# Capítulo 6

# Problemas de contorno

**Problema 6.1** *Obtener los autovalores y autofunciones del problema* $x'' + \lambda x = 0$, $x(0) = x(1)$, $x'(0) = -x'(1)$.

**Solución:**

Es un problema regular, pero no es de condiciones separadas ni autoadjunto siquiera, con lo cual no es aplicable el teorema de Sturm-Liouville. La ecuación característica de la ecuación es $\mu^2 + \lambda = 0$, que proporciona autovalores $\mu = \pm\sqrt{-\lambda}$, con lo cual hay tres casos, según que los autovalores sean reales, dobles o imaginarios. Tomando $k > 0$:

- $\lambda = -k^2 < 0$: La solución general es $x(t) = A\cosh kt + B\sinh kt$. Las condiciones de contorno implican, por la paridad del coseno hiperbólico,

  $$A = x(0) = x(1) = A\cosh k + B\sinh k,$$

  $$Bk = x'(0) = -x'(1) = -Ak\sinh k - Bk\cosh k,$$

  que tiene solución para cualquier valor de $k$,

  $$B = \frac{1-\cosh k}{\sinh k}A,$$

  ya que el sistema está siempre indeterminado,

  $$\begin{pmatrix} \cosh k - 1 & \sinh k \\ \sinh k & \cosh k + 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

  ya que tiene determinante $\cosh^2 k - 1 - \sinh^2 k = 0$.

  Por tanto las autofunciones son múltiplos de

  $$x_k(t) = \sinh k\cosh kt + (1-\cosh k)\sinh kt.$$

- $\lambda = 0$: La solución general es $x(t) = k_1 t + k_2$. Las condiciones de contorno implican

  $$k_2 = x(0) = x(1) = k_1 + k_2, \quad k_1 = x'(0) = -x'(1) = -k_1 \Rightarrow k_1 = 0,$$

  con lo cual en este caso las únicas soluciones son las constantes, $x_0(t) = k_2$.

- $\lambda = k^2 > 0$: La solución general es $x(t) = A\cos k(t+\delta)$. Las condiciones de contorno implican, por la paridad del coseno, $\cos\phi = \cos(-\phi)$,

$$A\cos k\delta = x(0) = x(1) = A\cos k(\delta+1) \Rightarrow \delta = -1/2,$$

$$-Ak\sin k\delta = x'(0) = -x'(1) = Ak\sin k(\delta+1) \Rightarrow \delta = -1/2,$$

con lo cual para cada valor de $k$ hay una familia de soluciones, los múltiplos de la función

$$x_k(t) = \cos(kt - k/2).$$

Por tanto, para cada valor de $k$ hay una autofunción independiente para el problema. Y todos los valores de $k$ son, por tanto, autovalores, a diferencia del caso de los problemas de Sturm-Liouville, que sólo poseen una familia numerable de autovalores.

**Problema 6.2** *Obtener los autovalores y autofunciones del problema* $x''+\lambda x = 0$, $x(0) = 0 = x(L)$.

**Solución:**

Es un problema regular con condiciones separadas y $p(t) = 1 = r(t)$, $q(t) = 0$. Luego es aplicable el teorema. La ecuación característica de la ecuación es $\mu^2 + \lambda = 0$, que proporciona autovalores $\mu = \pm\sqrt{-\lambda}$, con lo cual hay tres casos, según que los autovalores sean reales, dobles o imaginarios. Tomando $k > 0$:

- $\lambda = -k^2 < 0$: La solución general es $x(t) = k_1 \sinh kt + k_2 \cosh kt$. Las condiciones de contorno implican

$$0 = x(0) = k_2, \quad 0 = x(L) = k_1 \sinh kL \Rightarrow k_1 = 0 = k_2,$$

con lo cual la única solución es la trivial, $x(t) = 0$.

- $\lambda = 0$: La solución general es $x(t) = k_1 t + k_2$. Las condiciones de contorno implican

$$0 = x(0) = k_2, \quad 0 = x(L) = k_1 L \Rightarrow k_1 = 0 = k_2,$$

con lo cual también en este caso la única solución es la trivial, $x(t) = 0$.

- $\lambda = k^2 > 0$: La solución general es $x(t) = k_1 \sin kt + k_2 \cos kt$. Las condiciones de contorno implican

$$0 = x(0) = k_2, \quad 0 = x(L) = k_1 \sin kL \Rightarrow k_2 = 0,\ k = \frac{n\pi}{L},\ n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, los autovalores son de la forma $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, $n = 1, 2, \ldots$ y las autofunciones asociadas son los múltiplos de

$$x_n(t) = \sin\frac{n\pi t}{L}, \quad n = 1, 2\ldots \ \square$$

**Problema 6.3** *Obtener los autovalores y autofunciones del problema* $x''+\lambda x = 0$, $x(-L/2) = 0 = x(L/2)$.

**Solución:**

Este problema se puede abordar directamente, como en el problema anterior, pero las cuentas son más complicadas. Es más cómodo realizar un cambio de variable y aprovechar el resultado anterior.

Sabemos que el mismo problema en el intervalo $[0, L]$ tiene autovalores $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, $n = 1, 2, \ldots$ y autofunciones $x_n(s) = \sin(n\pi s/L)$.

Si realizamos el cambio de variable

$$s = t + L/2, \qquad t \in [-L/2, L/2],$$

que preserva la longitud del intervalo, los autovalores siguen siendo los mismos y las autofunciones son los múltiplos de

$$x_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}(t + L/2)\right), \quad n = 1, 2, \ldots \ \square$$

**Problema 6.4** *Obtener los autovalores y autofunciones del problema $x'' + \lambda x = 0$, $x'(0) = 0 = x'(L)$.*

**Solución:**

Es un problema regular con condiciones separadas y $p(t) = 1 = r(t)$, $q(t) = 0$. Luego es aplicable el teorema. La ecuación característica de la ecuación es $\mu^2 + \lambda = 0$, que proporciona autovalores $\mu = \pm\sqrt{-\lambda}$, con lo cual hay tres casos, según que los autovalores sean reales, dobles o imaginarios. Tomando $k > 0$:

- $\lambda = -k^2 < 0$: La solución general es $x(t) = k_1 \sinh kt + k_2 \cosh kt$. Las condiciones de contorno implican

  $$0 = x'(0) = k_1, \quad 0 = x'(L) = kk_2 \sinh kL \Rightarrow k_1 = 0 = k_2,$$

  con lo cual la única solución es la trivial, $x(t) = 0$, y no hay autovalores ni autofunciones para este caso.

- $\lambda = 0$: La solución general es $x(t) = k_1 t + k_2$. Las condiciones de contorno implican

  $$0 = x'(0) = k_1, \quad 0 = x'(L) = k_1 \Rightarrow k_1 = 0,$$

  con lo cual en este caso hay soluciones no triviales constantes, $x(t) = k_2$, y $\lambda_0 = 0$ es autovalor. Todas ellas son múltiplos de $x_0(t) = 1$

- $\lambda = k^2 > 0$: La solución general es $x(t) = k_1 \sin kt + k_2 \cos kt$. Las condiciones de contorno implican

  $$0 = x'(0) = k_1, \quad 0 = x'(L) = -kk_2 \sin kL \Rightarrow k_1 = 0, \ k = \frac{n\pi}{L}, \ n \in \mathbb{N},$$

  si buscamos soluciones no triviales.

Por tanto, los autovalores son de la forma $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ y las autofunciones asociadas son los múltiplos de

$$x_0(t) = 1, \quad x_n(t) = \cos\frac{n\pi t}{L}, \ n = 1, 2 \ldots \ \square$$

**Problema 6.5** *Obtener los autovalores y autofunciones del problema* $x'' + \lambda x = 0$*,* $x(0) = 0 = x'(L)$*.*

**Solución:**

Es un problema regular con condiciones separadas y $p(t) = 1 = r(t)$, $q(t) = 0$. La ecuación característica de la ecuación es $\mu^2 + \lambda = 0$, que proporciona autovalores $\mu = \pm\sqrt{-\lambda}$, con lo cual hay tres casos, según que los autovalores sean reales, dobles o imaginarios. Tomando $k > 0$:

- $\lambda = -k^2 < 0$: La solución general es $x(t) = k_1 \sinh kt + k_2 \cosh kt$. Las condiciones de contorno implican

  $$0 = x(0) = k_2, \quad 0 = x'(L) = k_1 k \cosh kL \Rightarrow k_1 = 0 = k_2,$$

  con lo cual la única solución es la trivial, $x(t) = 0$.

- $\lambda = 0$: La solución general es $x(t) = k_1 t + k_2$. Las condiciones de contorno implican

  $$0 = x(0) = k_2, \quad 0 = x'(L) = k_1 \Rightarrow k_1 = 0 = k_2,$$

  con lo cual también en este caso la única solución es la trivial, $x(t) = 0$.

- $\lambda = k^2 > 0$: La solución general es $x(t) = k_1 \sin kt + k_2 \cos kt$. Las condiciones de contorno implican

  $$0 = x(0) = k_2, \; 0 = x'(L) = k_1 k \cos kL \Rightarrow k_2 = 0, \; k = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, los autovalores son de la forma $\lambda_n = ((2n-1)\pi/2L)^2$, $n = 1, 2, \ldots$ y las autofunciones asociadas son los múltiplos de

$$x_n(t) = \sin \frac{(2n-1)\pi t}{2L}, \quad n = 1, 2, \ldots \; \square$$

**Problema 6.6** *Obtener los autovalores y autofunciones del problema* $x'' + \lambda x = 0$*,* $x'(0) = 0 = x(L)$*.*

**Solución:**

Es un problema regular con condiciones separadas y $p(t) = 1 = r(t)$, $q(t) = 0$. La ecuación característica de la ecuación es $\mu^2 + \lambda = 0$, que proporciona autovalores $\mu = \pm\sqrt{-\lambda}$, con lo cual hay tres casos, según que los autovalores sean reales, dobles o imaginarios. Tomando $k > 0$:

- $\lambda = -k^2 < 0$: La solución general es $x(t) = k_1 \sinh kt + k_2 \cosh kt$. Las condiciones de contorno implican

  $$0 = x'(0) = k k_1, \quad 0 = x(L) = k_2 \cosh kL \Rightarrow k_1 = 0 = k_2,$$

  con lo cual la única solución es la trivial, $x(t) = 0$.

- $\lambda = 0$: La solución general es $x(t) = k_1 t + k_2$. Las condiciones de contorno implican

$$0 = x'(0) = k_1, \quad 0 = x(L) = k_2 \Rightarrow k_1 = 0 = k_2,$$

con lo cual también en este caso la única solución es la trivial, $x(t) = 0$.

- $\lambda = k^2 > 0$: La solución general es $x(t) = k_1 \sin kt + k_2 \cos kt$. Las condiciones de contorno implican

$$0 = x'(0) = kk_1,\ 0 = x(L) = k_2 \cos kL \Rightarrow k_1 = 0,\ k = \frac{(2n-1)\pi}{2L},\ n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, los autovalores son de la forma $\lambda_n = ((2n-1)\pi/2L)^2$, $n = 1, 2, \ldots$ y las autofunciones asociadas son los múltiplos de

$$x_n(t) = \cos\frac{(2n-1)\pi t}{2L}, \quad n = 1, 2, \ldots \ \square$$

**Problema 6.7** *Obtener los autovalores y autofunciones del problema* $x'' + \lambda x = 0$, $x(-L) = -x(L)$, $x'(-L) = -x'(L)$.

**Solución:**

No es un problema regular típico, dado que, aunque $p(t) = 1 = r(t)$, $q(t) = 0$, las condiciones de contorno no son ni separadas ni periódicas, con lo cual el teorema no proporciona información en este caso.

La ecuación característica de la ecuación es $\mu^2 + \lambda = 0$, que proporciona autovalores $\mu = \pm\sqrt{-\lambda}$, con lo cual hay tres casos, según que los autovalores sean reales, dobles o imaginarios. Tomando $k > 0$:

- $\lambda = -k^2 < 0$: La solución general es $x(t) = k_1 \sinh kt + k_2 \cosh kt$. Las condiciones de contorno implican, usando la paridad del coseno y la imparidad del seno,

$$-k_1 \sinh kL + k_2 \cosh kL = x(-L) = -x(L) = -k_1 \sinh kL - k_2 \cosh kL,$$

$$kk_1 \cosh kL - kk_2 \sinh kL = x'(-L) = -x'(L) = -kk_1 \cosh kL - kk_2 \sinh kL,$$

con lo cual la única solución es la trivial, $k_1 = 0 = k_2$, $x(t) = 0$.

- $\lambda = 0$: La solución general es $x(t) = k_1 t + k_2$. Las condiciones de contorno implican

$$-k_1 L + k_2 = x(-L) = -x(L) = -k_1 L - k_2 \Rightarrow k_2 = 0,$$

$$k_1 = x'(-L) = -x'(L) = -k_1 \Rightarrow k_1 = 0,$$

con lo cual en este caso la única solución es la trivial $x(t) = 0$.

- $\lambda = k^2 > 0$: La solución general es $x(t) = k_1 \sin kt + k_2 \cos kt$. Las condiciones de contorno implican, usando la paridad del coseno y la imparidad del seno,

$$-k_1 \sin kL + k_2 \cos kL = x(-L) = -x(L) = -k_1 \sin kL - k_2 \cos kL,$$

$$kk_1 \cos kL + kk_2 \sin kL = x'(-L) = -x'(L) = -kk_1 \cos kL + kk_2 \sin kL,$$

cuyas soluciones no triviales aparecen cuando $\cos kL = 0$, que se satisface sin $kL$ es un múltiplo entero impar de $\pi/2$, lo que corresponde a $k = (2n-1)\pi/2L$, $n \in \mathbb{N}$,

$$x(t) = k_1 \sin \frac{(2n-1)\pi t}{2L} + k_2 \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2L},$$

y son autovalores $\lambda = ((2n-1)\pi/2L)^2$.

Resumiendo, los autovalores son de la forma $\lambda_n = ((2n-1)\pi/2L)^2$, $n = 1, 2, \ldots$ y las autofunciones asociadas son

$$x_n(t) = \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2L}, \quad \tilde{x}_n(t) = \sin \frac{(2n-1)\pi t}{2L}, \; n = 1, 2, \ldots$$

y sus combinaciones lineales, que son claramente ortogonales en dicho intervalo, como es sencillo comprobar. Existen dos autofunciones linealmente independientes por cada autovalor. □

**Problema 6.8** *Obtener los autovalores y autofunciones del problema* $x'' + \lambda x = 0$, $x(0) = x'(0)$, $x(1) = x'(1)$.

**Solución:**

Es un problema regular de Sturm-Lioville con $p(t) = 1 = r(t)$, de condiciones separadas.

Buscando soluciones de la forma $x(t) = e^{\mu t}$, la ecuación característica es $\mu^2 + \lambda = 0$, cuyas soluciones son $\mu = \pm\sqrt{-\lambda}$, que da lugar a tres casos, según que los autovalores sean reales, dobles o complejos. Tomando $k > 0$:

- $\lambda = -k^2 < 0$: La solución general es $x(t) = k_1 \sinh kt + k_2 \cosh kt$, con derivada $x'(t) = kk_1 \cosh kt + kk_2 \sinh kt$. Las condiciones de contorno imponen
$$k_2 = x(0) = x'(0) = kk_1,$$
$$k_1 \sinh k + k_2 \cosh k = x(1) = x'(1) = kk_1 \cosh k + kk_2 \sinh k,$$
y son equivalentes a
$$k_2 = kk_1, \qquad (1-k^2)k_1 \sinh k = 0,$$
con lo cual las únicas soluciones no nulas (autofunciones) corresponden a $k = 1$, $k_1 = k_2$, y son $x(t) = k_1(\sinh t + \cosh t) = k_1 e^t$. Tenemos un autovalor $\lambda = -1$.

- $\lambda = 0$: La solución general es $x(t) = k_1 t + k_2$, con derivada $x'(t) = k_1$. Las condiciones de contorno implican
$$k_2 = x(0) = x'(0) = k_1, \quad k_1 + k_2 = x(1) = x'(1) = k_1 \Rightarrow k_1 = 0 = k_2,$$
con lo cual en este caso la única solución es la trivial, $x(t) = 0$.

- $\lambda = k^2 > 0$: La solución general es $x(t) = k_1 \sin kt + k_2 \cos kt$, con derivada $x'(t) = kk_1 \cos kt - kk_2 \sin kt$. Las condiciones de contorno implican

$$k_2 = x(0) = x'(0) = kk_1,$$

$$k_1 \sin k + k_2 \cos k = x(1) = x'(1) = kk_1 \cos k - kk_2 \sin k,$$

y son equivalentes a

$$k_2 = kk_1, \qquad (1+k^2)k_1 \sin k = 0,$$

y, por tanto, para obtener soluciones no triviales, la única posibilidad es que $\sin k$ se anule, lo que sucede si $k = n\pi$ con $n = 1, 2, \ldots$ Obtenemos, pues autovalores $\lambda = (n\pi)^2$ para autofunciones $x(t) = k_1(\sin n\pi t + n\pi \cos n\pi t)$, para $n = 1, 2, \ldots$

Así pues, juntando todos los casos, los autovalores son de la forma $\lambda_0 = -1$, $\lambda_n = n^2\pi^2$, $n = 1, 2, \ldots$ y las autofunciones asociadas son los múltiplos de

$$x_0 = e^t, \qquad x_n(t) = \sin n\pi t + n\pi \cos n\pi t, \; n = 1, 2 \ldots \; \square$$

**Problema 6.9** *Obtener los autovalores y autofunciones del problema $x'' - 2x' + x + \lambda x = 0$, $x(0) = 0 = x(1)$.*

**Solución:**

El problema se puede reescribir en forma de Sturm-Liouville multiplicando por $e^{-2t}$ la ecuación,

$$(e^{-2t}x')' + e^{-2t}x + \lambda e^{-2t}x = 0,$$

donde $p(t) = r(t) = e^{-2t} > 0$, con lo cual se trata de un problema regular con condiciones de contorno separadas y le podemos aplicar la teoría conocida.

Buscando soluciones de la forma $x(t) = e^{\mu t}$, la ecuación característica es $\mu^2 - 2\mu + (1+\lambda) = 0$, cuyas soluciones son $\mu = 1 \pm \sqrt{-\lambda}$, que da lugar a tres casos, según que los autovalores sean reales, dobles o complejos. Tomando $k > 0$:

- $\lambda = -k^2 < 0$: La solución general es $x(t) = k_1 e^{(1+k)t} + k_2 e^{(1-k)t}$. Las condiciones de contorno imponen

$$0 = x(0) = k_1 + k_2,$$

$$0 = x(1) = k_1 e^{1+k} + k_2 e^{1-k},$$

con lo cual

$$k_1 \sinh k = 0, \quad k_2 = -k_1,$$

y la única solución del problema es nula, $k_1 = 0 = k_2$.

- $\lambda = 0$: La solución general es $x(t) = k_1 t e^t + k_2 e^t$. Las condiciones de contorno implican

$$0 = x(0) = k_2, \quad 0 = x(1) = k_1 e \Rightarrow k_1 = 0 = k_2,$$

con lo cual también en este caso la única solución es la trivial, $x(t) = 0$.

- $\lambda = k^2 > 0$: La solución general es $x(t) = k_1 e^t \sin kt + k_2 e^t \cos kt$. Las condiciones de contorno implican

$$0 = x(0) = k_2, \quad 0 = x(1) = k_1 e \sin k \Rightarrow k_2 = 0,\ k = n\pi,\ n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, los autovalores son de la forma $\lambda_n = n^2\pi^2$, $n = 1, 2, \ldots$ y las autofunciones asociadas son los múltiplos de

$$x_n(t) = e^t \sin n\pi t,\ n = 1, 2 \ldots \ \square$$

**Problema 6.10** *Obtener los autovalores y autofunciones del problema* $t^2 x'' + tx' + \lambda x = 0$, $x(e) = 0 = x(e^2)$.

**Solución:**

Es una ecuación de Euler, asi que, mediante el cambio $t = e^s$, la ecuación se convierte en $\ddot{x} + \lambda x = 0$, con condiciones de contorno $x(1) = 0 = x(2)$, problema ya conocido, con autovalores $\lambda_n = (n\pi)^2$ y autofunciones $x_n(s) = \sin n\pi(s-1) = (-1)^n \sin n\pi s$.

Por tanto, deshaciendo el cambio de variable, las autofunciones son de la forma, obviando el signo menos,

$$x_n(t) = \sin(n\pi \ln t).\ \square$$

**Problema 6.11** *Obtener los autovalores y autofunciones del problema* $x'' + \lambda x = 0$, $x(0) = 0 = x(1) + x'(1)$.

**Solución:**

Es un problema regular con condiciones separadas y $p(t) = 1 = r(t)$, $q(t) = 0$. Hay tres casos:

- $\lambda = -k^2 < 0$: La solución general es $x(t) = k_1 \sinh kt + k_2 \cosh kt$. Las condiciones de contorno implican

$$0 = x(0) = k_2, \quad 0 = x(1) + x'(1) = k_1(\sinh k + k \cosh k).$$

  Como la función $f(k) = \sinh k + k \cosh k$ sólo se anula en $k = 0$, ya que es positiva para $k > 0$ y negativa para $k < 0$, la única posibilidad de cumplir las condiciones de contorno es la solución trivial $k_1 = 0 = k_2$.

- $\lambda = 0$: La solución general es $x(t) = k_1 t + k_2$. Las condiciones de contorno implican

$$0 = x(0) = k_2, \quad 0 = x(1) + x'(1) = 2k_1 \Rightarrow k_1 = 0 = k_2,$$

  con lo cual también en este caso la única solución es la trivial, $x(t) = 0$.

- $\lambda = k^2 > 0$: La solución general es $x(t) = k_1 \sin kt + k_2 \cos kt$. Las condiciones de contorno implican

$$0 = x(0) = k_2, \quad 0 = x(1) + x'(1) = k_1(\sin k + k \cos k).$$

  Los autovalores $\lambda_n = k_n^2$ se obtienen a partir de las soluciones de la ecuación $\sin k_n + k_n \cos k_n$.

  Las autofunciones asociadas son $x_n(t) = \sin k_n t$. $\square$

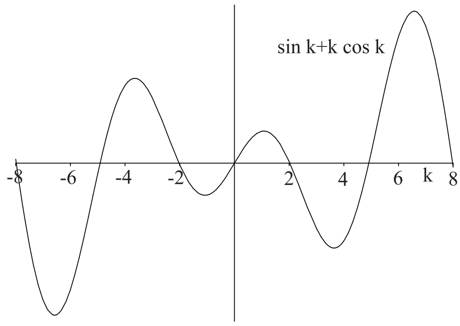


Figura 6.1: Autovalores del problema $x'' + \lambda x = 0$, $x(0) = 0 = x(1) + x'(1)$

**Problema 6.12** *Obtener los autovalores y autofunciones del problema* $t^2x'' - 2tx' + (2+\lambda t^2)x = 0$, $x(0) = 0 = x(2\pi)$. *Usar el cambio de variable* $x(t) = ty(t)$.

**Solución:**

Reescribimos la ecuación en forma de Sturm-Liouville,

$$\left(\frac{x'}{t^2}\right)' + \frac{2}{t^4}x + \frac{\lambda}{t^2}x = 0,$$

e identificamos $p(t) = t^{-2}$, $q(t) = -2t^{-4}$, $r(t) = t^{-2}$.

Las funciones $p(t)$, $r(t)$ son positivas, pero no son continuas en $t = 0$, por lo que el problema no es regular, así que la teoría de los problemas de Sturm-Liouville no es aplicable en este caso.

Realizamos el cambio de variable dependiente $x(t) = ty(t)$,

$$x' = y + ty', \quad x'' = 2y' + ty'' \Rightarrow y'' + \lambda y = 0,$$

y obtenemos la ecuación del oscilador armónico, con condiciones de contorno $y(2\pi) = 0$, $y(0)$ finita, ya que sea cual sea el valor de $y(0)$, $x(0)$ se anula.

Por tanto, hemos perdido una condición de contorno y el problema tiene infinitas soluciones, no numerables, lo cual justifica que no se pueda aplicar la teoría de Sturm-Liouville.

Por ejemplo, para $\lambda = 0$ son soluciones los múltiplos de $y_0(t) = t - 2\pi$, es decir, de $x_0(t) = t^2 - 2\pi t$.

Para $\lambda = k^2 > 0$, son soluciones de la ecuación $x(t) = t\sin(kt - \delta)$, que se anulan en $t = 0$. En $t = 2\pi$,

$$0 = 2\pi\sin(2\pi k - \delta),$$

que proporciona el autovalor $\lambda = k^2$ para $\delta = 2\pi k$, $x_k(t) = t\sin k(t - 2\pi)$.

Y del mismo modo pueden construirse soluciones para cualquier $\lambda = -k^2$ negativo, múltiplos de $x_k(t) = t\sinh k(t - 2\pi)$. □

**Problema 6.13** *Hallar la función de Green para el problema* $(tx')' = f(t)$, $x(1) = 0 = x(e)$. *Aplicarla al caso* $f(t) = t$.

**Solución:**

Podemos reducir el problema a uno conocido mediante el cambio de variable independiente $t=e^u$, $u=\ln t$,

$$\frac{d}{dt}=\frac{du}{dt}\frac{d}{du}=\frac{1}{t}\frac{d}{du}\Rightarrow \ddot{x}=tf(t)=e^u f(e^u)=g(u),$$

que tendrá solución como integral de la función de Green correspondiente,

$$x(e^u)=\int_0^1 G(u,v)g(v)\,dv,$$

conocida la función de Green para el problema $\ddot{x}=g(u)$, $x(0)=0=x(1)$,

$$G(u,v)=\left\{\begin{array}{ll} v(u-1) & 0\le v\le u \\ u(v-1) & u\le v\le 1 \end{array}\right. .$$

Por tanto, para conocer la función de Green para el problema propuesto, habrá que deshacer el cambio de variable,

$$x(e^u)=\int_0^1 G(u,v)g(v)\,dv=\int_1^e G(\ln t,\ln s)sf(s)\frac{ds}{s}=\int_1^e \tilde{G}(t,s)f(s)\,ds=x(t),$$

y despejar la expresión,

$$\tilde{G}(t,s)=G(\ln t,\ln s)=\left\{\begin{array}{ll} \ln s(\ln t-1) & 1\le s\le t \\ \ln t(\ln s-1) & t\le s\le e \end{array}\right. .\ \Box$$

Para el caso $f(t)=t$, es más cómodo realizar la integral en las nuevas variables,

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_1^e \tilde{G}(t,s)s\,ds=\int_0^1 G(u,v)e^{2v}\,dv=\frac{e^{2u}+u-e^2u-1}{4} \\ &= \frac{t^2+\ln t-e^2\ln t-1}{4}.\ \Box \end{aligned}$$

Aunque es más cómodo resolver el problema directamente,

$$tx'(t)=\int f(t)\,dt=\frac{t^2}{2}+k_1\Rightarrow x(t)=\int\left(\frac{t}{2}+\frac{k_1}{t}\right)dt=\frac{t^2}{4}+k_1\ln t+k_2,$$

y aplicarle las condiciones de contorno,

$$0=x(1)=\frac{1}{4}+k_2,\quad 0=x(e)=\frac{e^2}{4}+k_1+k_2\Rightarrow k_1=\frac{1-e^2}{4},\ k_2=-\frac{1}{4}.$$

La función de Green también podríamos haberla construido directamente a partir de las soluciones de la ecuación homogénea $(tx')'=0$,

$$tx'=k_1\Rightarrow x(t)=k_2+k_1\ln t,$$

imponiendo una de las condiciones de contorno y escogiendo soluciones sencillas,

$$0=x_1(1)=k_2\Rightarrow x_1(t)=\ln t,$$

$$0 = x_2(e) = k_1 + k_2 \Rightarrow x_2(t) = \ln t - 1,$$

calculando su wronskiano,

$$W(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ln t & \ln t - 1 \\ 1/t & 1/t \end{vmatrix} = \frac{1}{t},$$

y sustituyendo en la expresión de la función de Green,

$$\tilde{G}(t,s) = \begin{cases} \dfrac{x_1(s)x_2(t)}{p(1)|W|(x_1,x_2)(1)} = \ln s(\ln t - 1) & 1 \le s \le t \\ \\ \dfrac{x_1(t)x_2(s)}{p(1)|W|(x_1,x_2)(1)} = \ln t(\ln s - 1) & t \le s \le e \end{cases},$$

teniendo en cuenta que en el problema $p(t) = t$.

**Problema 6.14** *Obtener la función de Green del problema* $x'' + x = f(t)$, $x(0) = 0 = x(1)$ *resolviendo la ecuación* $G'' + G = \delta(t-s)$, *con las correspondientes condiciones de contorno.*

**Solución:**

Resolvemos la ecuación por transformada de Laplace, sabiendo que $x(0) = 0$, $\Gamma(k,s) = T(G)(t,s)$,

$$\frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} + G(t,s) = \delta(t-s) \Rightarrow (1+k^2)\Gamma(k,s) - G_0' = e^{-ks},$$

$$\Gamma(k,s) = \frac{G_0' + e^{-ks}}{1+k^2},$$

e, invirtiendo la transformación, recordando que la transformada de $f(t-s)\theta(t-s)$ es $e^{-sk}F(k)$

$$G(t,s) = G_0' \sin t + \theta(t-s)\sin(t-s).$$

Queda por imponer la condición de contorno $G(1,s) = 0$,

$$0 = G_0' \sin 1 + \sin(1-s) \Rightarrow G_0' = \frac{\sin(s-1)}{\sin 1}.$$

Por tanto, la función de Green es

$$\begin{aligned} G(t,s) &= \frac{\sin t \sin(s-1)}{\sin 1} + \theta(t-s)\sin(t-s) \\ &= \begin{cases} \dfrac{\sin t \sin(s-1)}{\sin 1} & t \le s \\ \\ \dfrac{\sin t \sin(s-1)}{\sin 1} + \sin(t-s) = \dfrac{\sin s \sin(t-1)}{\sin 1} & t \ge s \end{cases}, \end{aligned}$$

resultado que coincide con el que se obtiene por el método habitual. □

**Problema 6.15** *Hallar la función de Green para el problema* $x'' + x' - 2x = f(t)$, $x(0) - x'(0) = 0 = x(1)$. *Aplicarla al caso* $f(t) = t$.

**Solución:**

Reescribimos el problema en forma de Sturm-Liouville. Como $a(t) = 1$, $p(t) = e^t$,

$$\left(e^t x'\right)' - 2e^t x = e^t f(t) = g(t),$$

y aplicamos la expresión de la función de Green a dos soluciones de la ecuación homogénea.

Como la solución general de la ecuación homogénea es $x(t) = k_1 e^t + k_2 e^{-2t}$, la solución que verifica la primera condición de contorno es

$$0 = x(0) - x'(0) = k_1 + k_2 - k_1 + 2k_2 \Rightarrow k_2 = 0, \quad x_1(t) = e^t,$$

y la que verifica la segunda,

$$0 = x(1) = k_1 e + k_2 e^{-2} \Rightarrow k_2 = -k_1 e^3, \quad x_2(t) = e^t - e^{3-2t},$$

y su wronskiano es

$$pW(x_1, x_2) = p(t) \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = e^t \begin{vmatrix} e^t & e^t - e^{3-2t} \\ e^t & e^t + 2e^{3-2t} \end{vmatrix} = 3e^3,$$

por tanto la función de Green es

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{x_1(s)x_2(t)}{p(0)|W|(x_1,x_2)(0)} = \dfrac{e^{s+t-3} - e^{s-2t}}{3} & 0 \le s \le t \\ \\ \dfrac{x_1(t)x_2(s)}{p(0)|W|(x_1,x_2)(0)} = \dfrac{e^{s+t-3} - e^{t-2s}}{3} & t \le s \le 1 \end{cases} . \square$$

Aplicamos este resultado a la función $g(t) = te^t$,

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^1 G(t,s) s e^s \, ds = \int_0^t \frac{e^{2s+t-3} - e^{2s-2t}}{3} s \, ds + \int_t^1 \frac{e^{2s+t-3} - e^{t-s}}{3} s \, ds \\ &= \frac{e^{t-3} - e^{-2t}}{12} + \frac{3e^{t-1} - 1}{4} - \frac{t}{2}. \ \square \end{aligned}$$

**Problema 6.16** *Hallar la función de Green para el problema* $\left(tx'\right)' - x/t = f(t)$, $x(1) + x'(1) = 0 = x(2)$. *Aplicarla al caso* $f(t) = t$.

**Solución:**

En este caso, la función $p(t) = t$. La ecuación es de Euler,

$$t^2 x'' + tx' - x = tf(t),$$

con lo cual es sencillo obtener la solución general de la ecuación homogénea,

$$x(t) = k_1 t + \frac{k_2}{t}.$$

La solución que verifica la primera condición de contorno es

$$0 = x(1) + x'(1) = k_1 + k_2 + k_1 - k_2 \Rightarrow k_1 = 0, \quad x_1(t) = \frac{1}{t},$$

y la que verifica la segunda,

$$0 = x(2) = 2k_1 + \frac{k_2}{2} \Rightarrow k_2 = -4k_1, \quad x_2(t) = t - \frac{4}{t},$$

y su wronskiano es

$$pW(x_1, x_2) = p(t) \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} 1/t & t - 4/t \\ -1/t^2 & 1 - 4/t^2 \end{vmatrix} = 2,$$

por tanto la función de Green es

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{x_1(s)x_2(t)}{p(1)|W|(x_1,x_2)(1)} = \dfrac{t - 4/t}{2s} & 1 \le s \le t \\ \\ \dfrac{x_1(t)x_2(s)}{p(1)|W|(x_1,x_2)(1)} = \dfrac{s - 4/s}{2t} & t \le s \le 2 \end{cases} . \square$$

Aplicamos este resultado a la función $f(t) = t$,

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_1^2 G(t,s)s\,ds = \int_1^t \frac{t - 4/t}{2s} s\,ds + \int_t^2 \frac{s - 4/s}{2t} s\,ds \\ &= \frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} - \frac{2}{3t}. \ \square \end{aligned}$$

A este resultado se puede llegar directamente resolviendo el problema

$$t^2 x'' + tx' - x = t^2, \quad x(1) + x'(1) = 0 = x(2).$$

La solución general de la ecuación de Euler es

$$x(t) = k_1 t + \frac{k_2}{t} + \frac{t^2}{3},$$

y las condiciones de contorno imponen

$$0 = x(1) + x'(1) = 2k_1 + 1, \quad 0 = x(2) = 2k_1 + \frac{k_2}{2} + \frac{4}{3} \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{2},\ k_2 = -\frac{2}{3},$$

de acuerdo con el resultado obtenido con la función de Green.

**Problema 6.17** *Obtener el desarrollo de $f(t) = t$ en serie de senos y cosenos en $[-\pi, \pi]$. Estudiar la convergencia de la serie de Fourier. Usar la serie para calcular las sumas $\sum (-1)^n/(2n+1)$, $\sum n^{-2}$.*

**Solución:**

Los desarrollos en este intervalo son de la forma

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\,dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\,dt.$$

La función $f$ es impar, con lo cual los coeficientes $a_n$ son nulos, ya que los cosenos son funciones pares y el intervalo $[-\pi, \pi]$ es simétrico.

Por tanto, integrando por partes, $u = t$, $v = -n^{-1}\cos nt$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin nt\,dt = -\frac{1}{n\pi}\left[t\cos nt\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\,dt \\ &= -\frac{2(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2\pi}\left[\sin nt\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2(-1)^n}{n}, \end{aligned}$$

$$f(t) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nt. \ \Box$$

Como la función es de clase $C^1$, la serie converge puntualmente a $f(t)$ para $t \in (-\pi, \pi)$. En los extremos, $\pm\pi$, converge al valor $(f(-\pi) + f(\pi))/2 = 0$. $\Box$

Usamos el valor de la suma de la serie en $t = \pi/2$,

$$\frac{\pi}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n}\sin(n\pi/2) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{2}{2m+1}(-1)^m \Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4},$$

teniendo en cuenta que, para los múltiplos pares de $\pi/2$ el seno se anula y para los impares, toma valores $\pm 1$. $\Box$

Para calcular la suma $\sum n^{-2}$, usamos la identidad de Parseval,

$$4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \pi\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^3 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \ \Box$$

**Problema 6.18** *Obtener el desarrollo de $f(t) = t^2$ en serie de senos y cosenos en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Estudiar la convergencia de la serie de Fourier. Usar la serie para calcular las sumas $\sum(-1)^n/n^2$, $\sum n^{-2}$, $\sum n^{-4}$.*

**Solución:**

Los desarrollos en este intervalo son de la forma

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt + \sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nt,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt.$$

La función $f$ es par, con lo cual los coeficientes $b_n$ son nulos, ya que los senos son funciones impares y el intervalo $[-\pi, \pi]$ es simétrico.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^2\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Integrando por partes, $u = t^2$, $v = n^{-1}\sin nt$,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos nt\,dt = \frac{1}{n\pi}\left[t^2\sin nt\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin nt\,dt \\
&= \frac{2}{n^2\pi}\left[t\cos nt\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\,dt = \frac{4(-1)^n}{n^2} - \frac{2}{n^3\pi}\left[\sin nt\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{4(-1)^n}{n^2},
\end{aligned}$$

haciendo el cambio $u = 2t$, $v = n^{-2}\cos nt$,

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt. \ \square$$

Como la función es de clase $C^1$ Y $f(-\pi) = \pi^2 = f(\pi)$, la serie converge en todos los puntos a los respectivos valores $f(t)$. $\square$

Usamos el valor de la suma de la serie en $t = \pi$,

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \ \square$$

y en $t = 0$,

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}. \ \square$$

Para calcular la suma $\sum n^{-4}$, usamos la identidad de Parseval,

$$\frac{2}{9}\pi^5 + 16\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi}{2}|a_0|^2 + \pi\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}t^4\,dt = \frac{2}{5}\pi^5,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \ \square$$

**Problema 6.19** *Hallar el desarrollo de Fourier de la función coseno en serie de senos en el intervalo* $[0,\pi]$. *Usar el resultado para calcular* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(4n^2-1)^2}$.

**Solución:**

Las series de Fourier en senos en el intervalo $[0,\pi]$ son

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nt, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt.$$

En nuestro caso,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nt\cos t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{\sin(n+1)t + \sin(n-1)t\}dt \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n+1)t}{n+1} + \frac{\cos(n-1)t}{n-1}\right]_0^{\pi} = \frac{1+(-1)^n}{\pi}\left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right\} \\
&= \frac{2n}{\pi}\frac{1+(-1)^n}{n^2-1},
\end{aligned}$$

con lo cual se anulan los términos impares y los pares tienen por expresión,

$$b_{2n} = \frac{8}{\pi}\frac{n}{4n^2-1}, \qquad b_{2n+1} = 0.$$

Obviamente el coeficiente $b_1$ no puede calcularse por la fórmula general, ya que hay el denominador es nulo, pero,

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin t \cos t\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin 2t\, dt = -\frac{1}{2\pi}[\cos 2t]_0^\pi = 0,$$

de acuerdo, no obstante, con la fórmula general obtenida.

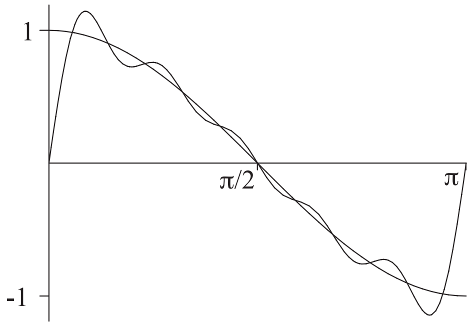


Figura 6.2: Desarrollo de Fourier de la función coseno en serie de senos

El desarrollo pedido es, por tanto,

$$\cos t = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin 2nt. \;\square$$

Obviamente, dado que las funciones seno se anulan en $0, \pi$, el desarrollo de Fourier convergerá a cero en dichos puntos. $\square$

Para la suma infinita usamos la identidad de la energía,

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\pi \cos^2 t\, dt = \int_0^\pi |f(t)|^2\, dt = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2 = \frac{32}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(4n^2-1)^2},$$

de donde despejamos la expresión buscada,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{64}. \;\square$$

**Problema 6.20** *Hallar el desarrollo de Fourier de la función seno en serie de cosenos en el intervalo* $[0, \pi]$*. Utilizar el resultado para calcular* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

**Solución:**

Las series de Fourier en cosenos en el intervalo $[0,\pi]$ son

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt,\qquad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\cos nt\,dt.$$

En nuestro caso,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\cos nt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{\sin(n+1)t+\sin(1-n)t\}dt\\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n+1)t}{n+1}+\frac{\cos(1-n)t}{1-n}\right]_0^{\pi}=\frac{1+(-1)^n}{\pi}\left\{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right\}\\
&= \frac{2}{\pi}\frac{1+(-1)^n}{1-n^2},
\end{aligned}$$

con lo cual se anulan los términos impares y los pares tienen por expresión,

$$a_0=\frac{4}{\pi},\quad a_{2n}=\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2},\qquad a_{2n+1}=0.$$

Obviamente el coeficiente $a_1$ no puede calcularse por la fórmula general, ya que ahí el denominador es nulo, pero

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos t\sin t\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2t\,dt=-\frac{1}{2\pi}[\cos 2t]_0^{\pi}=0,$$

de acuerdo, no obstante, con la fórmula general obtenida.

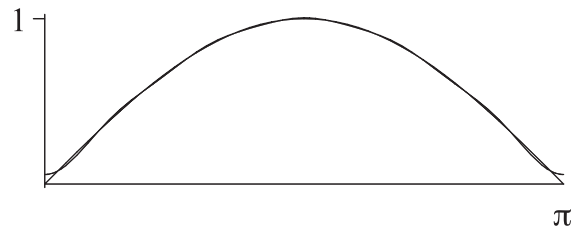


Figura 6.3: Desarrollo de Fourier de la función seno en serie de cosenos

El desarrollo pedido es, por tanto,

$$f(t)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}\cos 2nt.\ \square$$

Por el teorema de convergencia que hemos enunciado, como $\sin t$ es una función de clase $C^1$, sin puntos de discontinuidad, el desarrollo converge a $\sin(t)$ para todo valor de $t\in[0,\pi]$.

En particular, en $t=0$,

$$0=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}.\ \square$$

Para la segunda suma infinita usamos la identidad de la energía,

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=\int_0^{\pi}|f(t)|^2\,dt=\frac{\pi}{4}|a_0|^2+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2=\frac{4}{\pi}+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2},$$

de donde despejamos la expresión buscada,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.\ \square$$

**Problema 6.21** *Hallar el desarrollo de Fourier de la función* $f(t)=\operatorname{signo}(t)$ *en serie de senos y coseno en* $[-\pi,\pi]$*. ¿A qué valores converge el desarrollo en dicho intervalo? Calcular la suma de la serie* $\displaystyle\sum_{n\ \text{impar}} n^{-2}$*.*

**Solución:**

Las series de Fourier en senos y cosenos en el intervalo $[-\pi,\pi]$ son

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nt,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt.$$

En nuestro caso, como la función signo es impar, lo mismo que los senos, los coeficientes $a_n$ se anulan y

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{signo}(t)\sin nt\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{signo}(t)\sin nt\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nt\,dt\\ &= -\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nt}{n}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n}=\begin{cases}0 & n\ \text{par}\\ 4/n\pi & n\ \text{impar}\end{cases}.\end{aligned}$$

El desarrollo pedido es, por tanto,

$$\operatorname{signo}(t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n\ \text{impar}}^{\infty}\frac{\sin nt}{n}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}.\ \square$$

Por el teorema de convergencia que hemos enunciado, como $\sin t$ es una función de clase $C^1$ a trozos, con discontinuidad en $t=0$, el desarrollo converge a $\operatorname{signo}(t)$ para todo valor de $t\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$.

En $t=0$, punto de discontinuidad, converge a

$$\frac{\operatorname{signo}(0^-)+\operatorname{signo}(0^+)}{2}=\frac{-1+1}{2}=0.$$

Y en los extremos $t=\pm\pi$ converge a

$$\frac{\operatorname{signo}(-\pi)+\operatorname{signo}(\pi)}{2}=\frac{-1+1}{2}=0.$$

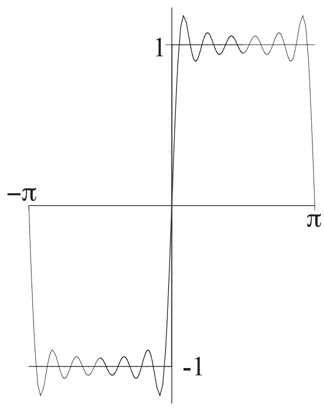


Figura 6.4: Desarrollo de Fourier de la función signo en serie de senos y cosenos

Para la suma infinita usamos la identidad de la energía,

$$\begin{aligned} 2\pi &= \int_{-\pi}^{\pi} dt = \int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{signo}\,(t))^2 \; dt = \frac{\pi}{2} |a_0|^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \\ &= \frac{16}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

de donde despejamos la expresión buscada,

$$\sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}. \; \square$$

**Problema 6.22** *Calcular el desarrollo de la función* $f(t) = \cosh t$ *en serie de exponenciales imaginarias en el intervalo* $[-\pi, \pi]$. *¿A qué valores converge el desarrollo de Fourier de* $f$ *en los puntos de* $[-\pi, \pi]$*? Calcular la suma de las siguientes series,* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)^2}$.

**Solución:**

Las series de Fourier en cosenos en el intervalo $[-\pi, \pi]$ son

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{int}, \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \, dt.$$

En nuestro caso,

$$\begin{aligned}
f_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\cosh t\,dt = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{e^{(1-in)t}+e^{-(1+in)t}\}\,dt \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{(1-in)t}}{1-in}-\frac{e^{-(1+in)t}}{1+in}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{(1-in)\pi}-e^{-(1-in)\pi}}{1-in}+\frac{e^{(1+in)\pi}-e^{-(1+in)\pi}}{1+in}\right] \\
&= \frac{(-1)^n\sinh\pi}{2\pi}\left[\frac{1}{1-in}+\frac{1}{1+in}\right] = \frac{(-1)^n\sinh\pi}{\pi}\frac{1}{1+n^2},
\end{aligned}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sinh\pi}{\pi}\frac{(-1)^n}{1+n^2}e^{int}. \ \square$$

Desglosando los términos negativos y positivos,

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sinh\pi}{\pi}\frac{(-1)^n}{1+n^2}e^{int} = \frac{\sinh\pi}{\pi} + \sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}}\frac{\sinh\pi}{\pi}\frac{(-1)^n}{1+n^2}e^{int} \\
&= \frac{\sinh\pi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\pi}{\pi}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(e^{int}+e^{-int}) \\
&= \frac{\sinh\pi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sinh\pi}{\pi}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos nt.
\end{aligned}$$

El coseno hiperbólico es de clase $C^\infty$, además $\cosh\pi = \cosh(-\pi)$, luego su desarrollo de Fourier converge al valor de la función en todo punto. $\square$

Usamos los resultados de convergencia del desarrollo de Fourier en $t = 0$, $t = \pi$,

$$1 = \cosh 0 = \frac{\sinh\pi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sinh\pi}{\pi}\frac{(-1)^n}{1+n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{2\sinh\pi} - \frac{1}{2},$$

$$\cosh\pi = \frac{\sinh\pi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sinh\pi}{\pi}\frac{1}{1+n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi\cosh\pi}{2\sinh\pi} - \frac{1}{2}. \ \square$$

Finalmente usamos la identidad de Parseval para calcular la suma de la última serie,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\cosh^2 t\,dt &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cosh 2t}{2}\,dt = \left[\frac{t}{2}+\frac{\sinh 2t}{4}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi + \frac{\sinh 2\pi}{2} \\
&= 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f_n|^2 = 2\frac{\sinh^2\pi}{\pi} + 4\frac{\sinh^2\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+n^2)^2},
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+n^2)^2} = \frac{\pi}{4}\coth\pi + \frac{\pi^2}{4\sinh^2\pi} - \frac{1}{2}. \ \square$$

**Problema 6.23** *Obtener el desarrollo de Fourier de $f(t) = \cot t$ en serie de exponenciales imaginarias en el intervalo $[0,\pi]$ sin realizar integrales. ¿Converge?*

**Solución:**

Usando exponenciales imaginarias, podemos escribir, usando la suma de la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1/(1-r)$,

$$\begin{aligned}
\cot t &= i\frac{e^{it}+e^{-it}}{e^{it}-e^{it}} = i\frac{e^{2it}+1}{e^{2it}-1} = -i(e^{2it}+1)\sum_{n=0}^{\infty} e^{2int} \\
&= -i\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{2i(n+1)t}+e^{2int}\right) = -i\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{2int}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{2int},
\end{aligned}$$

de donde concluimos que $f_n = -2i$ para $n$ positivo, $f_n = 0$ para $n$ negativo y $f_0 = -i$. □

La serie geométrica converge para $|r| < 1$. Por tanto, como $|r| = |e^{2it}| = 1$, vemos que la serie no converge para $t$ real.

Esto es consecuente con que la función cotangente no es de clase $C^1$ en el intervalo $[0, \pi]$ ya que diverge tanto en 0 como en $\pi$.