Capítulo 4

Ecuaciones de primer orden

Problema 4.1 *Demostrar que la solución de la ecuación* $u_y + a(u)u_x = 0$*, con la condición inicial* $u(x,0) = h(x)$*, está dada implícitamente por la expresión* $u = h(x - a(u)y)$*.*

Solución:

Lo comprobamos explícitamente calculando las derivadas, implícitas de la solución,

$$u_x = \frac{\partial h\big(x - a(u)y\big)}{\partial x} = \frac{\partial (x - a(u)y)}{\partial x} h' = (1 - ya'(u)u_x)h',$$

$$u_y = \frac{\partial h\big(x - a(u)y\big)}{\partial y} = \frac{\partial (x - a(u)y)}{\partial y} h' = -(a(u) + ya'(u)u_y)h',$$

denotando por h' la derivada de h respecto a su parámetro.

Despejando u_x, u_y de las expresiones anteriores,

$$u_x = \frac{h'}{1 + ya'(u)h'}, \quad u_y = -\frac{a(u)h'}{1 + ya'(u)h'},$$

que sustituidas en la ecuación,

$$u_y + a(u)u_x = u_x = \frac{h'}{1 + ya'(u)h'} \left(-a(u) + a(u)\right) = 0,$$

proporcionan el resultado correcto. □

Problema 4.2 *Hallar la solución de la ecuación* $u_x + y^2 u_y = 2xu$ *que satisface* $u(x,0) = h(x)$*. Y la solución que satisface* $u(x,1) = h(x)$*. Particularizar para el caso en el que* $u(x,1) = x$*.*

Solución:

Los coeficientes de la ecuación son $a(x,y,u) = 1$, $b(x,y,u) = y^2$, $c(x,y,u) = 2xu$.

El dato inicial es $x(s,0)=f(s)=s$, $y(s,0)=g(s)=0$, $z(s,0)=h(s)$ y no cumple la condición de transversalidad,

$$\left|\begin{array}{cc} a & f'(s) \\ b & g'(s) \end{array}\right|_{(f(s),g(s),h(s))} = \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right| = 0,$$

luego el problema no está bien planteado.

El dato inicial es $x(s,0)=f(s)=s$, $y(s,0)=g(s)=1$, $z(s,0)=h(s)$ y cumple la condición de transversalidad,

$$\left|\begin{array}{cc} a & f'(s) \\ b & g'(s) \end{array}\right|_{(f(s),g(s),h(s))} = \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = -1 \neq 0,$$

por lo que tendrá solución única.

El sistema característico es

$$\dot{x}=1, \qquad \dot{y}=y^2, \qquad \dot{z}=2xz,$$

y sus dos primeras ecuaciones se resuelven inmediatamente,

$$x(s,\tau)=\tau+\alpha(s), \qquad y(s,\tau)=\frac{1}{\beta(s)-\tau},$$

y les podemos imponer las condiciones iniciales,

$$s=x(s,0)=\alpha(s), \quad 1=y(s,0)=\frac{1}{\beta(s)} \Rightarrow x(s,\tau)=\tau+s, \quad y(s,\tau)=\frac{1}{1-\tau},$$

y sustituidas en la tercera ecuación,

$$\frac{\dot{z}}{z}=2(\tau+s) \Rightarrow z(s,\tau)=\gamma(s)e^{\tau^2+2s\tau},$$

y como $z(s,0)=h(s)$, obtenemos

$$h(s)=z(s,0)=\gamma(s) \Rightarrow z(s,\tau)=h(s)e^{\tau^2+2s\tau}.$$

La solución del problema de valores iniciales en forma paramétrica es, pues,

$$x(s,\tau)=\tau+s, \qquad y(s,\tau)=\frac{1}{1-\tau}, \qquad z(s,\tau)=h(s)e^{\tau^2+2s\tau},$$

pero podemos eliminar los parámetros s,τ,

$$\tau=1-\frac{1}{y}, \qquad s=x-\tau=x+\frac{1}{y}-1,$$

$$u(x,y)=h\left(x+\frac{1}{y}-1\right)e^{2x-\frac{2x}{y}+\frac{2}{y}-\frac{1}{y^2}-1}. \ \square$$

Esta es la solución general del problema, ya que depende de una función arbitraria, h, de las variables.

Obsérvese que intentar dar el dato inicial sobre el eje $y=0$, como hemos visto, provoca problemas.

En el caso en el que $h(x) = x$ la solución del problema de Cauchy es, sustituyendo,

$$u(x,y) = \left(x + \frac{1}{y} - 1\right) e^{2x - \frac{2x}{y} + \frac{2}{y} - \frac{1}{y} - 1}. \ \square$$

A este resultado habríamos llegado teniendo en cuenta que la ecuación es lineal y que sus proyecciones características verifican

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} = y^2 \Rightarrow \frac{1}{y} + x = K,$$

con lo cual, con el cambio de variable $U(x,y) = x$, $V(x,y) = x + y^{-1}$, llegamos a la ecuación,

$$u_U = \frac{c}{a} = 2xu = 2Uu,$$

que se integra directamente,

$$\ln|u| = U^2 + F(V) \Rightarrow u(U,V) = G(V)e^{U^2},$$

denotando $G(V) = \pm e^{F(V)}$.

Deshaciendo el cambio obtenemos la misma solución general,

$$u(x,y) = G\left(x + \frac{1}{y}\right) e^{x^2}, \ \square$$

sólo que presentada de una manera más sencilla.

Problema 4.3 *Hallar la solución de la ecuación* $2xu_y - u_x = 4xy$ *que satisface* $u(0,y) = h(y)$*. Particularizar para el caso en el que* $u(0,y) = y^2$*. Hallar la solución que satisface* $u(x,-x^2) = h(x)$*.*

Solución:

Los coeficientes de la ecuación son $a = -1$, $b(x,y,u) = 2x$, $c(x,y,u) = 4xy$.

El dato inicial es $x(s,0) = f(s) = 0$, $y(s,0) = g(s) = s$, $z(s,0) = h(s)$ y cumple la condición de transversalidad,

$$\left|\begin{array}{cc} a & f'(s) \\ b & g'(s) \end{array}\right|_{(f(s),g(s),h(s))} = \left|\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right| = -1,$$

por lo que tendrá solución única.

El sistema característico es

$$\dot{x} = -1, \qquad \dot{y} = 2x, \qquad \dot{z} = 4xy,$$

y sus dos primeras ecuaciones se resuelven sucesivamente,

$$x(s,\tau) = -\tau + \alpha(s),$$

$$\dot{y} = 2x = -2\tau + 2\alpha(s) \Rightarrow y(s,\tau) = -\tau^2 + 2\alpha(s)\tau + \beta(s),$$

y les podemos imponer las condiciones iniciales,

$$0 = x(s,0) = \alpha(s), \quad s = y(s,0) = \beta(s) \Rightarrow x(s,\tau) = -\tau, \quad y(s,\tau) = s - \tau^2,$$

y sustituidas en la tercera ecuación,

$$\dot{z} = 4\tau(\tau^2 - s) \Rightarrow z(s,\tau) = \tau^4 - 2s\tau^2 + \gamma(s),$$

y como $z(s,0) = h(s)$, obtenemos

$$h(s) = z(s,0) = \gamma(s) \Rightarrow z(s,\tau) = \tau^4 - 2s\tau^2 + h(s).$$

La solución del problema de valores iniciales en forma paramétrica es, pues,

$$x(s,\tau) = -\tau, \qquad y(s,\tau) = s - \tau^2, \qquad z(s,\tau) = \tau^4 - 2s\tau^2 + h(s),$$

pero podemos eliminar los parámetros s, τ,

$$\tau = -x, \qquad s = y + \tau^2 = y + x^2,$$

$$u(x,y) = h(x^2 + y) - x^4 - 2x^2 y, \ \Box$$

o, más sencillo, llamando $H(x^2 + y) = h(x^2 + y) - (x^2 + y)^2$,

$$u(x,y) = H(x^2 + y) + y^2. \ \Box$$

Esta es la solución general del problema, ya que depende de una función arbitraria de las variables.

En el caso en el que $p(y) = y^2$ la solución del problema de Cauchy es, sustituyendo,

$$u(x,y) = (x^2 + y)^2 - x^4 - 2x^2 y = y^2. \ \Box$$

Si el dato inicial es $x(s,0) = f(s) = s$, $y(s,0) = g(s) = -s^2$, $z(s,0) = h(s)$ no cumple la condición de transversalidad,

$$\begin{vmatrix} a & f'(s) \\ b & g'(s) \end{vmatrix}_{(f(s),g(s),h(s))} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2s & -2s \end{vmatrix} = 0,$$

luego el problema no está bien planteado.

Fijémosnos en el que el dato inicial de la forma $u(x, -x^2) = p(x)$ impone

$$p(x) = x^4 + H(0).$$

Por tanto, sólo tendrían solución los problemas con dato inicial de la forma $u(x, -x^2) = x^4 + k$. Pero la solución no sería única, ya que cualquier función H tal que $H(0) = k$ sería válida.

A este resultado habríamos llegado teniendo en cuenta que la ecuación es lineal y que sus proyecciones características verifican

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} = -2x \Rightarrow x^2 + y = K,$$

con lo cual, con el cambio de variable $U(x,y) = y$, $V(x,y) = x^2 + y$, llegamos a la ecuación,

$$u_U = \frac{c}{b} = 2y = 2U,$$

que se integra directamente,

$$u(U,V) = U^2 + H(V).$$

Deshaciendo el cambio obtenemos la misma solución general,

$$u(x,y) = y^2 + H(x^2 + y). \ \Box$$

Problema 4.4 *Hallar la solución de la ecuación* $u_x - u_y + \frac{y-x}{xy}u = 0$ *que satisface* $u(x,1) = x$. *Hallar la solución general usando como dato inicial* $u(x,1) = h(x)$.

Solución:

Los coeficientes de la ecuación son $a = 1$, $b = -1$, $c(x,y,u) = u/y - u/x$.

El dato inicial es $x(s,0) = f(s) = s$, $y(s,0) = g(s) = 1$, $z(s,0) = h(s) = s$ y cumple la condición de transversalidad,

$$\left| \begin{array}{cc} a & f'(s) \\ b & g'(s) \end{array} \right|_{(f(s),g(s),h(s))} = \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right| = 1 \neq 0.$$

El sistema característico es

$$\dot{x} = 1, \qquad \dot{y} = -1, \qquad \dot{z} = \frac{z}{y} - \frac{z}{x},$$

y sus dos primeras ecuaciones se resuelven inmediatamente,

$$x(s,\tau) = \tau + \alpha(s), \quad y(s,\tau) = -\tau + \beta(s),$$

y les podemos imponer las condiciones iniciales,

$$s = x(s,0) = \alpha(s), \quad 1 = y(s,0) = \beta(s) \Rightarrow x(s,\tau) = \tau + s, \quad y(s,\tau) = 1 - \tau,$$

y sustituidas en la tercera ecuación,

$$\frac{\dot{z}}{z} = -\frac{1}{\tau - 1} - \frac{1}{\tau + s},$$

obtenemos la solución del problema, denotando $\delta(s) = \pm e^{\gamma(s)}$,

$$\ln|z| = -\ln|\tau - 1| - \ln|\tau + s| + \gamma(s) \Rightarrow z(s,\tau) = \frac{\delta(s)}{(\tau + s)(\tau - 1)},$$

y como $z(s,0) = s$, obtenemos

$$s = -\frac{\delta(s)}{s} \Rightarrow \delta(s) = -s^2 \Rightarrow z(s,\tau) = \frac{s^2}{(\tau + s)(1 - \tau)}.$$

La solución del problema de valores iniciales en forma paramétrica es, pues,

$$x(s,\tau) = \tau + s, \quad y(s,\tau) = 1 - \tau, \quad z(s,\tau) = \frac{s^2}{(\tau + s)(1 - \tau)},$$

pero podemos eliminar los parámetros s, τ,

$$\tau = 1 - y, \qquad s = x - \tau = x + y - 1 \Rightarrow u(x,y) = \frac{(x + y - 1)^2}{xy}. \ \square$$

Podríamos haber obtenido la solución general manteniendo como dato inicial $z(s,0) = h(s)$, con lo cual

$$\delta(s) = -sh(s) \Rightarrow z(s,\tau) = \frac{sh(s)}{(\tau + s)(1 - \tau)},$$

y la solución general, con h como función libre, quedaría como

$$u(x,y) = \frac{(x+y-1)h(x+y-1)}{xy}. \ \square$$

A este resultado habríamos llegado teniendo en cuenta que la ecuación es lineal y que sus proyecciones características verifican

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} = -1 \Rightarrow x + y = K,$$

con lo cual, con el cambio de variable $U(x,y) = x$, $V(x,y) = x + y$, es decir, $x(U,V) = U$, $y(U,V) = V - U$, llegamos a la ecuación,

$$u_U = \frac{c}{a} = \frac{2U - V}{U(V-U)}u,$$

que se integra directamente,

$$\ln|u| = -\ln|U(V-U)| + F(V) \Rightarrow u(U,V) = \frac{G(V)}{U(V-U)},$$

denotando $G(V) = \pm e^{F(V)}$.

Deshaciendo el cambio obtenemos la misma solución general,

$$u(x,y) = \frac{G(x+y)}{xy}, \ \square$$

sólo que presentada de una manera más sencilla.

Problema 4.5 *Hallar la solución general de $xu_x + yu_y = 1$. Resolver los problemas de valores iniciales $u(x,0) = x$, $u(x,1) = x$. Hallar la solución general usando como dato inicial $u(x,1) = h(x)$.*

Solución:

Los coeficientes de la ecuación son $a(x,y,u) = x$, $b(x,y,u) = y$, $c = 1$. Planteamos un problema de valores iniciales más general posible, $x(s,0) = s$, $y(s,0) = 1$, $z(s,0) = h(s)$, de modo que se cumpla la condición de transversalidad,

$$\left| \begin{array}{cc} a & f'(s) \\ b & g'(s) \end{array} \right|_{(f(s),g(s),h(s))} = \left| \begin{array}{cc} s & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right| = -1 \neq 0.$$

Obsérvese que el dato inicial $u(x,0) = h(x)$ no se puede usar, porque daría determinante nulo.

Resolvemos el sistema característico,

$$\dot{x} = x, \qquad \dot{y} = y, \qquad \dot{z} = 1,$$

$$x(s,\tau) = \alpha(s)e^{\tau}, \qquad y(s,\tau) = \beta(s)e^{\tau}, \qquad z(s,\tau) = \tau + \gamma(s),$$

e imponiendo las condiciones iniciales,

$$s = x(s,0) = \alpha(s), \quad 1 = y(s,0) = \beta(s), \quad h(s) = z(s,0) = \gamma(s),$$

obtenemos la solución general en forma paramétrica,

$$x(s,\tau) = se^{\tau}, \qquad y(s,\tau) = e^{\tau}, \qquad z(s,\tau) = \tau + h(s).$$

Podemos eliminar los parámetros s, τ fácilmente,

$$\tau = \ln y, \qquad s = \frac{x}{y},$$

con lo cual la solución general $u(x,y) = z$ es

$$u(x,y) = \ln y + h\left(\frac{x}{y}\right). \ \square$$

Observemos que las proyecciones características satisfacen

$$\dot{x} = x, \qquad \dot{y} = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = Cx,$$

es decir, son rectas que pasan por el origen con cualquier pendiente. Por tanto, no es posible dar el dato inicial ni en el eje X, ni en el eje Y, ni sobre ninguna de estas rectas.

Por tanto, tal como ya se había advertido, el problema con $u(x,0) = x$, $f(s) = s$, $g(s) = 0$, $h(s) = s$, no se puede resolver. Correspondería en forma paramétrica a

$$x(s,\tau) = se^{\tau}, \qquad y(s,\tau) = 0, \qquad z(s,\tau) = \tau + s,$$

que no permite eliminar los dos parámetros, a lo sumo uno,

$$y = 0, \qquad s = xe^{-\tau} = z - \tau.$$

En cambio para el segundo, $u(x,1) = x$,

$$x = u(x,1) = h(x) \Rightarrow h(x) = x \Rightarrow h(x/y) = \frac{x}{y},$$

que conduce a la solución hallada, $u(x,y) = \ln y + x/y$.

Dado que la ecuación es lineal y que sus proyecciones características verifican $y = Kx$, podríamos haber realizado el cambio de variables $U(x,y) = x$, $V(x,y) = y/x$ y reducir la ecuación a

$$u_U = \frac{c}{a} = \frac{1}{x} = \frac{1}{U},$$

ecuación ordinaria cuya solución es

$$u = \ln|U| + F(V),$$

y deshaciendo el cambio,

$$u(x,y) = \ln|x| + F(y/x),$$

tal como habíamos obtenido previamente.

Obsérvese que buscando soluciones que verifiquen $u(x,0) = h(x)$, que sabemos que es un problema mal planteado, obtenemos que

$$h(x) = u(x,0) = \ln|x| + F(0),$$

y, por tanto, si $h(x) = \ln|x| + K$, el problema tiene infinitas soluciones, ya que es válida cualquier función $F(y/x)$ que verifique $F(0) = K$. En cambio, si $h(x)$ no es de esa forma, no habrá solución.

Problema 4.6 *Hallar la solución de la ecuación* $2yuu_x + u_y = 0$ *que satisface* $u(x,0) = h(x)$*. Particularizar para el caso en el que* $u(x,0) = x$*. Hallar la solución que satisface* $u(y^2, y) = 1$.

Solución:

La ecuación es cuasilineal y los coeficientes de la ecuación son $a(x,y,u) = 2yu$, $b = 1$, $c = 0$, todos ellos funciones de clase C^∞.

El dato inicial es $x(s,0) = f(s) = s$, $y(s,0) = g(s) = 0$, $z(s,0) = h(s)$ y cumple la condición de transversalidad,

$$\left| \begin{array}{cc} a & f'(s) \\ b & g'(s) \end{array} \right|_{(f(s),g(s),h(s))} = \left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right| = -1,$$

por lo que tendrá solución única el problema planteado.

Para gráficas de soluciones en la forma $z = u(x,y)$, el sistema característico es

$$\dot{x} = 2yz, \qquad \dot{y} = 1, \qquad \dot{z} = 0,$$

y sus dos últimas ecuaciones se resuelven directamente,

$$z(s,\tau) = \gamma(s), \qquad y(s,\tau) = \tau + \beta(s).$$

y les podemos imponer las condiciones iniciales,

$$h(s) = z(s,0) = \gamma(s), \quad 0 = y(s,0) = \beta(s) \Rightarrow y(s,\tau) = \tau, \quad z(s,\tau) = h(s),$$

y sustituidas en la primera ecuación,

$$\dot{x} = 2\tau h(s) \Rightarrow x(s,\tau) = \tau^2 h(s) + \alpha(s),$$

y como $x(s,0) = s$, obtenemos

$$\alpha(s) = s \Rightarrow x(s,\tau) = \tau^2 h(s) + s.$$

La solución del problema de valores iniciales en forma paramétrica es, pues,

$$x(s,\tau) = \tau^2 h(s) + s, \qquad y(s,\tau) = \tau, \qquad z(s,\tau) = h(s),$$

pero podemos eliminar los parámetros s, τ,

$$\tau = y, \qquad s = x - z\tau^2 = x - zy^2,$$

y obtenemos la solución del problema en forma implícita,

$$u = h(x - uy^2), \ \Box$$

ya que no podemos despejar u sin conocer la forma de h en general. Esta es la solución general del problema, ya que depende de una función arbitraria de las variables.

En el caso de que $h(x) = x$, el problema se simplifica,

$$u = x - uy^2 \Rightarrow u(x,y) = \frac{x}{1+y^2},$$

y podemos despejar el valor de $u(x,y)$. $\square$

El otro problema que se plantea tiene por dato inicial $x(s,0) = f(s) = s^2$, $y(s,0) = g(s) = s$, $z(s,0) = 1$ y no cumple la condición de transversalidad,

$$\begin{vmatrix} a & f'(s) \\ b & g'(s) \end{vmatrix}_{(f(s),g(s),h(s))} = \begin{vmatrix} 2s & 2s \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

por lo que es un problema mal planteado y no podemos predecir si tiene solución única o no.

Como tenemos la solución general, podemos intentarlo, particularizando para el dato inicial $u(y^2,y) = 1$,

$$1 = h(0),$$

lo que no permite determinar la función h, pero indica que cualquier función h que verifique que $h(0) = 1$ proporciona una solución de este problema. Luego tiene infinitas soluciones. $\square$

Por ejemplo, la función $h(x) = x - 1$ proporciona la solución

$$u = x - uy^2 - 1 \Rightarrow u(x,y) = \frac{x-1}{1+y^2}.$$

Una manera rápida de obtener la solución general de la ecuación es plantear el sistema característico,

$$\frac{dx}{2yu} = dy, \qquad du = 0,$$

de cuya segunda ecuación se infiere que $u = C_1$, lo que permite integrar la primera,

$$dx = 2C_1 y\,dy \Rightarrow x - uy^2 = C_2,$$

y reobtener la solución general en forma implícita, eliminando las constantes, $C_1 = h(C_2)$

$$u = h(x - uy^2),$$

con una función h arbitraria.

Problema 4.7 *Hallar la solución de la ecuación* $xuu_x - u_y = 0$ *que satisface* $u(x,0) = h(x)$. *Particularizar para el caso en el que* $u(x,0) = \ln x$. *Hallar la solución que satisface* $u(0,y) = H(y)$.

Solución:

La ecuación es cuasilineal y los coeficientes de la ecuación son $a(x,y,u) = xu$, $b = -1$, $c = 0$, todos ellos funciones de clase C^∞.

El dato inicial es $x(s,0) = f(s) = s$, $y(s,0) = g(s) = 0$, $z(s,0) = h(s)$ y cumple la condición de transversalidad,

$$\begin{vmatrix} a & f'(s) \\ b & g'(s) \end{vmatrix}_{(f(s),g(s),h(s))} = \begin{vmatrix} sh(s) & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

por lo que tendrá solución única el problema planteado.

Para gráficas de soluciones en la forma $z = u(x,y)$, el sistema característico es

$$\dot{x} = xz, \qquad \dot{y} = -1, \qquad \dot{z} = 0,$$

y sus dos últimas ecuaciones se resuelven directamente,

$$z(s,\tau)=\gamma(s), \qquad y(s,\tau)=-\tau+\beta(s).$$

y les podemos imponer las condiciones iniciales,

$$h(s)=z(s,0)=\gamma(s), \quad 0=y(s,0)=\beta(s)\Rightarrow y(s,\tau)=-\tau, \quad z(s,\tau)=h(s),$$

y sustituidas en la primera ecuación,

$$\dot{x}=xh(s)\Rightarrow x(s,\tau)=\alpha(s)e^{h(s)\tau},$$

y como $x(s,0)=s$, obtenemos

$$\alpha(s)=s\Rightarrow x(s,\tau)=se^{h(s)\tau}.$$

La solución del problema de valores iniciales en forma paramétrica es, pues,

$$x(s,\tau)=se^{h(s)\tau}, \qquad y(s,\tau)=-\tau, \qquad z(s,\tau)=h(s),$$

pero podemos eliminar los parámetros s,τ,

$$\tau=-y, \qquad s=xe^{yz},$$

y obtenemos la solución del problema en forma implícita,

$$u=h(xe^{yu}), \ \Box$$

ya que no podemos despejar u sin conocer la forma de h en general. Esta es la solución general del problema, ya que depende de una función arbitraria de las variables.

En el caso de que $h(x)=\ln x$, el problema se simplifica,

$$u=\ln\left(xe^{yu}\right)=\ln x+yu\Rightarrow u(x,y)=\frac{\ln x}{1-y},$$

y podemos despejar el valor de $u(x,y)$. $\Box$

El otro problema que se plantea tiene por dato inicial $x(s,0)=f(s)=0$, $y(s,0)=g(s)=s$, $z(s,0)=H(s)$ y no cumple la condición de transversalidad,

$$\left|\begin{array}{cc} a & f'(s) \\ b & g'(s)\end{array}\right|_{(f(s),g(s),h(s))}=\left|\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -1 & 1\end{array}\right|=0,$$

por lo que es un problema mal planteado y no podemos predecir si tiene solución única o no.

Como tenemos la solución general, podemos intentarlo, particularizando para el dato inicial $u(0,y)=H(y)$,

$$H(y)=h(0)=\text{const.}$$

Por tanto, el problema sólo tiene solución si $H(y)$ es una constante, no habiendo solución en el resto de casos.

En el caso $H(y)=k$ constante, proporciona solución cualquier función h tal que $h(0)=k$, por lo que hay infinitas soluciones. $\Box$

Por ejemplo, si $u(0,y)=1$, la función $h(x)=1$ proporciona una solución

$$u(x,y)=1,$$

y si $h(x)=1+x$, obtenemos otra

$$u=1+xe^{yu},$$

en forma implicita.

Una manera rápida de obtener la solución general de la ecuación es plantear el sistema característico,

$$\frac{dx}{xu}=-dy, \qquad du=0,$$

de cuya segunda ecuación se infiere que $u=C_1$, lo que permite integrar la primera,

$$C_1 y+\ln|x|=c_2 \Rightarrow C_2=\pm e^{c_2}=xe^{yu},$$

y reobtener la solución general en forma implícita, eliminando las constantes, $C_1=h(C_2)$,

$$u=h(xe^{yu}),$$

con una función h arbitraria.

Problema 4.8 *Hallar la solución válida para $t>0$ de la ecuación $u_t+uu_x+\lambda u=0$, que verifica $u(x,0)=x$, siendo $\lambda>0$.*

Solución:

El término λu, como u es una velocidad, es un término de rozamiento que añadimos a la ecuación de Burgers.

Nos están dando el dato inicial a lo largo del eje X, por lo que tomamos como parámetro s la propia coordenada x,

$$x(s,0)=f(s)=s, \quad t(s,0)=g(s)=0, \quad z(s,0)=h(s)=s.$$

Los coeficientes de la ecuación son $a(x,y,u)=u$, $b=1$, $c(x,y,u)=-\lambda u$.

Comprobamos la condición de transversalidad,

$$\left|\begin{array}{cc} a & f'(s) \\ b & g'(s) \end{array}\right|_{(f(s),g(s),h(s))}=\left|\begin{array}{cc} h(s) & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right|=-1\neq 0,$$

y observamos que el problema de valores iniciales tiene solución única para cualquier dato inicial $u(x,0)=h(x)$.

Planteamos el sistema característico,

$$\dot{x}=z, \qquad \dot{t}=1, \qquad \dot{z}=-\lambda z,$$

del cual podemos resolver inmediatamente las dos últimas ecuaciones,

$$t(s,\tau)=\tau+\beta(s), \qquad z(s,\tau)=\gamma(s)e^{-\lambda\tau},$$

e imponerles las condiciones iniciales,

$$0=t(s,0)=\beta(s), \quad s=z(s,0)=\gamma(s)\Rightarrow t(s,\tau)=\tau, \quad z(s,\tau)=se^{-\lambda\tau},$$

y sustituyendo en la primera obtenemos

$$\dot{x} = se^{-\lambda\tau} \Rightarrow x(s,\tau) = -\frac{se^{-\lambda\tau}}{\lambda} + \alpha(s),$$

y la condición inicial nos permite despejar $\alpha(s)$,

$$s = x(s,0) = \alpha(s) - \frac{s}{\lambda} \Rightarrow x(s,\tau) = \frac{s}{\lambda}\left(\lambda + 1 - e^{-\lambda\tau}\right),$$

con lo cual ya tenemos la solución del problema de valores iniciales en forma paramétrica,

$$x(s,\tau) = \frac{s}{\lambda}\left(\lambda + 1 - e^{-\lambda\tau}\right), \quad t(s,\tau) = \tau, \quad z(s,\tau) = se^{-\lambda\tau}.$$

Podemos eliminar los parámetros s, τ,

$$\tau = t, \qquad s = \frac{\lambda x}{\lambda + 1 - e^{-\lambda t}},$$

y obtener la solución en función de las coordenadas, x, t exclusivamente,

$$u(x,t) = \frac{\lambda x}{(\lambda+1)e^{\lambda t} - 1}. \ \square$$

Obsérvese que, para grandes valores de t, la velocidad u tiende a cero, por efecto del rozamiento.

Una manera rápida de obtener la solución general de la ecuación es plantear el sistema característico,

$$dt = \frac{dx}{u} = \frac{du}{-\lambda u}.$$

La segunda ecuación se integra directamente

$$dx = -\frac{du}{\lambda} \Rightarrow u + \lambda x = C_1,$$

y la podemos usar para integrar la primera,

$$dt = \frac{dx}{C_1 - \lambda x} \Rightarrow c_2 - \lambda t = \ln|C_1 - \lambda x|,$$

$$u = C_1 - \lambda x = C_2 e^{-\lambda t},$$

donde $C_2 = \pm e^{c_2}$.

De aquí obtenemos la solución general en forma implícita, eliminando las constantes,

$$u = F(u + \lambda x)e^{-\lambda t},$$

con una función F arbitraria.

Problema 4.9 *Hallar la solución general de la ecuación de Euler $xu_x + yu_y = nu$, siendo $n \neq 0$, usando como dato inicial $u(x,1) = h(x)$. Comprobar que $U(x,y) = x^2 + y^2$ satisface la ecuación. Hallar la solución que verifica $u(x,1) = x$, con $n = 3$.*

Solución:

Esta es la ecuación de Euler para funciones homogéneas de grado n, que son funciones que son suma de monomios de grado n.

En esta ecuación lineal los coeficientes son $a(x,y,u) = x$, $b(x,y,u) = y$, $c(x,y,u) = \lambda u$. Planteamos el problema de valores iniciales más general,

$$u(x,1) = h(x), \text{ es decir, } x(s,0) = s, \; y(s,0) = 1, \; z(s,0) = h(s),$$

que cumple la condición de transversalidad,

$$\left| \begin{array}{cc} a & f'(s) \\ b & g'(s) \end{array} \right|_{(f(s),g(s),h(s))} = \left| \begin{array}{cc} s & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right| = -1 \neq 0.$$

Obsérvese que no podríamos haber dado el dato inicial como $u(x,0) = h(x)$, ya que no se cumpliría la condición de transversalidad.

El sistema característico es

$$\dot{x} = x, \qquad \dot{y} = y, \qquad \dot{z} = nz,$$

cuya solución es inmediata,

$$x(s,\tau) = \alpha(s)e^{\tau}, \qquad y(s,\tau) = \beta(s)e^{\tau}, \qquad z(s,\tau) = \gamma(s)e^{n\tau},$$

y le podemos aplicar las condiciones iniciales,

$$s = x(s,0) = \alpha(s), \qquad 1 = y(s,0) = \beta(s), \qquad h(s) = z(s,0) = \gamma(s),$$

con lo cual la solución general en forma paramétrica es

$$x(s,\tau) = se^{\tau}, \qquad y(s,\tau) = e^{\tau}, \qquad z(s,\tau) = h(s)e^{n\tau},$$

y podemos eliminar los parámetros s, τ,

$$\tau = \ln y, \qquad s = \frac{x}{y},$$

que sustituidos en la expresión de $u(x,y) = z$, nos proporcionan la solución general,

$$u(x,y) = y^n h\left(\frac{x}{y}\right). \; \square$$

Comprobamos que $U(x,y) = x^2 + y^2$ satisface la ecuación,

$$U_x(x,y) = 2x, \quad U_y(x,y) = 2y \Rightarrow xU_x + yU_y = 2U,$$

con lo cual U es una función homogénea de grado dos. $\square$

Podemos encontrar la solución que verifica $u(x,1) = x$ con $n = 3$ a partir de la solución general,

$$x = u(x,1) = h(x) \Rightarrow h(x/y) = \frac{x}{y},$$

con lo cual la solución buscada es $u(x,y) = xy^2$. $\square$

Dado que la ecuación es lineal y que sus proyecciones características verifican

$$\dot{x} = x, \qquad \dot{y} = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = Kx,$$

podríamos haber realizado el cambio de variables $U(x,y) = x$, $V(x,y) = y/x$ y reducir la ecuación a

$$u_U = \frac{c}{a} = \frac{nu}{x} = \frac{nu}{U},$$

ecuación ordinaria cuya solución es

$$\ln|u| = n\ln|U| + f(V) \Rightarrow u = F(V)U^n,$$

denotando $F(V) = \pm e^{f(V)}$.

Deshaciendo el cambio,

$$u(x,y) = F(y/x)x^n,$$

tal como habíamos obtenido previamente.

Obsérvese que el problema mal planteado $u(x,0) = h(x)$ conduce a

$$h(x) = u(x,0) = F(0)x^n,$$

con lo cual, si el dato inicial no es un monomio de grado n, el problema no puede tener solución. En cambio, si $h(x) = Kx^n$, cualquier función $F(y/x)$ tal que $F(0) = K$ proporciona una solución, con lo cual hay infinitas.

Problema 4.10 *Sea la ecuación* $4xu_x + 2yu_y = u$. *Estudiar si el problema* $u(x,1) = h(x)$ *tiene solución única y resolverlo. Particularizar para el caso en el que* $u(x,1) = x$. *Hallar la solución de la ecuación que satisface* $u(y^2,y) = p(y)$.

Solución:

En esta ecuación lineal los coeficientes son $a(x,y,u) = 4x$, $b(x,y,u) = 2y$, $c(x,y,u) = u$. Planteamos el problema de valores iniciales $u(x,1) = h(x)$, es decir, $f(s) = x(s,0) = s$, $g(s) = y(s,0) = 1$, $z(s,0) = h(s)$, que cumple la condición de transversalidad,

$$\left|\begin{array}{cc} a & f'(s) \\ b & g'(s) \end{array}\right|_{(f(s),g(s),h(s))} = \left|\begin{array}{cc} 4s & 1 \\ 2 & 0 \end{array}\right| = -2 \neq 0,$$

por lo que tiene solución única, sea cual sea el dato inicial $h(x)$. $\Box$

El otro problema, $u(y^2,y) = h(y)$, correspondiente a $f(s) = x(s,0) = s^2$, $g(s) = y(s,0) = s$, $z(s,0) = h(s)$, no está bien planteado, ya que no cumple la condición de transversalidad,

$$\left|\begin{array}{cc} a & f'(s) \\ b & g'(s) \end{array}\right|_{(f(s),g(s),h(s))} = \left|\begin{array}{cc} 4s^2 & 2s \\ 2s & 1 \end{array}\right| \equiv 0. \Box$$

El sistema característico es

$$\dot{x} = 4x, \qquad \dot{y} = 2y, \qquad \dot{z} = z,$$

cuya solución es inmediata,

$$x(s,\tau) = \alpha(s)e^{4\tau}, \qquad y(s,\tau) = \beta(s)e^{2\tau}, \qquad z(s,\tau) = \gamma(s)e^{\tau},$$

y le podemos aplicar las condiciones iniciales,

$$s = x(s,0) = \alpha(s), \qquad 1 = y(s,0) = \beta(s), \qquad h(s) = z(s,0) = \gamma(s),$$

con lo cual la solución general en forma paramétrica es

$$x(s,\tau) = se^{4\tau}, \qquad y(s,\tau) = e^{2\tau}, \qquad z(s,\tau) = h(s)e^{\tau},$$

y podemos eliminar los parámetros s, τ,

$$\tau = \frac{1}{2}\ln y, \qquad s = \frac{x}{y^2},$$

que sustituidos en la expresión de $u(x,y) = z(s,\tau)$, nos proporcionan la solución general,

$$u(x,y) = h\left(\frac{x}{y^2}\right)\sqrt{y}. \ \square$$

Podemos encontrar la solución que verifica $u(x,1) = x$ a partir de la solución general,

$$x = u(x,1) = h(x) \Rightarrow h\left(\frac{x}{y^2}\right) = \frac{x}{y^2},$$

con lo cual la solución buscada es $u(x,y) = xy^{-3/2}$. $\square$

Dado que la ecuación es lineal y que sus proyecciones características verifican

$$\dot{x} = 4x, \qquad \dot{y} = 2y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} \Rightarrow x = Ky^2,$$

podríamos haber realizado el cambio de variables $U(x,y) = y$, $V(x,y) = x/y^2$ y reducir la ecuación a

$$u_U = \frac{c}{b} = \frac{u}{2y} = \frac{u}{2U},$$

ecuación ordinaria cuya solución es

$$\ln|u| = \frac{1}{2}\ln|U| + f(V) \Rightarrow u = F(V)U^{1/2},$$

denotando $F(V) = \pm e^{f(V)}$.

Deshaciendo el cambio,

$$u(x,y) = F\left(\frac{x}{y^2}\right)\sqrt{y},$$

tal como habíamos obtenido previamente.

Obsérvese que, si buscamos soluciones del problema $u(y^2,y) = p(y)$, que sabemos que está mal planteado,

$$p(y) = F(1)\sqrt{y},$$

comprobamos que los únicos datos iniciales que tienen solución son de la forma $p(y) = K\sqrt{y}$. Y las soluciones son infinitas, ya que cualquier función $F(y/x)$ que verifique $F(1) = K$ proporciona una solución distinta.

Problema 4.11 *Hallar la solución de la ecuación* $xu_x + yu_y = xy/u$ *que satisface* $u(x,1) = h(x)$*, con* $x, y, u > 0$*. Particularizar para el caso en el que* $u(x,1) = \sqrt{x}$*. Hallar la solución que satisface* $u(x,x) = p(x)$*. Hallar la solución que satisface* $u(0,y) = q(y)$*.*

Solución:

Los coeficientes de la ecuación son $a(x) = x$, $b(y) = y$, $c(x,y,u) = xy/u$, que son funciones de clase C^∞ si $u \neq 0$.

El dato inicial es $x(s,0) = f(s) = s$, $y(s,0) = g(s) = 1$, $z(s,0) = h(s)$ y cumple la condición de transversalidad,

$$\begin{vmatrix} a & f'(s) \\ b & g'(s) \end{vmatrix}_{(f(s),g(s),h(s))} = \begin{vmatrix} s & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

por lo que tendrá solución única.

El sistema característico es

$$\dot{x} = x, \qquad \dot{y} = y, \qquad \dot{z} = \frac{xy}{z},$$

y sus dos primeras ecuaciones se resuelven sucesivamente,

$$x(s,\tau) = \alpha(s)e^\tau, \qquad y(s,\tau) = \beta(s)e^\tau,$$

y les podemos imponer las condiciones iniciales,

$$s = x(s,0) = \alpha(s), \quad 1 = y(s,0) = \beta(s) \Rightarrow x(s,\tau) = se^\tau, \quad y(s,\tau) = e^\tau,$$

y sustituidas en la tercera ecuación,

$$\dot{z} = \frac{se^{2\tau}}{z} \Rightarrow z^2(s,\tau) = se^{2\tau} + \gamma(s),$$

y como $z(s,0) = h(s)$, obtenemos

$$h^2(s) = z^2(s,0) = s + \gamma(s) \Rightarrow \gamma(s) = h^2(s) - s \Rightarrow z(s,\tau) = \sqrt{s(e^{2\tau} - 1) + h^2(s)}.$$

La solución del problema de valores iniciales en forma paramétrica es, pues,

$$x(s,\tau) = se^\tau, \qquad y(s,\tau) = e^\tau, \qquad z(s,\tau) = \sqrt{s(e^{2\tau} - 1) + h^2(s)},$$

pero podemos eliminar los parámetros s, τ,

$$\tau = \ln y, \qquad s = \frac{x}{y},$$

y obtenemos la solución general del problema, ya que depende de una función arbitraria de las variables,

$$u(x,y) = \sqrt{xy - \frac{x}{y} + h^2\left(\frac{x}{y}\right)}. \ \square$$

En el caso en el que $h(x) = \sqrt{x}$ la solución del problema de Cauchy es, sustituyendo,

$$u(x,y) = \sqrt{xy}. \ \square$$

Otra manera rápida de obtener la solución general de la ecuación es plantear el sistema característico,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{u\,du}{xy},$$

de cuya primera ecuación se infiere que $x/y = C_1$, lo que permite integrar la segunda,

$$C_1 y\,dy = u\,du \Rightarrow u^2 = C_1 y^2 + C_2 = xy + C_2,$$

y tomando $C_2 = H(C_1)$ recuperamos

$$u^2 = xy + H(x/y),$$

con una función H arbitraria, que está relacionada con la otra forma de la solución general mediante $H(x/y) = h^2(x/y) - x/y$.

Si el dato inicial es $u(x,x) = p(x)$, es decir, $x(s,0) = f(s) = s$, $y(s,0) = g(s) = s$, $z(s,0) = p(s)$, no cumple la condición de transversalidad,

$$\left|\begin{array}{cc} a & f'(s) \\ b & g'(s) \end{array}\right|_{(f(s),g(s),h(s))} = \left|\begin{array}{cc} s & s \\ 1 & 1 \end{array}\right| = 0,$$

luego el problema no está bien planteado.

Fijémosnos en el que el dato inicial de la forma $u(x,x) = p(x)$ impone

$$p(x) = \sqrt{x^2 - 1 + h^2(1)}.$$

Es decir, que $p(x)$ no puede ser cualquier función, o no habrá solución del problema. Sólo hay solución si $p(x) = \sqrt{x^2 + k}$. Y en este caso, cualquier función $h(x)$ tal que $h^2(1) = k + 1$ nos proporciona una solución distinta. $\square$.

Si el dato inicial es $u(0,y) = q(y)$, es decir, $x(s,0) = f(s) = 0$, $y(s,0) = g(s) = s$, $z(s,0) = q(s)$, no cumple la condición de transversalidad,

$$\left|\begin{array}{cc} a & 0 \\ b & g'(s) \end{array}\right|_{(f(s),g(s),h(s))} = \left|\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ s & 1 \end{array}\right| = 0,$$

luego el problema no está bien planteado.

Fijémosnos en el que el dato inicial de la forma $u(0,y) = q(y)$ impone

$$q(y) = \sqrt{h^2(0)}.$$

Es decir, que $p(x)$ no puede ser cualquier función, o no habrá solución del problema. Sólo hay solución si $q(x) = k$. Y en este caso, cualquier función $h(x)$ tal que $h^2(0) = k$ nos proporciona una solución distinta. $\square$.

Problema 4.12 *Hallar la solución general de la ecuación de las superficies de revolución, $xz_y - yz_x = 0$, usando como dato inicial $u(x,0) = h(x)$. Hallar la superficie de revolución que verifica $z(x,1) = x$.*

Solución:

Los coeficientes de la ecuación son $a(x,y,z) = -y$, $b(x,y,z) = x$, $c = 0$. Para el caso más general del problema de valores iniciales, $z(x,0) = h(x)$, es decir,

$x(s,0)=s$, $y(s,0)=0$, $z(s,0)=h(s)$, se tendría que verificar la condición de transversalidad,

$$\left|\begin{array}{cc} a & f'(s) \\ b & g'(s) \end{array}\right|_{(f(s),g(s),h(s))} = \left|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ s & 0 \end{array}\right| = -s,$$

lo cual es cierto siempre que el dato inicial no incluya al punto $(0,0)$.

El sistema característico es

$$\dot{x} = -y, \qquad \dot{y} = x, \qquad \dot{z} = 0,$$

y tiene por solución

$$x(s,\tau) = -\alpha(s)\sin t + \beta(s)\cos t,\ y(s,\tau) = \alpha(s)\cos t + \beta(s)\sin t,\ z(s,\tau) = \gamma(s),$$

a la que aplicamos las condiciones iniciales,

$$s = x(s,0) = \beta(s),\ 0 = y(s,0) = \alpha(s),\ h(s) = z(s,0) = \gamma(s),$$

con lo cual la solución general de la ecuación en forma paramétrica es

$$x(s,\tau) = s\cos t,\ y(s,\tau) = s\sin t,\ z(s,\tau) = h(s),$$

y podemos eliminar los parámetros s,τ, ya que, como

$$x^2+y^2 = s^2, \qquad z(s) = h(s),$$

tanto x^2+y^2 como z son funciones de una misma variable s, con lo cual podemos escribir la solución general como

$$z = h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = F\left(x^2+y^2\right),$$

como corresponde a las superficies de revolución. □

Hubiera sido mucho más sencillo dividir la ecuación por xy para resolver la equivalente $z_y/y - z_x/x = 0$, con $\tilde{a}(x,y,z) = -1/x$, $\tilde{b}(x,y,z) = 1/y$, $\tilde{c} = 0$.

Resolvemos el problema de valores iniciales, cuyo dato inicial podemos parametrizar con $f(s) = s$, $g(s) = 1$, $z(s) = s$,

$$x(s,\tau) = -\sin t + s\cos t, \quad y(s,\tau) = \cos t + s\sin t, \quad z(s,t) = s,$$

de donde podemos eliminar s,τ,

$$s = z, \quad x = -\sin t + z\cos t, \quad y = \cos t + z\sin t,$$

por ejemplo, elevando al cuadrado las últimas ecuaciones y sumándolas,

$$x^2+y^2 = z^2+1 \Rightarrow x^2+y^2-z^2 = 1,$$

que es la ecuación de un hiperboloide de una hoja. □

Más corto, podemos usar la solución general con la condición $z(x,1) = x$,

$$F(x^2+1) = z(x,1) = x = \sqrt{(x^2+1)-1} \Rightarrow F(x^2+y^2) = \sqrt{x^2+y^2-1},$$

de donde concluimos que $z = \sqrt{x^2+y^2-1}$.

Dado que la ecuación es lineal y que sus proyecciones características verifican

$$\dot{x} = -y, \qquad \dot{y} = x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow x^2 + y^2 = K,$$

podríamos haber realizado el cambio de variables $U(x,y) = x$, $V(x,y) = x^2 + y^2$ y reducir la ecuación a

$$z_U = \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow z = F(V).$$

Deshaciendo el cambio,

$$z(x,y) = F\left(x^2 + y^2\right),$$

tal como habíamos obtenido previamente.

Problema 4.13 *Hallar la solución general de la ecuación* $a(u)u_x - b(u)u_y = 0$*, usando como dato inicial* $u(x,0) = h(x)$*.*

Solución:

Resolvemos el problema de valores iniciales más general, $x(s,0) = f(s)$, $y(s,0) = g(s)$, $z(s,0) = h(s)$, de modo que se cumpla la condición de transversalidad,

$$0 \neq \begin{vmatrix} a\,(h(s)) & f'(s) \\ -b\,(h(s)) & g'(s) \end{vmatrix}.$$

El sistema característico es

$$\dot{x} = a(z), \qquad \dot{y} = -b(z), \qquad \dot{z} = 0,$$

del cual podemos resolver la última ecuación, con la condición inicial $z(s,0) = h(s)$,

$$z(s,\tau) = \gamma(s), \quad h(s) = z(s,0) = \gamma(s) \Rightarrow z(s,\tau) = h(s),$$

que podemos emplear para resolver las otras ecuaciones,

$$\dot{x} = A(s), \quad \dot{y} = -B(s) \Rightarrow x(s,\tau) = A(s)\tau + \alpha(s), \quad y(s,\tau) = -B(s)\tau + \beta(s),$$

denotando $A(s) := a\big(h(s)\big)$, $B(s) := b\big(h(s)\big)$.

Usamos las condiciones iniciales,

$$f(s) = x(s,0) = \alpha(s), \qquad g(s) = y(s,0) = \beta(s),$$

y ya tenemos la solución del problema de valores iniciales más general en forma paramétrica,

$$x(s,\tau) = A(s)\tau + f(s), \quad y(s,\tau) = -B(s)\tau + g(s), \quad z(s,\tau) = h(s),$$

lo que equivale a la solución general de la ecuación.

Una manera rápida de obtener la solución general de la ecuación es plantear el sistema característico,

$$\frac{dx}{a(u)} = \frac{dy}{-b(u)}, \qquad du = 0,$$

de cuya segunda ecuación se infiere que $u = C_1$, lo que permite integrar la primera,

$$b(u)x + a(u)y = C_2,$$

y obtener la solución general en forma implícita como

$$u = F(b(u)x + a(u)y),$$

con una función F arbitraria.

Problema 4.14 *Hallar la solución general de la ecuación $xy(z_x - z_y) = (x - y)z$, usando como dato inicial $u(x,0) = h(x)$. Hallar la ecuación de la superficie que contiene a la hipérbola $x^2 = y^2 + z^2$, $z = 1$ y que la satisface.*

Solución:

El dato inicial más general lo podemos parametrizar como $x(s,0) = f(s)$, $y(s,0) = g(s)$, $z(s,0) = h(s)$. La ecuación es lineal y la reescribimos como

$$z_x - z_y = \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) z,$$

y tiene coeficientes $a = 1$, $b = -1$, $c(x,y,z) = (y^{-1} - x^{-1})z$. Por tanto, el sistema característico es

$$x' = 1, \quad y' = -1, \quad z' = \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) z,$$

del cual se resuelven inmediatamente las dos primeras ecuaciones,

$$x(s,\tau) = \tau + \alpha(s), \qquad y(s,\tau) = -\tau + \beta(s),$$

con las correspondientes condiciones iniciales,

$$f(s) = x(s,0) = \alpha(s), \qquad g(s) = y(s,0) = \beta(s),$$

$$x(s,\tau) = \tau + f(s), \qquad y(s,\tau) = -\tau + g(s),$$

que nos permiten resolver la tercera ecuación,

$$\frac{\dot{z}}{z} = -\frac{1}{\tau + f(s)} - \frac{1}{\tau - g(s)} \Rightarrow \ln|z| = -\ln|\tau + f(s)| - \ln|\tau - g(s)| + \gamma(s),$$

$$z(s,\tau) = \frac{\delta(s)}{(\tau + f(s))(\tau - g(s))},$$

tomando $\delta(s) = \pm e^{\gamma(s)}$. La condición inicial nos permite identificar la función libre,

$$h(s) = z(s,0) = -\frac{\delta(s)}{f(s)g(s)} \Rightarrow \delta(s) = -f(s)g(s)h(s),$$

y ya tenemos resuelto el problema en forma paramétrica,

$$x(s,\tau) = \tau + f(s), \quad y(s,\tau) = -\tau + g(s), \quad z(s,\tau) = \frac{f(s)g(s)h(s)}{(\tau + f(s))(g(s) - \tau)}.$$

Los parámetros s, τ se pueden eliminar para expresar la solución en función de x, y exclusivamente,

$$\tau + f(s) = x, \quad g(s) - \tau = y, \quad x + y = f(s) + g(s),$$

con lo cual s es una función de $x + y$ y, por tanto, podemos escribir

$$z(x,y) = \frac{F(x+y)}{xy}. \ \square$$

El dato inicial es la curva de ecuaciones $x^2 - y^2 = 1$, $z = 1$, que podemos parametrizar con funciones hiperbólicas, ya que $\cosh^2 s - \sinh^2 s = 1$. Por tanto, el dato inicial es

$$x(s,0) = \cosh s, \quad y(s,0) = \sinh s, \quad z = 1 \Rightarrow x(s,0) + y(s,0) = e^s,$$

$$x(s,0)y(s,0) = \frac{\sinh 2s}{2}$$

y sustituyéndolo en la solución general,

$$F(e^s) = F\big(x(s,0) + y(s,0)\big) = x(s,0)y(s,0) = \frac{(e^s)^2 - 1/(e^s)^2}{4},$$

$$F(x+y) = \frac{(x+y)^2 - \dfrac{1}{(x+y)^2}}{4},$$

y la solución del problema de valores iniciales es

$$z(x,y) = \frac{1}{4xy}\left((x+y)^2 - \frac{1}{(x+y)^2}\right). \ \square$$

Dado que la ecuación es lineal y que sus proyecciones características verifican

$$\dot{x} = 1, \qquad \dot{y} = -1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1 \Rightarrow y + x = K,$$

podríamos haber realizado el cambio de variables $U(x,y) = x$, $V(x,y) = x + y$ y reducir la ecuación a

$$z_U = \frac{c}{a} = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{z}{V-U} - \frac{z}{U},$$

ecuación ordinaria cuya solución es

$$\ln|z| = -\ln|U - V| - \ln|U] + H(V) \Rightarrow z = \frac{h(V)}{(U-V)U},$$

denotando $h(V) = \pm e^{H(V)}$.

Deshaciendo el cambio,

$$z(x,y) = \frac{h(x+y)}{xy},$$

tal como habíamos obtenido previamente.