Problemas de contorno

Leonardo Fernández
Matemática Aplicada, ETSI Navales, Universidad Politécnica de Madrid

1. Problemas de Sturm-Liouville homogéneos

Sean $p(t) \in C^1([a,b])$, $\quad q(t), r(t) \in C([a,b])$, $\quad p(t), r(t) > 0$ para $t \in [a,b]$:
Problemas de Sturm-Liouville regulares con condiciones separadas: $\big(p(t)x'\big)' - q(t)x + \lambda r(t)x = 0$, $\alpha x(a) + \tilde{\alpha} x'(a) = 0$, $\beta x(b) + \tilde{\beta} x'(b) = 0$, donde $\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta}$ son constantes.
Problemas de Sturm-Liouville regulares con condiciones períodicas: $\big(p(t)x'\big)' - q(t)x + \lambda r(t)x = 0$, $x(a) = x(b)$, $\quad x'(a) = x'(b)$ con $p(a) = p(b)$.
Autofunciones del problema: Las soluciones no triviales del problema.
Autovalores del problema: Valores de λ para los que hay soluciones no triviales del problema.

Teorema: Los autovalores de un problema S-L regular son una sucesión infinita $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ no acotada.
Las autofunciones correspondientes a autovalores distintos $\lambda_m \neq \lambda_n$, x_m, x_n, son ortogonales con peso r, $\displaystyle\int_a^b r x_m x_n \, dt = 0$, en el intervalo $[a,b]$.
La autofunción x_n tiene exactamente $n-1$ ceros en el intervalo (a,b).
Condiciones de contorno separadas: Las autofunciones para cada autovalor están definidas salvo un factor multiplicativo.

Teorema: Sean x, $\tilde{x}$ soluciones respectivas de las ecuaciones $\big(p(t)x'\big)' + g(t)x = 0$, $\big(\tilde{p}(t)\tilde{x}'\big)' + \tilde{g}(t)\tilde{x} = 0$, tales que $p(t), \tilde{p}(t) > 0$, con $p, \tilde{p}$ de clase C^1 y g, $\tilde{g}$ continuas en un intervalo $[a,b]$.
Si $\tilde{g}(t) > g(t)$ y $\tilde{p}(t) < p(t)$, entonces $\tilde{x}(t)$ se anula al menos una vez entre cualquier par de ceros consecutivos de $x(t)$ en dicho intervalo.
Teorema: Sea el problema de Sturm-Liouville, $\big(p(t)x'\big)' - q(t)x + \lambda r(t)x = 0$, $x(a) = 0 = x(b)$. Si disminuimos p o q o aumentamos r, disminuyen los autovalores positivos del problema. Y a la inversa.

2. Series de Fourier

Serie de Fourier: Problema de Sturm-Liouville: $\big(p(t)x'\big)' - q(t)x + \lambda r(t)x = 0$, $\quad \alpha x(a) + \alpha' x'(a) = 0 = \beta x(b) + \beta' x'(b)$. $\quad$ Autovalores: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ $\quad$ Autofunciones: Múltiplos de $x_1, \ldots, x_n, \ldots$.
Serie: Bajo ciertas condiciones de regularidad, $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n(t)$ con $f_n = \dfrac{1}{\|x_n\|^2} \displaystyle\int_a^b r(t) x_n(t) f(t) \, dt$.

Identidad de la energía: $\displaystyle\int_a^b r(t) |f(t)|^2 \, dt = \sum_n |f_n|^2 \|x_n\|^2$.

Función f continua a trozos en $[a,b]$: Si f es continua en el intervalo, salvo en un conjunto finito de puntos, $t_1, \ldots, t_p$, donde existen los límites laterales $f(t_{i^-}) = \lim\limits_{t \to t_{i^-}} f(t)$, $f(t_{i^+}) = \lim\limits_{t \to t_{i^+}} f(t)$.
Función $f$de clase C^1 a trozos en $[a,b]$: Si f, f' son continuas a trozos en dicho intervalo.

Teorema: Si f es una función de clase C^1 a trozos en $[a,b]$, la serie de Fourier $\sum f_n x_n(t)$ converge al valor $f(t)$ en los puntos de (a,b) en los que f es continua y a $\dfrac{f(t-) + f(t+)}{2}$ en los puntos donde f es discontinua.

Serie de Fourier de senos: Problema de Sturm-Liouville: $x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0 = x(L)$.
Autovalores: $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n = 1, 2, \dots$ Autofunciones: Múltiplos de $x_n(t) = \sin \frac{n\pi}{L} t$.
Serie: $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} t \quad$ con $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L} t \, dt \qquad$ n=1,2,...
Convergencia: En los extremos $0, L$, la serie converge al valor cero.
Identidad de la energía: $\int_0^L |f(t)|^2 \, dt = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$.

Serie de Fourier de cosenos: Problema de Sturm-Liouville: $x'' + \lambda x = 0, \quad x'(0) = 0 = x'(L)$.
Autovalores: $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n = 0, 1, \dots$ Autofunciones: Múltiplos de $x_0(t) = 1, \quad x_n(t) = \cos \frac{n\pi}{L} t$.
Serie: $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} t, \quad$ con $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} t \, dt, \qquad$ n=1,2,...
Convergencia: En los extremos $0, L$, la serie converge al valor de la función.
Identidad de la energía: $\int_0^L |f(t)|^2 \, dt = \frac{L}{4} |a_0|^2 + \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$.

Serie de Fourier de senos y cosenos: Problema de S-L: $x'' + \lambda x = 0, \quad x(-L) = x(L), \ x'(-L) = x'(L)$.
Autovalores: $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n = 0, 1, \dots$
Autofunciones: Múltiplos de $x_0(t) = 1$, combinaciones lineales de $x_n(t) = \cos \frac{n\pi}{L} t, \quad \tilde{x}_n(t) = \sin \frac{n\pi}{L} t$.
Serie: $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} t$, $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{n\pi}{L} t \, dt$, $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \sin \frac{n\pi}{L} t \, dt$.
Convergencia: En los extremos $\pm L$ la serie converge al valor $\frac{f(-L) + f(L)}{2}$.
Identidad de la energía: $\int_{-L}^{L} |f(t)|^2 \, dt = \frac{L}{2} |a_0|^2 + L \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + L \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$.

Serie de Fourier en exponenciales imaginarias: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\pi t/L}, \quad$ con $f_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t) e^{-in\pi t/L} \, dt$.
Identidad de la energía: $\int_{-L}^{L} |f(t)|^2 \, dt = 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2$. Otra forma para el problema anterior.