\, F(X,T).$$

5. Cuerda semiinfinita

Teorema: El problema mixto $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, $u(0,t) = 0$ para $t > 0$, $x > 0$, siendo f de clase C^2, g de clase C^1, tiene por solución única $u(x,t) = \dfrac{\tilde f(x+ct) + \tilde f(x-ct)}{2} + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde g(X)\, dX$, donde $\tilde f$, $\tilde g$ son las extensiones impares de f, g respectivamente.