Capítulo 5

Ecuaciones de segundo orden

Problema 5.1 *Expresar la ecuación* $u_{xx}+u_{yy}/x^2+u_x/x=0$ *en forma normal. Tomar* $x>0$.

Solución:

Los coeficientes de la ecuación son $a=1$, $b=0$, $c(x,y)=1/x^2$, con lo cual la ecuación de las características es

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}=\pm\frac{i}{x},$$

con lo cual la ecuación es elíptica.

La ecuación tiene dos familias de características complejas,

$$K=\ln x\pm iy,$$

con lo cual el cambio de variable que la lleva a la forma normal es

$$U(x,y)=\ln x,\qquad V(x,y)=y,$$

que se invierte fácilmente, ya que

$$x(U,V)=e^U,\qquad y(U,V)=V.$$

Calculamos las derivadas primeras por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}&=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial}{\partial U}+\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial}{\partial V}=\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial U}=e^{-U}\frac{\partial}{\partial U},\\ \frac{\partial}{\partial y}&=\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial}{\partial U}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial}{\partial V}=\frac{\partial}{\partial V},\end{aligned}$$

y, en particular,

$$u_x=e^{-U}u_U,\qquad u_y=u_V.$$

Calculamos las derivadas segundas,

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = e^{-U}\frac{\partial(e^{-U}u_U)}{\partial U} = e^{-2U}(u_{UU}-u_U), \\ u_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_V}{\partial V} = u_{VV}. \end{aligned}$$

Por tanto, sustituyendo u_{xx}, u_{yy}, x en la ecuación,

$$0 = u_{xx} + \frac{u_{yy}}{x^2} + \frac{u_x}{x} = e^{-2U}\left(u_{UU}+u_{VV}\right),$$

obtenemos la forma normal de dicha ecuación, que no es otra que la ecuación de Laplace,

$$u_{UU} + u_{VV} = 0. \ \square$$

Obsérvese que si, en lugar de la constante K, hubiésemos usado

$$\tilde{K} = e^K = xe^{\pm iy} = x\cos y + ix\sin y,$$

habríamos usado las coordenadas polares,

$$U(x,y) = x\cos y, \qquad V(x,y) = x\sin y,$$

ya que la ecuación no es otra que la ecuación de Laplace en coordenadas polares.

Problema 5.2 *Expresar la ecuación de Tricomi, $u_{yy} - yu_{xx} = 0$, en forma normal.*

Solución:

Los coeficientes de la ecuación son $a(x,y) = -y$, $b = 0$, $c = 1$, con lo cual la ecuación de las características es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \pm\frac{1}{\sqrt{y}},$$

con lo cual la ecuación es elíptica para $y < 0$ e hiperbólica para $y > 0$.

Para $y > 0$, la ecuación tiene dos familias de características,

$$K = x \pm \frac{2}{3}y^{3/2},$$

con lo cual el cambio de variable que la lleva a la forma normal es

$$U(x,y) = x + \frac{2}{3}y^{3/2}, \qquad V(x,y) = x - \frac{2}{3}y^{3/2},$$

que se invierte fácilmente, ya que

$$x(U,V) = \frac{U+V}{2}, \qquad y(U,V) = \left(\frac{3}{4}(U-V)\right)^{2/3}.$$

Calculamos las derivadas primeras por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial}{\partial V}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial}{\partial V} = \sqrt{y}\frac{\partial}{\partial U} - \sqrt{y}\frac{\partial}{\partial V}, \end{aligned}$$

y, en particular,

$$u_x = u_U + u_V, \qquad u_y = \sqrt{y}u_U - \sqrt{y}u_V.$$

Para la ecuación de Tricomi necesitamos las derivadas segundas,

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial}{\partial V}\right)(u_U + u_V) = u_{UU} + 2u_{UV} + u_{VV}, \\
u_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{y}u_U - \sqrt{y}u_V\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{y}}(u_U - u_V) + y\left(\frac{\partial}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial V}\right)(u_U - u_V) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{y}}(u_U - u_V) + y\left(u_{UU} - 2u_{UV} + u_{VV}\right).
\end{aligned}$$

Por tanto, sustituyendo u_{xx}, u_{yy}, y en la ecuación de Tricomi,

$$0 = u_{yy} - yu_{xx} = -4yu_{UV} + \frac{1}{2\sqrt{y}}(u_U - u_V) \Rightarrow u_{UV} = \frac{1}{8y^{3/2}}(u_U - u_V),$$

obtenemos la forma normal de dicha ecuación, en su forma hiperbólica,

$$u_{UV} = \frac{1}{6(U-V)}(u_U - u_V). \ \square$$

En cambio, para $y < 0$, la ecuación tiene dos familias de características complejas. Para no arrastrar el signo negativo, realizamos el cambio $y = -s$,

$$u_{ss} + su_{xx} = 0,$$

cuyas características satisfacen

$$\frac{ds}{dx} = \pm\frac{\sqrt{-s}}{s} \Rightarrow x \pm i\frac{2}{3}s^{3/2} = K.$$

con lo cual el cambio de variable que la lleva a la forma normal es

$$U(x,s) = x, \qquad V(x,s) = \frac{2}{3}s^{3/2},$$

que se invierte fácilmente, ya que

$$x(U,V) = U, \qquad s(U,V) = \left(\frac{3}{2}V\right)^{2/3}.$$

Calculamos las derivadas primeras por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial U}, \\
\frac{\partial}{\partial s} &= \frac{\partial U}{\partial s}\frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial V}{\partial s}\frac{\partial}{\partial V} = \sqrt{s}\frac{\partial}{\partial V},
\end{aligned}$$

y, en particular,

$$u_x = u_U, \qquad u_s = \sqrt{s}u_V.$$

Para la ecuación de Tricomi necesitamos las derivadas segundas,

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = u_{UU}, \\ u_{ss} &= \frac{\partial u_s}{\partial s} = \frac{\partial\,(\sqrt{s}u_V)}{\partial s} = \frac{u_V}{2\sqrt{s}} + s u_{VV}. \end{aligned}$$

Por tanto, sustituyendo u_{xx}, u_{ss}, s en la ecuación de Tricomi,

$$0 = u_{ss} + s u_{xx} = s(u_{UU} + u_{VV}) + \frac{u_V}{2\sqrt{s}} \Rightarrow u_{UU} + u_{VV} = -\frac{u_V}{2s^{3/2}},$$

obtenemos la forma normal de dicha ecuación, en su forma elíptica,

$$u_{UU} + u_{VV} = -\frac{u_V}{3V}. \ \square$$

Problema 5.3 *Expresar en forma normal la ecuación* $u_{xx} - u_{xy} = 0$ *y obtener su solución general.*

Solución:

Esta ecuación tiene coeficientes $a = 1$, $b = -1/2$, $c = 0$, por lo que la ecuación de las características es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = 0, -1,$$

con lo cual la ecuación es hiperbólica.

Las características son dos familias de rectas,

$$y = y_0, \qquad y = x_0 - x,$$

y podemos hacer el cambio de variable

$$U(x, y) = x + y, \qquad V(x, y) = y,$$

para reducir la ecuación a su forma normal.

Calculamos las derivadas primeras por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial U}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial}{\partial V}, \end{aligned}$$

y, en particular,

$$u_x = u_U, \qquad u_y = u_U + u_V.$$

Necesitamos las derivadas segundas,

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_U}{\partial U} = u_{UU}, \\ u_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial}{\partial V}\right) u_U = u_{UU} + u_{UV}. \end{aligned}$$

Por tanto, sustituyendo u_{xx}, u_{xy} en la ecuación,

$$0 = u_{xx} - u_{xy} = -u_{UV} \Rightarrow u_{UV} = 0$$

es la forma normal de dicha ecuación.

La solución general de esta ecuación es

$$u = G(U) + H(V) = G(x+y) + H(y),$$

deshaciendo el cambio de variable. □

Problema 5.4 *Reducir a forma normal y hallar la solución general de* $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$.

Solución:

Esta ecuación tiene coeficientes $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, por lo que la ecuación de las características es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = -1,$$

con lo cual la ecuación es parabólica.

Las características forman una familia de rectas,

$$x + y = K,$$

y podemos hacer el cambio de variable

$$U(x,y) = x, \qquad V(x,y) = x + y,$$

para reducir la ecuación a su forma normal.

Calculamos las derivadas primeras por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial}{\partial V}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V}, \end{aligned}$$

y, en particular,

$$u_x = u_U + u_V, \qquad u_y = u_V.$$

Necesitamos las derivadas segundas,

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial}{\partial V}\right)(u_U + u_V) = u_{UU} + 2u_{UV} + u_{VV}, \\ u_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_V}{\partial V} = u_{VV}, \\ u_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial (u_U + u_V)}{\partial V} = u_{UV} + u_{VV}. \end{aligned}$$

Por tanto, sustituyendo u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} en la ecuación,

$$0 = u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = u_{UU} \Rightarrow u_{UU} = 0$$

es la forma normal de dicha ecuación.

La solución general de esta ecuación es

$$u = UG(V) + H(V) = xG(x+y) + H(x+y),$$

deshaciendo el cambio de variable. □

Problema 5.5 *Hallar la solución de la ecuación* $u_{tt} - u_{xx} = 0$*,* $t > 0$*, con datos iniciales* $u(x,0) = 0$ *para* $x < 0$*,* $u(x,0) = \sin \pi x$ *para* $x \in [0,1]$*, y* $u(x,0) = 0$ *para* $x > 1$*, mientras que* $u_t(x,0) = 0$*, para todo* x*.*

Solución:

El dato inicial es una onda sinusoidal concentrada en el intervalo $[0,1]$, sin velocidad inicial. Por la fórmula de D'Alembert, la solución del problema de valores iniciales es

$$u(x,t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}, \qquad f(s) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty,0) \cup (1,\infty) \\ \sin \pi x & x \in [0,1] \end{cases} .$$

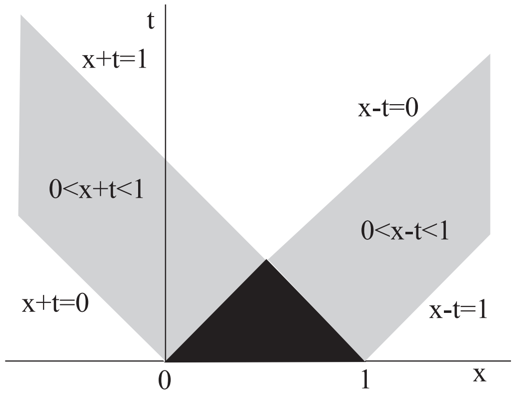

Figura 5.1: Dominios de dependencia del intervalo $[0,1]$

Claramente, la solución son dos ondas sinusoidales, una propagándose hacia la izquierda, otra hacia la derecha, de acuerdo con los dominios de dependencia de la figura 5.1. En la zona negra se superponen las dos ondas y en las grises las ondas ya están separadas. En las zonas blancas no hay ondas y la cuerda está en reposo.

En la zona negra, tanto $x - t$ como $x + t$ están en el intervalo $[0,1]$. Por tanto, en esta zona,

$$u(x,t) = \frac{\sin \pi(x-t) + \sin \pi(x+t)}{2} = \sin \pi x \cos \pi t.$$

En la zona gris de la derecha, sólo $x - t$ está en el intervalo $[0,1]$, Por tanto,

$$u(x,t) = \frac{\sin \pi(x-t)}{2}.$$

En la zona gris de la izquierda, sólo $x+t$ está en el intervalo $[0,1]$, Por tanto,

$$u(x,t) = \frac{\sin \pi(x+t)}{2}. \ \square$$

Problema 5.6 *Sea $u(x,t)$ una función que verifica la ecuación $u_{tt} - u_{xx} = 0$, $t > 0$, $0 < x < L$, con condiciones iniciales $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 1$ y condiciones de contorno de extremos fijos, $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$. Calcular $u(x, 2L/3)$.*

Solución:

Resolvemos el problema por zonas. En la zona I podemos aplicar la fórmula de D'Alembert,

$$u_I(x,t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\, ds = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} ds = t.$$

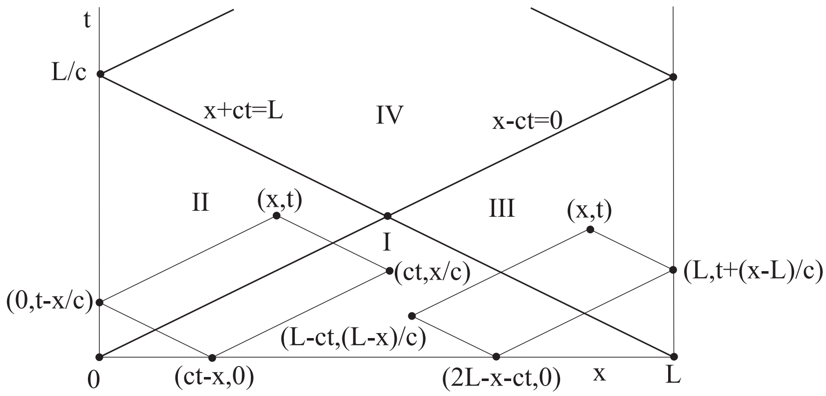

Figura 5.2: Zonas de la solución de la ecuación

En la zona II podemos aplicar la ley del paralelogramo, apoyándonos, por ejemplo, en las rectas $x = 0$, $t = 0$,

$$u_{II}(x,t) = u(0, t-x) + u_I(t,x) - u(t-x, 0) = x.$$

En la zona III podemos aplicar la ley del paralelogramo, apoyándonos, por ejemplo, en las rectas $x = L$, $t = 0$,

$$u_{III}(x,t) = u(L, t+x-L) + u_I(L-t, L-x) - u(2L-x-t, 0) = L - x.$$

En la mitad inferior de la zona IV podemos aplicar la ley del paralelogramo, apoyándonos, por ejemplo, en las rectas $x = 0$, $t = 0$,

$$u_{IV}(x,t) = u(0, t-x) + u_{III}(t,x) - u(t-x, 0) = L - t.$$

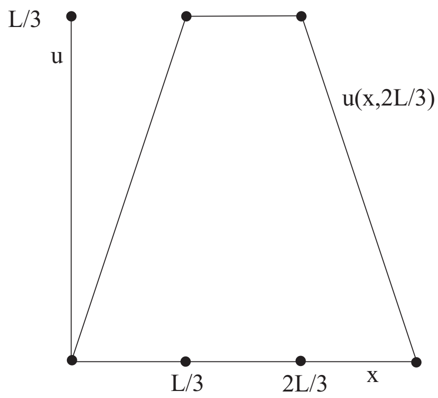

Figura 5.3: Gráfica de $u(x, 2L/3)$

Restringiéndonos al valor $t = 2L/3$, recta que cruza las zonas II, IV y III,

$$u(x, 2L/3) = \begin{cases} x & x \in [0, L/3] \\ L/3 & x \in [L/3, 2L/3] \\ L - x & x \in [2L/3, L] \end{cases} \quad \square$$

Problema 5.7 *Considérese $u(x,t)$, que satisface $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ en $t > 0$ y $-a < x < a$. Sea $u(x,0) = 0$ y $u_t(x,0) = \frac{c}{a}\sin\frac{2\pi x}{a}$, ambas en $|x| < a$, y $u(-a,t) = u(a,t) = 0$. Dar la solución $u(x,t)$ para $|x| < a$ y $0 < t < 2a/c$. En particular, dar $u(x, 2a/c)$.*

Solución:

Este problema se puede abordar delimitando las zonas de influencia o por desarrollos de Fourier. Dado que el dato inicial ya está expresado en serie de senos, esta opción parece natural. El problema es que conocemos la solución para $x \in [0, L]$, no para $x \in [-a, a]$ como pide el enunciado. Tomando $L = 2a$, la cuerda mantiene su longitud y mediante el cambio de variable

$$x = y - \frac{L}{2} \Rightarrow x(0) = -a, \quad x(L) = a,$$

expresamos el problema en su forma habitual,

$$f(y) = u(y,0) = 0, \qquad g(y) = u_t(y,0) = \frac{2c}{L}\sin\frac{4\pi y}{L}, \qquad u(0,t) = 0 = u(L,t),$$

Sabemos que la solución del problema para $f(y)$, $g(y)$ se expresa como

$$u(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(f_n\cos\frac{n\pi ct}{L} + \frac{L}{n\pi c}g_n\sin\frac{n\pi ct}{L}\right)\sin\frac{n\pi y}{L},$$

si el dato inicial se puede desarrollar en serie de senos,

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\frac{n\pi y}{L}, \quad g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\frac{n\pi y}{L}.$$

En nuestro caso,

$$0=\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\frac{n\pi y}{L}, \qquad \frac{2c}{L}\sin\frac{4\pi y}{L}=\sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\frac{n\pi y}{L},$$

y como el desarrollo de Fourier es único para cada función, podemos leer los coeficientes,

$$f_n=0,\ n\in\mathbb{N}, \qquad g_4=\frac{2c}{L}, \quad g_n=0,\ 4\neq n\in\mathbb{N},$$

y escribir la solución del problema directamente,

$$u(y,t)=\frac{1}{2\pi}\sin\frac{4\pi ct}{L}\sin\frac{4\pi y}{L}\Rightarrow u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi ct}{a}\sin\frac{2\pi x}{a},$$

deshaciendo el cambio de variable. En particular $u(x,2a/c)=0$. □

Este último resultado es obvio, ya que, de acuerdo con la figura 5.6, aplicando la ley del paralelogramo,

$$u\left(x,\frac{2a}{c}\right)=u\left(-a,\frac{a-x}{c}\right)+u\left(a,\frac{x+a}{c}\right)-u(-x,0)=0.$$

La manera más larga de resolver el problema y llegar al mismo resultado es subdividirlo en zonas, de acuerdo con la figura 5.4:

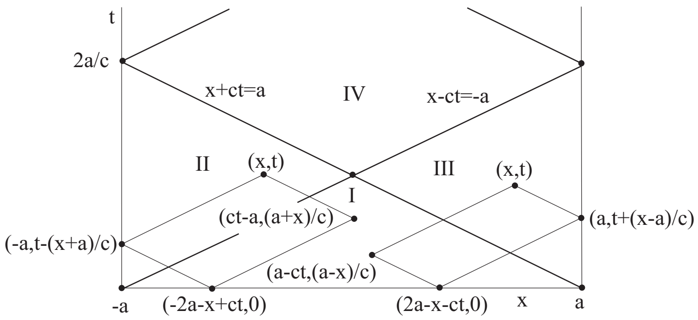

Figura 5.4: Zonas de la solución de la ecuación

- Zona I: Aplicamos la fórmula de D'Alembert,

$$\begin{aligned} u_I(x,t) &= \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds=\frac{1}{2a}\int_{x-ct}^{x+ct}\sin\frac{2\pi}{a}s\,ds \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(\cos\frac{2\pi(x-ct)}{a}-\cos\frac{2\pi(x+ct)}{a}\right)=\frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi ct}{a}\sin\frac{2\pi x}{a}. \end{aligned}$$

- Zona II: Aplicamos la ley del paralelogramo, apoyándonos en $x=-a$, $t=0$ y en la zona I:

$$\begin{aligned} u_{II}(x,t) &= u_I\left(ct-a,\frac{a+x}{c}\right)+u\left(-a,t-\frac{x+a}{c}\right)-u\left(ct-2a-x,0\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi(a+x)}{a}\sin\frac{2\pi(ct-a)}{a}=\frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi ct}{a}. \end{aligned}$$

- Zona III: Aplicamos la ley del paralelogramo, apoyándonos en $x = a$, $t = 0$ y en la zona I:

$$\begin{aligned} u_{III}(x,t) &= u_I\left(a - ct, \frac{a-x}{c}\right) + u\left(a, t + \frac{x-a}{c}\right) - u\left(2a - x - ct, 0\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi(a-x)}{a}\sin\frac{2\pi(a-ct)}{a} = \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi ct}{a}. \end{aligned}$$

- Zona IV: Para su mitad inferior, aplicamos la ley del paralelogramo, apoyándonos en $x = a$, $t = 0$ y en la zona II y obtenemos el mismo resultado que en el resto de zonas.

Problema 5.8 *Sea $u = u(x,t)$ una función que satisface la ecuación de ondas de modo que $u(x,0) = 0$ para $x \leq 0$, $u(x,0) = 1$ para $x > 0$ y $u_t(x,0) = 1$ para $x \leq 0$ y $u_t(x,0) = 0$ para $x > 0$. Hallar dicha función $u(x,t)$.*

Solución:

Aplicamos la fórmula de D'Alembert para la cuerda vibrante infinita con $f(x) = \theta(x)$, $g(x) = \theta(-x)$,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds \\ &= \frac{\theta(x+ct) + \theta(x-ct)}{2} + \frac{2ct - |x+ct| + |x-ct|}{4c}, \quad \square \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que

$$\int \theta(-x)\,dx = \frac{x - |x|}{2}.$$

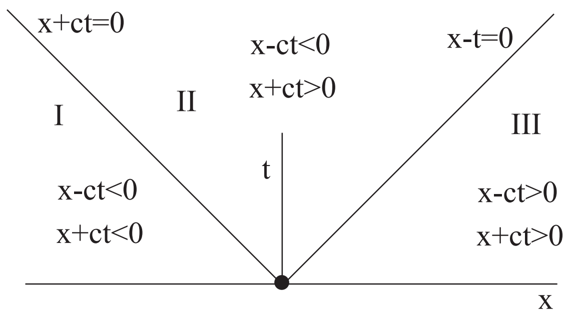

Figura 5.5: Regiones de influencia de $f(x) = \theta(x)$ y $g(x) = \theta(-x)$

Lo más cómodo es delimitar las zonas en las que influye cada dato. El dato inicial presenta una discontinuidad en $(0,0)$, que se propaga a lo largo de las características $x - t = 0$, $x + t = 0$, separando tres regiones distintas:

En la región I de la figura 5.5 ($x - ct < 0$, $x + ct < 0$) influye el dato inicial en $x < 0$, pero no el de $x > 0$. En la región III ($x - ct > 0$, $x + ct > 0$), por contra, influye el dato en $x > 0$, pero no el de $x < 0$. En la región II ($x - ct < 0$, $x + ct > 0$) influyen ambos. Por tanto:

$$u_I(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} ds = t,$$

$$u_{II}(x,t) = \frac{f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{0} ds = \frac{1}{2} + \frac{ct-x}{2c},$$

$$u_{III}(x,t) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} = 1. \ \Box$$

Problema 5.9 *La función $u(x,t)$ satisface la ecuación de ondas para $x \in (0,L)$, $t > 0$, con condiciones iniciales $u(x,0) = 0 = u_t(x,0)$ y condiciones de contorno $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = u_0 \sin \omega t$, siendo u_0, ω constantes. Hallar u en el rectángulo $(0,L) \times (0,L/c)$.*

Solución:

En este problema el único dato no trivial es el del extremo $x = L$, que está sometido a una oscilación sinusoidal. Por tanto, la función $u(x,t)$ es no nula tan sólo en las regiones donde influye la recta $x = L$, es decir, las regiones III y IV de la figura 5.2. Usando la ley del paralelogramo,

$$u_I(x,t) = 0 = u_{II}(x,t),$$

y en la zona III y en la mitad inferior de la zona IV,

$$\begin{aligned} u_{III}(x,t) &= u\left(L, t + \frac{x-L}{c}\right) + u\left(L - ct, \frac{L-x}{c}\right) - u(2L - x - ct, 0) \\ &= u_0 \sin\omega\left(t + \frac{x-L}{c}\right) = u_{IV}(x,t). \ \Box \end{aligned}$$

Problema 5.10 *Sea $u = u(x,t)$ una función que satisface la ecuación de ondas para todo x y $t > 0$, y tal que $u(x,0) = \sin x$ en $x \geq 0$, $u(x,0) = 0$ en $x < 0$, $u_t(x,0) = -\cos x$ en $x \geq 0$, y $u_t(x,0) = 0$ en $x < 0$. Hallar $u(x,t)$ en el semiplano $t > 0$. Tomar $c = 1$.*

Solución:

El dato inicial es $f(x) = \theta(x)\sin x$, $g(x) = -\theta(x)\cos x$,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\, ds \\ &= \frac{\theta(x+t)\sin(x+t) + \theta(x-t)\sin(x-t)}{2} - \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \theta(s)\cos s\, ds \end{aligned}$$

Lo más cómodo es delimitar las zonas en las que influye cada dato. El dato inicial presenta una discontinuidad en $(0,0)$, que se propaga a lo largo de las características $x - t = 0$, $x + t = 0$, separando tres regiones distintas:

En la región I ($x - t < 0$, $x + t < 0$) influye el dato inicial en $x < 0$, pero no el de $x > 0$. Como el dato inicial es nulo para $x < 0$, la perturbación es nula en esta región,

$$u_I(x,t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds = 0.$$

En la región III ($x - t > 0$, $x + t > 0$), por contra, influye el dato en $x > 0$, pero no el de $x < 0$,

$$\begin{aligned} u_{III}(x,t) &= \frac{\sin(x+t) + \sin(x-t)}{2} - \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \cos s\,ds \\ &= \frac{\sin(x+t) + \sin(x-t) - \sin(x+t) + \sin(x-t)}{2} = \sin(x-t)\ . \end{aligned}$$

En la región II ($x - t < 0$, $x + t > 0$) influyen ambos, pero se cancelan las influencias,

$$u_{II}(x,t) = \frac{\sin(x+t)}{2} - \frac{1}{2}\int_{0}^{x+t} \cos s\,ds = \frac{\sin(x+t) - \sin(x+t)}{2} = 0. \ \square$$

El resultado es una onda viajera que se desplaza con velocidad $c = 1$ hacia la derecha a lo largo del eje X.

Problema 5.11 *Una función $u(x,t)$ satisface la ecuación de ondas para $x \in (-a,a)$, $t > 0$, con datos iniciales $u(x,0) = u_0 \sin(\pi x/a)$ y velocidad inicial nula. Las condiciones de contorno son $u(-a,0) = 0$, $u(a,t) = A \sin \omega t$, siendo A, u_0, ω constantes no nulas. Hallar $u(x, 2a/c)$.*

Solución:

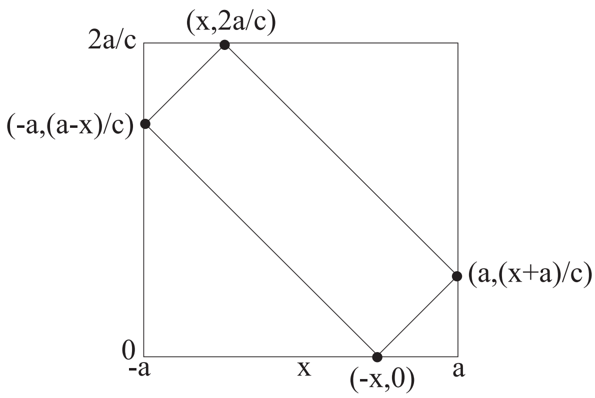

Figura 5.6: Paralelogramo característico para $t = 2a/c$

La cuerda tiene un extremo fijo y otro sometido a una oscilación sinusoidal. Para calcular el valor de la perturbación en $t = 2a/c$ podemos trazar un paralelogramo característico que se apoya en el dato inicial y en los extremos de la cuerda, tal como se refleja en la figura 5.6. Por tanto, aplicando la ley del paralelogramo,

$$\begin{aligned} u\left(x,\frac{2a}{c}\right) &= u\left(-a,\frac{a-x}{c}\right)+u\left(a,\frac{x+a}{c}\right)-u(-x,0)\\ &= A\sin\omega\left(\frac{x+a}{c}\right)+u_0\sin\pi x.\ \square \end{aligned}$$

Problema 5.12 *Hallar la solución del problema mixto de la ecuación de ondas para $t>0$, $x\in(0,L)$ con datos iniciales $u(x,0)=L/2-|L/2-x|$, $u_t(x,0)=0$ y extremos fijos. Obtener la solución usando series de Fourier. Calcular la energía de la onda.*

Solución:

Como la energía de la onda se conserva, podemos calcularla en el instante $t=0$,

$$u(x,0)=\left\{\begin{array}{ll} x & x\in[0,L/2]\\ L-x & x\in[L/2,L]\end{array}\right. \Rightarrow u_x(x,0)=\left\{\begin{array}{ll} 1 & x\in(0,L/2)\\ -1 & x\in(L/2,L)\end{array}\right.,$$

$$E=\int_0^L\left(u_t^2+c^2u_x^2\right)dx=c^2\int_0^L u_x^2(x,0)\,dx=\int_0^L dx=c^2L.\ \square$$

Podemos obtener la solución sin necesidad de separar regiones usando desarrollos de Fourier, sólo que el resultado quedará en forma de serie,

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(f_n\cos\frac{n\pi c}{L}t+\frac{L}{n\pi c}g_n\sin\frac{n\pi c}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x,$$

$$f_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx,\qquad g_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx,$$

si las funciones f, g admiten desarrollo de Fourier en serie de senos,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\sin\frac{n\pi}{L}x,\quad g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n\sin\frac{n\pi}{L}x.$$

Calculamos los coeficientes f_n, ya que los g_n son directamente nulos,

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x=\frac{2}{L}\int_0^{L/2}x\sin\frac{n\pi}{L}x+\frac{2}{L}\int_{L/2}^{L}(L-x)\sin\frac{n\pi}{L}x\\ &= \frac{4L}{\pi^2n^2}\sin\frac{n\pi}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{L/2}x\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx &= \left[\frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{L}x-\frac{L}{n\pi}x\cos\frac{n\pi}{L}x\right]_0^{L/2}\\ &= \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{L^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{L/2}^{L}(L-x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx &= \left[-\frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{L}x-\frac{L}{n\pi}(L-x)\cos\frac{n\pi}{L}x\right]_{L/2}^{L}\\ &= \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{L^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}.\end{aligned}$$

Por tanto, la solución del problema en forma de serie es

$$u(x,t)=\frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}\cos\frac{n\pi c}{L}t\sin\frac{n\pi}{L}x.\ \square$$

Problema 5.13 *Resolver la ecuación $u_{tt}=u_{xx}$, $t>0$, $x\in(0,\pi)$, con condiciones iniciales $u(x,0)=1$, $u_t(x,0)=0$ y extremos fijos. Resolver el problema por series de Fourier y por la ley del paralelogramo.*

Solución:

Comenzamos resolviéndolo usando la ley del paralelogramo, con $c=1$, $L=\pi$, $f(x)=1$, $g(x)=0$, por zonas, de acuerdo con la figura 5.2:

- Zona I: en esta zona usamos la fórmula de D'Alembert, ya que no hay influencia de los extremos,

  $$u(x,t)=\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g(s)\,ds=1.$$

- Zona II: podemos usar la ley del paralelogramo, apoyándonos en la zona I, en la recta $t=0$ y en la recta $x=0$,

  $$u_{II}(x,t)=u(0,t-x)+u_I(t,x)-u(t-x,0)=0,$$

  por lo que se cancela el efecto del dato inicial con el de la onda reflejada en el extremo.

- Zona III: podemos usar la ley del paralelogramo, apoyándonos en la zona I, en la recta $t=0$ y en la recta $x=L$,

  $$u_{III}(x,t)=u(\pi,t+x-\pi)+u_I(\pi-t,\pi-x)-u(2\pi-x-t,0)=0,$$

  igual que en la zona anterior.

- Zona IV: para su mitad inferior, podemos usar la ley del paralelogramo, apoyándonos en la zona III, en la recta $t=0$ y en la recta $x=0$,

  $$u_{IV}(x,t)=u(0,t-x)+u_{III}(t,x)-u(t-x,0)=-1.$$

Vemos que se van alternando: en las zonas pegadas a $x=0$ o a $x=\pi$ la solución es nula, y es ±1 en el resto. $\square$

Esto se puede reobtener usando desarrollos de Fourier: el problema tiene por solución

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(f_n\cos nt+\frac{g_n}{n}\sin nt\right)\sin nx,$$

donde los coeficientes f_n, g_n vienen dados por

$$f_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx, \qquad g_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin nx\,dx,$$

si las funciones f, g admiten desarrollo de Fourier en serie de senos,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin nx, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n n \sin nx.$$

En nuestro caso, $g(x) \equiv 0$, con lo que todos los coeficientes g_n son nulos. Calculamos el desarrollo de $f(x)$,

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx\,dx = \frac{2}{n\pi}\left[-\cos nx\right]_0^\pi = \frac{2}{n\pi}\left((-1)^{n+1}+1\right), \\ &= \left\{\begin{array}{ll} 0 & n \text{ par} \\ 4/n\pi & n \text{ impar} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \qquad 1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \end{aligned}$$

y obtenemos la solución en todas las zonas como serie de Fourier,

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{\cos nt \sin nx}{n} = \frac{2}{\pi}\sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{\sin n(x+t) + \sin n(x-t)}{n}. \ \square$$

Problema 5.14 *Hallar en forma de serie la solución del problema mixto* $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ *con condiciones iniciales* $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$ *y condiciones de contorno* $u_x(0,t) = 0 = u_x(L,t)$, $t > 0$, $x \in (0,L)$. *Aplicarlo al caso en el que* $f(x) = \cos^2(\pi x/L)$, $g(x) = \sin^2(\pi x/L)$. *¿Se puede resolver por la ley del paralelogramo?*

Solución:

Este problema no es el más común para la ecuación de la cuerda vibrante. La condición de contorno equivale a que los extremos de la cuerda no están fijos, pero están constreñidos a moverse sólo en vertical.

Suponemos que la solución del problema se puede expresar mediante separación de variables, es decir que se puede escribir como $u(x,t) = X(x)T(t)$. Sustituyendo en la ecuación y separando los términos que dependen de cada variable,

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = X(x)T''(t) - c^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

siendo λ una constante, ya que el resultado no puede depender sólo de t y sólo de x al mismo tiempo.

Hemos reducido, por tanto, el problema a resolver dos ecuaciones ordinarias independientes,

$$T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0, \qquad X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

Las condiciones de contorno se traducen en

$$X'(0) = 0, \qquad X'(L) = 0,$$

ya que la anulación de u_x en los extremos es independiente del valor de t.

Así pues, tenemos un problema de contorno para X,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad X'(0) = 0, \qquad X'(L) = 0,$$

que ya hemos resuelto con anterioridad:

Las únicas soluciones no triviales aparecen para $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, $n = 0, 1, \dots$ y son de la forma

$$X_n(x) = C_n \cos\frac{n\pi x}{L},$$

etiquetándolas con el subíndice n de acuerdo con el valor de λ permitido.

Ahora podemos abordar la ecuación de $T(t)$ para los valores permitidos de λ. Para $n \neq 0$,

$$T_n''(t) = -\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 T_n(t),$$

cuya solución general es

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi ct}{L} + B_n \sin\frac{n\pi ct}{L},$$

$$T_0''(t) = 0 \Rightarrow T_0(t) = A_0 + B_0 t.$$

Por tanto, la forma más general de la solución de la ecuación de la cuerda vibrante, teniendo en cuenta que por el principio de superposición lineal la suma de soluciones de una ecuación lineal homogénea es también solución, es

$$u(x,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{n\pi ct}{L} + B_n \sin\frac{n\pi ct}{L} \right) \cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Sólo falta implementar las condiciones iniciales para resolver el problema,

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{L} = u(x,0) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos\frac{n\pi x}{L},$$

$$B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{L} \cos\frac{n\pi x}{L} = u_t(x,0) = \frac{g_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos\frac{n\pi x}{L},$$

de donde obtenemos los valores de los coeficientes,

$$A_0 = \frac{f_0}{2}, \quad B_0 = \frac{g_0}{2}, \qquad A_n = f_n, \quad B_n = \frac{L}{n\pi c} g_n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Observamos, por tanto, que de manera natural han aparecido los desarrollos de Fourier en serie de cosenos de las funciones $f(x)$, $g(x)$ del dato inicial:

“El problema mixto para la ecuación de la cuerda vibrante $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, $x \in (0, L)$, $t > 0$, con condiciones iniciales $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$ y de contorno $u_x(0,t) = 0 = u_x(L,t)$ tiene por solución

$$u(x,t) = \frac{f_0 + g_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n \cos\frac{n\pi ct}{L} + \frac{L}{n\pi c} g_n \sin\frac{n\pi ct}{L} \right) \cos\frac{n\pi x}{L},$$

si las funciones f, g admiten desarrollo de Fourier en serie de cosenos”

$$f(x) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad g(x) = \frac{g_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos\frac{n\pi x}{L},$$

$$f_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad g_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

Lo aplicamos al caso en el que $f(x) = \cos^2(\pi x/L)$, $g(x) = \sin^2(\pi x/L)$. Como

$$f(x) = \frac{1+\cos(2\pi x/L)}{2}, \qquad g(x) = \frac{1-\cos(2\pi x/L)}{2},$$

los desarrollos de ambas funciones tienen todos los coeficientes nulos, salvo $f_0 = 1$, $f_2 = 1/2$, $g_0 = 1$, $g_2 = -1/2$, con lo cual la solución del problema es

$$u(x,t) = \frac{1+t}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi ct}{L} - \frac{L}{2\pi c}\sin\frac{2\pi c}{L}t\right)\cos\frac{2\pi x}{L}. \ \Box$$

Este problema no se puede resolver por la ley del paralelogramo, ya que necesitamos conocer como dato el valor de u en los extremos de la cuerda y sólo conocemos el valor de su derivada. Necesitamos tres puntos para apoyar el paralelogramo: uno en el dato inicial, otro en la zona resuelta por la fórmula de D'Alembert. Nos falta un tercero. $\Box$

Problema 5.15 *Resolver la ecuación* $u_{tt} - c^2u_{xx} = x^2$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ *con condiciones iniciales* $u(x,0) = x$, $u_t = 0$.

Solución:

En lugar de la fórmula de D'Alembert, dado que la fuerza es sencilla, podemos buscar una solución sencilla de la ecuación inhomogénea, que no dependa del tiempo, por ejemplo, $u_p(x)$,

$$-c^2u_p''(x) = x^2 \Rightarrow u_p(x) = -\frac{x^4}{12c^2},$$

y así descomponer la solución del problema en

$$u(x,t) = v(x,t) - \frac{x^4}{12c^2}, \qquad v(x,0) = x + \frac{x^4}{12c^2} = h(x), \qquad v_t(x,0) = 0,$$

y podemos resolver el problema equivalente para v por la fórmula de D'Alembert,

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{h(x+ct)+h(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds \\ &= \frac{(x+ct)+(x-ct)}{2} + \frac{(x+ct)^4+(x-ct)^4}{24c^2} \\ &= x + \frac{x^4+6c^2x^2t^2+c^4t^4}{12c^2}, \end{aligned}$$

y la solución del problema completo es

$$u(x,t) = v(x,t) - \frac{x^4}{12c^2} = x + \frac{x^2t^2}{2} + \frac{c^2t^4}{12}. \ \Box$$

Otra opción, mucho más larga, es usar la fórmula de D'Alembert con $f(x) = x$, $g(x) = 0$,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds + \frac{1}{2c}\int_0^t dT \int_{x-c(t-T)}^{x+c(t-T)} dX\, F(x,t) \\ &= \frac{(x+ct)+(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^t dT \int_{x-c(t-T)}^{x+c(t-T)} dX\, X^2 \\ &= x + \frac{1}{6c}\int_0^t \left\{(x+c(t-T))^3 - (x-c(t-T))^3\right\} dT \\ &= x - \frac{1}{24c^2}\left[(x+c(t-T))^4 + ((x-c(t-T))^4\right]_0^t \\ &= x - \frac{x^4-(x^4+6c^2x^2t^2+c^4t^4)}{12c^2} = x + \frac{x^2t^2}{2} + \frac{c^2t^4}{12}. \ \square \end{aligned}$$

Problema 5.16 *Consideremos una cuerda circular de radio R. Expresar la ecuación de la cuerda vibrante usando como variable el ángulo polar ϕ, es decir para la función $u(\phi,t)$. Hallar en forma de serie la solución del problema de condiciones iniciales $u(\phi,0) = f(\phi)$, $u_t(\phi,0) = g(\phi)$, $t > 0$, $\phi \in (0,2\pi)$. Aplicarlo al caso en el que las condiciones iniciales son $u(\phi,0) = \sin\phi\cos\phi$, $u_t(\phi,0) = \cos^2\phi$, con $R = 1 = c$.*

Solución:

Usaremos como coordenada el ángulo polar, ϕ, de modo que la distancia desde un punto de la cuerda, que tomaremos como origen de ángulos, es $x = R\phi$, $\phi \in (0,2\pi)$. Por tanto, la ecuación de la cuerda vibrante, con este cambio de variable, para $u(\phi,t)$ quedará así

$$u_{tt} - \frac{c^2}{R^2}u_{\phi\phi} = 0,$$

en ausencia de fuerzas externas.

Intentaremos resolver la ecuación en estas coordenadas, $\phi \in (0,2\pi)$, $t > 0$, por separación de variables, buscando soluciones de la forma $u(\phi,t) = \Phi(\phi)T(t)$, que sustituidas en la ecuación,

$$0 = T''(t)\Phi(\phi) - \frac{c^2}{R^2}T(t)\Phi''(\phi),$$

$$\frac{R^2}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = -k,$$

nos permiten separar las variables de la ecuación y reducirla a dos ecuaciones ordinarias,

$$T''(t) + k\frac{c^2}{R^2}T(t) = 0, \qquad \Phi''(\phi) + k\Phi(\phi) = 0.$$

Aparentemente no hay condiciones de contorno, pero las propias coordenadas polares exigen condiciones de periodicidad,

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi), \qquad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi),$$

lo cual conduce a un problema de contorno para Φ ya resuelto con anterioridad, que tiene por autovalores $k_n = n^2$ y autofunciones $\Phi_0(\phi) = 1$, $\Phi_n(\phi) = \cos n\phi$, $\tilde{\Phi}_n(\phi) = \sin n\phi$, $n \in \mathbb{N}$.

Queda por resolver la ecuación en la coordenada temporal,

$$T_n''(t) + \frac{n^2c^2}{R^2}T_n(t) = 0 \Rightarrow T_n(t) = A_n \cos\frac{nct}{R} + B_n \sin\frac{nct}{R}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t,$$

con lo cual podemos escribir la solución de la ecuación de la cuerda circular como

$$\begin{aligned} u(\phi,t) &= A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{nct}{R} + B_n \sin\frac{nct}{R}\right)\cos n\phi \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{A}_n \cos\frac{nct}{R} + \tilde{B}_n \sin\frac{nct}{R}\right)\sin n\phi. \end{aligned}$$

Faltan por imponer las condiciones iniciales. Empezamos por $u(\phi,0) = f(\phi)$,

$$u(\phi,0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos n\phi + \tilde{A}_n \sin n\phi\right) = f(\phi),$$

y si la función $f(\phi)$ admite desarrollo de Fourier en serie de senos y cosenos,

$$f(\phi) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(f_n \cos n\phi + \tilde{f}_n \sin n\phi\right),$$

$$f_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cos n\phi\, d\phi, \qquad \tilde{f}_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\sin n\phi\, d\phi,$$

observamos, por la unicidad del desarrollo en serie de Fourier, que $A_0 = f_0/2$, $A_n = f_n$, $\tilde{A}_n = \tilde{f}_n$, $n \in \mathbb{N}$ y, por tanto, podemos identificar los coeficientes de la solución con los coeficientes del desarrollo de Fourier.

Del mismo modo, para $u_t(\phi,0) = g(\phi)$,

$$u_t(\phi,0) = B_0 + \frac{c}{R}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(B_n \cos n\phi + \tilde{B}_n \sin n\phi\right) = g(\phi),$$

y si la función $g(\phi)$ admite desarrollo de Fourier en serie de senos y cosenos,

$$g(\phi) = \frac{g_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(g_n \cos n\phi + \tilde{g}_n \sin n\phi\right),$$

$$g_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\phi)\cos n\phi\, d\phi, \qquad \tilde{g}_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\phi)\sin n\phi\, d\phi,$$

observamos, por la unicidad del desarrollo en serie de Fourier, que $B_0 = g_0/2$, $B_n = Rg_n/nc$, $\tilde{B}_n = R\tilde{g}_n/nc$, $n \in \mathbb{N}$ y, por tanto, podemos identificar el resto de los coeficientes de la solución con los coeficientes del desarrollo de Fourier de la función g:

"El problema para la ecuación de la cuerda circular de radio R, $u_{tt} - c^2 u_{\phi\phi}/R^2 = 0$ para $\phi \in (0, 2\pi)$, $t > 0$ con condiciones iniciales $u(\phi, 0) = f(\phi)$, $u_t(\phi, 0) = g(\phi)$ tiene solución

$$\begin{aligned} u(\phi,t) &= \frac{f_0 + g_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n \cos n\phi + \tilde{f}_n \sin n\phi \right) \cos \frac{nct}{R} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{nc} \left(g_n \cos n\phi + \tilde{g}_n \sin n\phi \right) \sin \frac{nct}{R}, \end{aligned}$$

si las funciones $f(\phi)$, $g(\phi)$ admiten desarrollo de Fourier en serie de senos y cosenos"

$$f(\phi) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n \cos n\phi + \tilde{f}_n \sin n\phi \right),$$

$$g(\phi) = \frac{g_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n \cos n\phi + \tilde{g}_n \sin n\phi \right),$$

$$f_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos n\phi \, d\phi, \qquad \tilde{f}_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin n\phi \, d\phi,$$

$$g_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\phi) \cos n\phi \, d\phi, \qquad \tilde{g}_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\phi) \sin n\phi \, d\phi.$$

En el caso particular de la cuerda circular con condiciones iniciales y $R = 1 = c$,

$$f(\phi) = \sin\phi \cos\phi = \frac{1}{2} \sin 2\phi, \qquad g(\phi) = \cos^2 \phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\phi,$$

los desarrollos de Fourier tienen todos los términos nulos salvo $\tilde{f}_2 = 1/2$, $g_0 = 1$, $g_2 = 1/2$. Por tanto, la solución del problema de valores iniciales es

$$u(\phi, t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin 2\phi \cos \frac{2ct}{R} + \frac{R}{4c} \cos 2\phi \sin \frac{2ct}{R}. \ \square$$