Ecuación del calor

Leonardo Fernández
Matemática Aplicada, ETSI Navales, Universidad Politécnica de Madrid

1. Problema de Cauchy

Curvas características: las líneas temporales $t = \text{const}$.

Teorema: El problema de valores iniciales $u_t - \kappa u_{xx} = 0$, $u(x,0) = f(x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, tiene solución $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}\, dy$ si la integral converge. La solución es única si exigimos $u(x,t) \geq 0$.

Núcleo integral de la ecuación del calor: $K(x,y,t) = \dfrac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}}{\sqrt{4\pi\kappa t}}$, $\quad u(x,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} K(x,y,t) f(y)\, dy.$

- $K(x,y,t)$ es una función positiva de clase C^∞ (más aún, es analítica) para $x, y \in \mathbb{R}$, $t > 0$.
- $K(x,y,t)$ es solución de la ecuación del calor para $t > 0$.
- $K(x,x_0,t)$ es la solución de la ecuación del calor para un dato inicial $u(x,0) = \delta(x - x_0)$.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} K(x,y,t)\, dy = 1. \qquad \inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) \leq u(x,t) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ t \geq 0.$

2. Función error

Función error: $\operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-z^2}\, dz = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-z^2}\, dz$. Propiedades:

- $\operatorname{erf}(0) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \operatorname{erf}(x) = 1.$
- La función error es de clase C^∞ e impar.
- $\operatorname{erf}'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$
- $1 - \operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_x^{\infty} e^{-z^2}\, dz$, si $x > 0$, $\qquad 1 + \operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-x}^{\infty} e^{-z^2}\, dz$, si $x > 0$.

3. Varilla semiinfinita

Teorema: El problema mixto $u_t - \kappa u_{xx} = 0$, $u(x,0) = f(x)$, $u(0,t) = 0$, $t > 0$, $x > 0$, tiene solución $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}\, dy$, si la integral converge, siendo $\tilde{f}$ la extensión impar de f.

Teorema: El problema mixto $u_t - \kappa u_{xx} = 0$, $u(x,0) = f(x)$, $u_x(0,t) = 0$, $t > 0$, $x > 0$, tiene solución $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}\, dy$, si la integral converge, siendo $\hat{f}$ la extensión par de f.