Ecuación de Laplace

Leonardo Fernández
Matemática Aplicada, ETSI Navales, Universidad Politécnica de Madrid

Funciones armónicas: Las soluciones de la ecuación de Laplace en un abierto de $\mathbb{R}^n$,
$0 = \Delta u(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{\partial^2 u(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 u(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n^2}$.
Ecuación de Laplace en coordenadas polares en el plano: $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $r \in (0, \infty)$, $\phi \in (0, 2\pi)$: $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$.
Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas: $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$, $r \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, \pi)$, $\phi \in (0, 2\pi)$: $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$.
Soluciones fundamentales de la ecuación de Laplace: en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$:
$\psi_{\mathbf{x}_0}(x, y) = \dfrac{\ln\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}{2\pi}$, $\qquad \psi_{\mathbf{x}_0}(x, y, z) = \dfrac{-1}{4\pi\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}$.
Problema de Dirichlet: Hallar $u \in C^2(V)$, conocidos los valores de Δu en V y de u en δV.
Problema de Neumann: Hallar $u \in C^2(V)$, conocidos los valores de Δu en V y de $\dfrac{du}{d\nu}$ en δV.
Corolario: La solución del problema de Dirichlet es única.
Corolario: La solución del problema de Neumann es única salvo una constante.
Si $\Delta V = 0$ es necesario que $\displaystyle\int_{\delta V} \frac{du}{d\nu}\, dS = 0$ para que haya solución.
Ecuación de Laplace en un rectángulo: El problema de Dirichlet:

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad u(x, M) = f_2(x),\ x \in (0, L), \quad u(0, y) = g_1(y), \quad u(L, y) = g_2(y),\ y \in (0, M),$$

se descompone en cuatro problemas con un lado no trivial: $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y)$:
$u_1(x, 0) = f_1(x), \quad u_1(x, M) = 0 = u_1(0, y) = u_1(L, y),$
$u_2(x, M) = f_2(x), \quad u_2(x, 0) = 0 = u_2(0, y) = u_2(L, y),$
$u_3(0, y) = g_1(x), \quad u_3(L, y) = 0 = u_3(x, 0) = u_3(x, M),$
$u_4(L, y) = g_2(x), \quad u_4(0, y) = 0 = u_4(x, 0) = u_4(x, M).$