Capítulo 7

Ecuación de Laplace

Problema 7.1 *Sea $u(x,y)$ una función armónica para $x, y \in (0,\pi)$ que es nula en el borde de dicho cuadrado salvo $u(x,0) = 3\sin x$, $x \in (0,\pi)$.*

Solución:

Sabemos que la ecuación se puede resolver usando series de Fourier,

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n\pi} \sin nx,$$

si la función $u(x,0)$ admite desarrollo de Fourier en el intervalo $(0,\pi)$,

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin nx, \qquad f_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx.$$

El desarrollo de $f(x) = 3\sin x$ en serie de senos no precisa integrales, ya que podemos leer directamente que todos los coeficientes f_n son nulos salvo $f_1 = 3$.

Por tanto, la solución del problema es

$$u(x,y) = \frac{3\sinh(\pi - y)}{\sinh \pi} \sin x. \ \Box$$

Problema 7.2 *Hallar en forma de serie la solución del problema para la ecuación de Laplace $\Delta u(x,y) = u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u(0,y) = 0$, $u(L,y) = 0$, $u(x,0) = f(x)$, $u_y(x,0) = g(x)$ para $x \in (0,L)$, $y > 0$. Aplicarlo al caso $L = \pi$, $u(x,0) = 0$, $u_y(x,0) = N^{-1}\sin Nx$, donde N es un número natural. Tomar el límite de la solución cuando N tiende a infinito. Interpretar el resultado. Aplicarlo también al caso $L = \pi$, $u(x,0) = 0$, $u_y(x,0) = x$.*

Solución:

Se trata de un problema mixto, ya que las dos primeras condiciones son de contorno y las dos últimas, iniciales, pensando en y como en una coordenada temporal.

Intentaremos resolver la ecuación de Laplace por separación de variables, buscando soluciones de la forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$, que sustituidas en la ecuación,

$$0 = u_{xx} + u_{yy} = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) \Rightarrow -\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda,$$

nos permiten separar las variables de la ecuación y reducirla a dos ecuaciones ordinarias,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad Y''(y) - \lambda Y(y) = 0.$$

Las condiciones de contorno se traducen en condiciones de contorno para la primera ecuación ordinaria,

$$X(0) = 0, \qquad X(L) = 0.$$

Resolvemos primero el problema para $X(x)$,

$$X''(x) + \lambda X(0) = 0, \qquad X(0) = 0, \quad X(L) = 0,$$

que corresponde a condiciones de contorno de extremos fijos y ya lo hemos resuelto con anterioridad y tiene por autovalores y autofunciones

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

y sus múltiplos.

Por tanto, por superposición lineal de soluciones $u(x,y) = X(x)Y(y)$, obtendremos soluciones más generales

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Abordamos la otra ecuación, lineal ordinaria y homogénea, con valores de λ restringidos ya a los autovalores del problema de contorno,

$$Y_n'' - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Y_n = 0,$$

cuya solución general, dado que tiene autovalores $\pm n\pi/L$ es

$$Y_n(y) = a_n e^{n\pi y/L} + b_n e^{-n\pi y/L} = A_n \cosh\frac{n\pi y}{L} + B_n \sinh\frac{n\pi y}{L},$$

para $n = 1, 2, \ldots$. Usaremos la forma hiperbólica de la solución general. Por tanto,

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cosh\frac{n\pi y}{L} + B_n \sinh\frac{n\pi y}{L}\right) \sin\frac{n\pi x}{L},$$

resuelve tanto la ecuación como las condiciones de contorno.

Falta utilizar las condiciones iniciales, $u(x,0) = f(x)$, $u_y(x,0) = g(x)$. Comenzamos con la primera,

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Por tanto, si $f(x)$ tiene desarrollo en serie de senos en el intervalo $[0, L]$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \qquad f_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx,$$

comparando ambas expresiones, como el desarrollo de Fourier es único, obtenemos los coeficientes $A_n = f_n$, $n = 1, 2, \dots$

Los coeficientes B_n los obtenemos con la otra condición, para lo cual necesitamos la derivada,

$$u_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} \left(A_n \sinh \frac{n\pi y}{L} + B_n \cosh \frac{n\pi y}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L},$$

$$g(x) = u_y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Así pues, si $g(x)$ tiene desarrollo en serie de senos en el intervalo $[0, L]$,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \qquad g_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx,$$

comparando ambas expresiones, como el desarrollo de Fourier es único, obtenemos los coeficientes $B_n = Lg_n/n\pi$, $n = 1, 2, \dots$

Ya tenemos identificados todos los coeficientes de nuestra solución, así que podemos afirmar:

"El problema de la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ para $x \in (0, L)$, $y > 0$ con condiciones mixtas $u(x, 0) = f(x)$, $u_y(x, 0) = g(x)$, $u(0, y) = 0 = u(L, y)$ para $x \in (0, L)$, $y > 0$, tiene solución

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n \cosh \frac{n\pi y}{L} + \frac{Lg_n}{n\pi} \sinh \frac{n\pi y}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L},$$

si las funciones $f(x)$, $g(x)$ admiten desarrollo convergente de Fourier en el intervalo $(0, L)$"

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \qquad f_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx,$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \qquad g_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx. \ \square$$

En el caso, $L = \pi$, las expresiones se simplifican

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n \cosh ny + \frac{g_n}{n} \sinh ny \right) \sin nx,$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin nx, \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin nx.$$

Si $f(x) = 0$, es obvio que todos los coeficientes f_n son nulos. Si $g(x) = N^{-1} \sin Nx$, la propia función es su desarrollo en serie, así que $g_N = 1/N$ y el resto de coeficientes son nulos. Por tanto, la solución en este caso es

$$u(x, y) = \frac{\sinh Ny \sin Nx}{N^2}. \ \Box$$

Observamos que, si tomamos el límite N tendiendo a infinito, el dato inicial es trivial $u(x, 0) = 0$, $u_y(x, 0) = 0$, ya que el seno está acotado por la unidad, así que $g(x)$ decrece como $1/N$. La solución en ese caso es la trivial $u(x, y) \equiv 0$, como es fácil comprobar. Sin embargo, para $y \neq 0$, la solución $u(x, y) = N^{-2} \sinh Ny \sin Nx$ tiende a infinito como una exponencial e^{Ny}, en lugar de tender a cero.

Por tanto, las condiciones iniciales conducen a malos problemas para la ecuación de Laplace. Esto es razonable, ya que la ecuación de Laplace aparece en problemas estacionarios y, por ello, no tiene mucho sentido considerar la coordenada y como un tiempo. $\Box$

En el caso $f(x) = 0$ todos los coeficientes f_n son nulos. Y $g(x) = x$ tiene coeficientes

$$g_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x \cos nx}{n} \right]_0^\pi = \frac{2(-1)^{n+1}}{n},$$

con lo cual la serie de la solución es

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2} \sinh ny \sin nx. \ \Box$$

La serie de Fourier en senos en $[0, \pi]$ de $g(x) = x$, al ser de clase C^∞, converge a x para $x \in (0, \pi)$ y converge a cero en los extremos. Por tanto, la serie sólo converge a un valor distinto del de la función en $x = \pi$. $\Box$

Problema 7.3 *Hallar en forma de serie la solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace $\Delta u(x, y) = 0$ para $x \in (0, L)$, $y \in (0, M)$ con condiciones de contorno $u(x, M) = f(x)$, $u(x, 0) = 0$ para $x \in (0, L)$, $u(0, y) = 0 = u(L, y)$ para $y \in (0, M)$. Aplicar el resultado al caso en el que $L = \pi = M$, $f(x) = 5 \sin x \cos x$. Comprobar explícitamente que la función obtenida satisface la ecuación y las condiciones de contorno. Aplicar el resultado al caso en el que $L = \pi = M$, $f(x) = 1$.*

Solución:

Consideremos funciones armónicas $u(x, y)$ es un rectángulo, $x \in (0, L)$, $y \in (0, M)$. Intentaremos resolver la ecuación de Laplace por separación de variables, buscando soluciones de la forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$, que sustituidas en la ecuación,

$$0 = u_{xx} + u_{yy} = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) \Rightarrow -\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda,$$

nos permiten separar las variables de la ecuación y reducirla a dos ecuaciones ordinarias,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad Y''(y) - \lambda Y(y) = 0.$$

Tenemos un problema de Dirichlet simplificado, en el que sólo hay condiciones de contorno no triviales en uno de los lados del rectángulo,

$$u(x, M) = f(x),\ u(x, 0) = 0, \qquad u(0, y) = 0 = u(L, y),$$

para $x \in (0, L)$, $y \in (0, M)$.

Las condiciones de contorno se traducen en condiciones de contorno para las ecuaciones ordinarias,

$$X(0) = 0 = X(L), \quad Y(0) = 0.$$

Resolvemos primero el problema para $X(x)$,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad X(0) = 0 = X(L).$$

Este problema ya lo hemos resuelto con anterioridad y tiene por autovalores y autofunciones,

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Abordamos la otra ecuación,

$$Y_n'' - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Y = 0 \Rightarrow Y_n(y) = A_n \sinh\frac{n\pi y}{L} + B_n \cosh\frac{n\pi y}{L},$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Imponemos la condición de contorno $Y_n(0) = 0$,

$$0 = Y_n(0) = B_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

y, por tanto, a falta de la condición inhomogénea, la solución se puede expresar en forma de serie,

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sinh\frac{n\pi y}{L} \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Falta por imponer la condición inhomogénea $u(x, M) = f(x)$,

$$f(x) = u(x, M) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\frac{n\pi M}{L} \sin\frac{n\pi x}{L},$$

que es un desarrollo en serie de senos.

Por tanto, si la función $f(x)$ admite desarrollo de Fourier en serie de senos,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad f_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = A_n \sinh\frac{n\pi M}{L},$$

tenemos la solución del problema de contorno:

"El problema de la ecuación de Laplace $\Delta u(x, y) = 0$ para $x \in (0, L)$, $y \in (0, M)$ con condiciones de contorno $u(x, M) = f(x)$, $u(x, 0) = 0$ para $x \in (0, L)$, $u(0, y) = 0 = u(L, y)$ para $y \in (0, M)$ tiene solución

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\sinh\frac{n\pi y}{L}}{\sinh\frac{n\pi M}{L}} \sin\frac{n\pi x}{L},$$

si la función $f(x)$ admite desarrollo de Fourier en el intervalo $(0, L)$ en serie de senos"

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \qquad f_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En el caso $L = \pi = M$ se simplifica el resultado anterior,

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\sinh ny}{\sinh n\pi} \sin nx, \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin nx,$$

$$f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La función $f(x) = 5 \sin x \cos x$ tiene un desarrollo de Fourier con sólo un término,

$$5 \sin x \cos x = \frac{5}{2} \sin 2x \Rightarrow f_2 = \frac{5}{2},\ f_n = 0,\ n \neq 2,$$

$$u(x, y) = \frac{5}{2} \frac{\sinh 2y}{\sinh 2\pi} \sin 2x,$$

como se comprueba explícitamente,

$$u(x, 0) = 0 = u(0, y) = u(\pi, y), \quad u(x, \pi) = \frac{5}{2} \sin 2x,$$

$$u_{yy}(x, y) = 10 \frac{\sinh 2y}{\sinh 2\pi} \sin 2x = -u_{xx}(x, y). \ \Box$$

Para la función $f(x) = 1$, en cambio, el desarrollo de Fourier tiene infinitos términos,

$$f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx\, dx = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} \left(1 - (-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ 4/n\pi & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$u(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{\sinh ny}{n \sinh n\pi} \sin nx \ \Box.$$

Problema 7.4 *Hallar en forma de serie la solución del problema de Neumann para la ecuación de Laplace $\Delta u(x, y) = 0$ para $x \in (0, L)$, $y \in (0, M)$ con condiciones de contorno $u_y(x, 0) = -g(x)$, $u_y(x, M) = 0$ para $x \in (0, L)$, $u_x(0, y) = 0 = u_x(L, y)$ para $y \in (0, M)$.*

Solución:

Consideremos funciones armónicas $u(x, y)$ es un rectángulo, $x \in (0, L)$, $y \in (0, M)$. Intentaremos resolver la ecuación de Laplace por separación de variables, buscando soluciones de la forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$, que sustituidas en la ecuación,

$$0 = u_{xx} + u_{yy} = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) \Rightarrow -\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda,$$

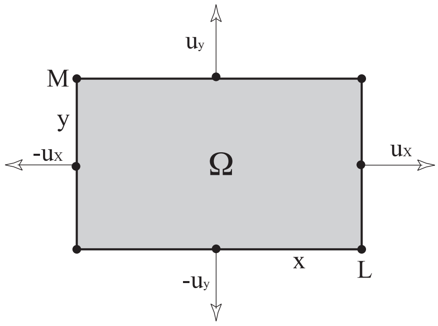

Figura 7.1: Problema de Neumann en el rectángulo $[0, L] \times [0, M]$

nos permiten separar las variables de la ecuación y reducirla a dos ecuaciones ordinarias,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad Y''(y) - \lambda Y(y) = 0.$$

Tenemos un problema de Neumann simplificado, en el que sólo hay condiciones de contorno no triviales en uno de los lados del rectángulo,

$$u_y(x, 0) = -g(x), \; u_y(x, M) = 0, \qquad u_x(0, y) = 0 = u_x(L, y),$$

para $x \in (0, L)$, $y \in (0, M)$.

Las condiciones de contorno se traducen en condiciones de contorno para las ecuaciones ordinarias,

$$X'(0) = 0 = X'(L), \quad Y'(M) = 0.$$

Resolvemos primero el problema para $X(x)$,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad X'(0) = 0 = X'(L).$$

Este problema ya lo hemos resuelto con anterioridad y tiene por autovalores y autofunciones,

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Abordamos la otra ecuación,

$$Y_n'' - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Y = 0 \Rightarrow Y_0(y) = A_0 + B_0 y, \quad Y_n(y) = A_n e^{n\pi y/L} + B_n e^{-n\pi y/L},$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Imponemos la condición de contorno $Y_n'(M) = 0$,

$$0 = Y_0'(M) = B_0 \Rightarrow Y_0(y) = A_0,$$

$$0 = Y_n'(M) = A_n \frac{n\pi}{L} e^{n\pi M/L} - B_n \frac{n\pi}{L} e^{-n\pi M/L} \Rightarrow B_n = A_n e^{2n\pi M/L}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} Y_n(y) &= A_n \left(e^{n\pi y/L} + e^{-n\pi y/L} e^{2n\pi M/L}\right) \\ &= A_n e^{n\pi M/L} \left(e^{n\pi(M-y)/L} + e^{-n\pi(M-y)/L}\right) = a_n \cosh \frac{n\pi(M-y)}{L} \end{aligned}$$

denotando $a_0 = A_0$, $a_n = 2A_n e^{n\pi M/L}$, $n \in \mathbb{N}$, y, por tanto, a falta de la condición inhomogénea, la solución se puede expresar en forma de serie,

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cosh \frac{n\pi(M-y)}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Falta por imponer la condición inhomogénea $u_y(x,0) = -g(x)$,

$$g(x) = -u_y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{n\pi}{L} \sinh \frac{n\pi M}{L} \cos \frac{n\pi x}{L},$$

que es un desarrollo en serie de cosenos al que le falta el coeficiente g_0.

Por tanto, si la función $g(x)$ admite desarrollo de Fourier en serie de cosenos,

$$g(x) = \frac{g_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad g_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{n\pi a_n}{L} \sinh \frac{n\pi M}{L},$$

$$g_0 = \frac{2}{L} \int_0^L g(x)\, dx = 0,$$

tenemos la solución del problema de contorno:

"El problema de la ecuación de Laplace $\Delta u(x,y) = 0$ para $x \in (0,L)$, $y \in (0,M)$ con condiciones de contorno $u_y(x,0) = -g(x)$, $u_y(x,M) = 0$ para $x \in (0,L)$, $u_x(0,y) = 0 = u_x(L,y)$ para $y \in (0,M)$ tiene solución

$$u(x,y) = K + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n} \frac{\cosh \frac{n\pi(M-y)}{L}}{\sinh \frac{n\pi M}{L}} \cos \frac{n\pi x}{L},$$

si la función $g(x)$ admite desarrollo de Fourier en el intervalo $(0,L)$ en serie de cosenos,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \qquad g_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx,$$

con coeficiente g_0 nulo,"

$$g_0 = \frac{2}{L} \int_0^L g(x)\, dx = 0.$$

La constante $K = a_0$ aparece ya que el problema de Neumann tiene solución única salvo constante. Es la constante a_0 que el desarrollo de Fourier no puede identificar, ya que desaparece al calcular la derivada.

La condición de tener el coeficiente g_0 era esperable, ya que el dato del problema de Neumann tiene que tener integral nula en el borde del recinto. En nuestro caso, como el dato se anula en tres de los lados del rectángulo, la condición necesaria se reduce a la anulación de la integral de la función $g(x)$ en el cuarto lado. □

Problema 7.5 *Hallar en forma de serie la solución del problema de Neumann para la ecuación de Laplace $\Delta u(x,y)=0$ para $x\in(0,L)$, $y\in(0,M)$ con condiciones de contorno $u_y(x,M)=g(x)$, $u_y(x,0)=0$ para $x\in(0,L)$, $u_x(0,y)=0=u_x(L,y)$ para $y\in(0,M)$. Aplicar el resultado al caso en el que $L=\pi=M$, $g(x)=2\sin^2 3x$. Lo mismo para $g(x)=2\sin^2 3x-1$.*

Solución:

Se puede abordar con un cambio de variable usando el resultado anterior, pero lo resolveremos directamente.

Consideremos funciones armónicas $u(x,y)$ es un rectángulo, $x\in(0,L)$, $y\in(0,M)$. Intentaremos resolver la ecuación de Laplace por separación de variables, buscando soluciones de la forma $u(x,y)=X(x)Y(y)$, que sustituidas en la ecuación,

$$0=u_{xx}+u_{yy}=X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)\Rightarrow -\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\lambda,$$

nos permiten separar las variables de la ecuación y reducirla a dos ecuaciones ordinarias,

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\qquad Y''(y)-\lambda Y(y)=0.$$

Tenemos un problema de Neumann simplificado, en el que sólo hay condiciones de contorno no triviales en uno de los lados del rectángulo,

$$u_y(x,M)=g(x),\ u_y(x,0)=0,\qquad u_x(0,y)=0=u_x(L,y),$$

para $x\in(0,L)$, $y\in(0,M)$.

Las condiciones de contorno se traducen en condiciones de contorno para las ecuaciones ordinarias,

$$X'(0)=0=X'(L),\quad Y'(0)=0.$$

Resolvemos primero el problema para $X(x)$,

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\qquad X'(0)=0=X'(L).$$

Este problema ya lo hemos resuelto con anterioridad y tiene por autovalores y autofunciones,

$$k_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\qquad X_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{L},\quad n=0,1,2,\ldots$$

Abordamos la otra ecuación,

$$Y_n''-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2Y=0\Rightarrow Y_0(y)=A_0+B_0y,\quad Y_n(y)=A_n\cosh\frac{n\pi y}{L}+B_n\sinh\frac{n\pi y}{L},$$

para $n\in\mathbb{N}$.

Imponemos la condición de contorno $Y_n'(0)=0$,

$$0=Y_0'(0)=B_0\Rightarrow Y_0(y)=A_0,$$

$$0=Y_n'(0)=B_n\frac{n\pi}{L}$$

y observamos que todos los coeficientes B_n tienen que ser nulos.

Por tanto, a falta de la condición inhomogénea, la solución se puede expresar en forma de serie,

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cosh \frac{n\pi y}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Falta por imponer la condición inhomogénea $u_y(x,M) = g(x)$,

$$g(x) = u_y(x,M) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{L} \sinh \frac{n\pi M}{L} \cos \frac{n\pi x}{L},$$

que es un desarrollo en serie de cosenos al que le falta el coeficiente g_0.

Por tanto, si la función $g(x)$ admite desarrollo de Fourier en serie de cosenos,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \qquad g_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{n\pi A_n}{L} \sinh \frac{n\pi M}{L},$$

$$g_0 = \frac{2}{L} \int_0^L g(x)\, dx = 0,$$

tenemos la solución del problema de contorno:

"El problema de la ecuación de Laplace $\Delta u(x,y) = 0$ para $x \in (0,L)$, $y \in (0,M)$ con condiciones de contorno $u_y(x,M) = g(x)$, $u_y(x,0) = 0$ para $x \in (0,L)$, $u_x(0,y) = 0 = u_x(L,y)$ para $y \in (0,M)$ tiene solución

$$u(x,y) = K + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n} \frac{\cosh \frac{n\pi}{L} y}{\sinh \frac{n\pi M}{L}} \cos \frac{n\pi x}{L},$$

si la función $g(x)$ admite desarrollo de Fourier en el intervalo $(0,L)$ en serie de cosenos,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \qquad g_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx,$$

con coeficiente g_0 nulo,"

$$g_0 = \frac{2}{L} \int_0^L g(x)\, dx = 0.$$

La constante $K = a_0$ aparece ya que el problema de Neumann tiene solución única salvo constante. Es la constante a_0 que el desarrollo de Fourier no puede identificar, ya que desaparece al calcular la derivada.

La condición de tener el coeficiente g_0 era esperable, ya que el dato del problema de Neumann tiene que tener integral nula en el borde del recinto. En nuestro caso, como el dato se anula en tres de los lados del rectángulo, la condición necesaria se reduce a la anulación de la integral de la función $g(x)$ en el cuarto lado. □

Usando trigonometría elemental,

$$g(x) = 2\sin^2 3x = 1 - \cos 6x = \frac{g_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos nx,$$

la función $g(x)$ tiene desarrollo de Fourier con coeficientes nulos salvo $g_0 = 2$, $g_6 = -1$. Por tanto, este dato de contorno no cumple la condición necesaria $g_0 = 0$, por lo que el problema de Neumann en este caso no tiene solución. □

En cambio, en el otro caso,

$$g(x) = 2\sin^2 3x - 1 = -\cos 6x = \frac{g_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos nx,$$

la función $g(x)$ tiene desarrollo de Fourier con coeficientes nulos salvo $g_6 = -1$. Por tanto, la solución de problema de Neumann en este caso es

$$u(x,y) = K - \frac{\cosh 6y \cos 6x}{6\sinh 6\pi}. \ \square$$

Problema 7.6 *Sea $u(x,y)$ una función armónica para $x, y \in (0,\pi)$ cuya derivada normal es nula en el borde de dicho cuadrado salvo $u_y(x,0) = 5\cos 3x$, $x \in (0,\pi)$.*

Solución:

En primer lugar, comprobamos la condición necesaria para que el problema de Neumann tenga solución,

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \frac{du}{d\nu}\,ds \quad &= \quad -\int_0^{\pi} u_y(x,0)\,dx + \int_0^{\pi} u_x(\pi,y)\,dy - \int_0^{\pi} u_y(x,\pi) \\ &+ \quad \int_0^{\pi} u_x(0,y)\,dy = -5\int_0^{\pi} \cos 3x\,dx = -\frac{5}{3}\left[\sin 3x\right]_0^{\pi} = 0.\end{aligned}$$

Luego el problema de Neumann tiene solución, que podemos obtener usando series de Fourier,

$$u(x,y) = K + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n} \frac{\cosh n(\pi - y)}{\sinh n\pi} \cos nx,$$

si la función $g(x) = -u_y(x,0)$ admite desarrollo de Fourier en el intervalo $(0,\pi)$ en serie de cosenos,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos\frac{n\pi}{L}x,$$

con coeficiente g_0 nulo.

El desarrollo de $g(x) = -5\cos 3x$ en serie de cosenos no precisa integrales, ya que podemos leer directamente que todos los coeficientes g_n son nulos salvo $g_3 = -5$.

Por tanto, la solución del problema es

$$u(x,y) = K - \frac{5\cosh 3(\pi - y)}{3\sinh 3\pi} \cos 3x. \ \square$$

Problema 7.7 *Hallar en forma de serie la solución del problema para la ecuación de Laplace $\Delta u(x,y) = 0$ para $x \in (0,L)$, $y \in (0,M)$ con condiciones de contorno $u(x,0) = 0$, $u(x,M) = f(x)$ para $x \in (0,L)$, $u_x(0,y) = 0 = u_x(L,y)$ para $y \in (0,M)$. Aplicar el resultado al caso en el que $L = \pi = M$, $f(x) = \cos^2 2x$. Lo mismo para $f(x) = \cos(x/2)$.*

Solución:

Consideremos funciones armónicas $u(x,y)$ es un rectángulo, $x \in (0,L)$, $y \in (0,M)$. Intentaremos resolver la ecuación de Laplace por separación de variables, buscando soluciones de la forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$, que sustituidas en la ecuación,

$$0 = u_{xx} + u_{yy} = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) \Rightarrow -\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda,$$

nos permiten separar las variables de la ecuación y reducirla a dos ecuaciones ordinarias,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad Y''(y) - \lambda Y(y) = 0.$$

Tenemos un problema de contorno simplificado, en el que sólo hay condiciones de contorno no triviales en uno de los lados del rectángulo,

$$u(x,M) = f(x), \; u(x,0) = 0, \qquad u_x(0,y) = 0 = u_x(L,y),$$

para $x \in (0,L)$, $y \in (0,M)$.

Las condiciones de contorno se traducen en condiciones de contorno para las ecuaciones ordinarias,

$$X'(0) = 0 = X'(L), \quad Y(0) = 0.$$

Resolvemos primero el problema para $X(x)$,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad X'(0) = 0 = X'(L).$$

Este problema ya lo hemos resuelto con anterioridad y tiene por autovalores y autofunciones,

$$k_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Abordamos la otra ecuación,

$$Y_n'' - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Y_n = 0 \Rightarrow Y_0(y) = A_0 + B_0 y, \quad Y_n(y) = A_n \cosh\frac{n\pi y}{L} + B_n \sinh\frac{n\pi y}{L},$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Imponemos la condición de contorno $Y_n(0) = 0$,

$$0 = Y_0(0) = A_0 \Rightarrow Y_0(y) = B_0 y,$$

$$0 = Y_n(0) = A_n$$

y observamos que todos los coeficientes A_n tienen que ser nulos.

Por tanto, a falta de la condición inhomogénea, la solución se puede expresar en forma de serie,

$$u(x,y) = B_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\frac{n\pi}{L} y \cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Falta por imponer la condición inhomogénea $u(x,M) = f(x)$,

$$f(x) = u(x,M) = B_0 M + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \frac{n\pi M}{L} \cos \frac{n\pi x}{L},$$

que es un desarrollo en serie de cosenos.

Por tanto, si la función $f(x)$ admite desarrollo de Fourier en serie de cosenos,

$$f(x) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \qquad \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx = f_n = B_n \sinh \frac{n\pi M}{L},$$

$$\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, dx = f_0 = 2B_0 M,$$

tenemos la solución del problema de contorno:

"El problema de la ecuación de Laplace $\Delta u(x,y) = 0$ para $x \in (0,L)$, $y \in (0,M)$ con condiciones de contorno $u(x,M) = f(x)$, $u(x,0) = 0$ para $x \in (0,L)$, $u_x(0,y) = 0 = u_x(L,y)$ para $y \in (0,M)$ tiene solución

$$u(x,y) = \frac{f_0}{2M} y + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\sinh \frac{n\pi y}{L}}{\sinh \frac{n\pi M}{L}} \cos \frac{n\pi x}{L},$$

si la función $f(x)$ admite desarrollo de Fourier en el intervalo $(0,L)$ en serie de cosenos,

$$f(x) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \qquad f_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

Este problema no es ni de Dirichlet, ni de Neumann, ya que mezcla ambas condiciones, según los lados del rectángulo. La solución en forma de series es única y existe si $f(x)$ admite desarrollo en serie de cosenos. □

En el caso $L = \pi = M$,

$$u(x,y) = \frac{f_0}{2\pi} y + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\sinh ny}{\sinh n\pi} \cos nx,$$

$$f(x) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos nx, \qquad f_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx\, dx.$$

Usando trigonometría elemental,

$$f(x) = \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos nx,$$

la función $f(x)$ tiene desarrollo de Fourier con coeficientes nulos salvo $f_0 = 1$, $f_4 = 1/2$. Por tanto, la solución de problema en este caso es

$$u(x,y) = \frac{y}{2\pi} + \frac{\sinh 4y \cos 4x}{2 \sinh 4\pi}. \ \square$$

En el otro caso, $f(x) = \cos(x/2)$, sí que nos vemos abocados a calcular el desarrollo de Fourier,

$$\begin{aligned}
f_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(x/2)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\left(n+1/2\right)x}{n+1/2} + \frac{\sin\left(n-1/2\right)x}{n-1/2}\right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n+1/2} - \frac{(-1)^n}{n-1/2}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1/4}, \quad n = 0, 1, \ldots
\end{aligned}$$

con lo cual la solución del problema es

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi^2}y + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1/4}\frac{\sinh ny}{\sinh n\pi}\cos nx. \ \square$$

Problema 7.8 *Una función $u(r,\phi)$ satisface la ecuación de Laplace en un círculo de radio R centrado en el origen, y verifica $u(R,\phi) = \cos^2\phi$. Hallar $u(r,\phi)$ en el interior del círculo.*

Solución:

La función $u(r,\phi)$ es periódica en el ángulo ϕ, $u(r,0) = u(r,2\pi)$, por lo que este problema se puede abordar por series de Fourier, que verifican esta propiedad. Sabemos que las funciones armónicas en el disco de radio a se pueden expresar como

$$u(r,\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n\cos n\phi + b_n \sin n\phi),$$

siendo a_n, b_n los coeficientes del desarrollo de Fourier del valor de la función en el borde,

$$u(R,\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\phi + b_n\sin n\phi) = \cos^2\phi = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\phi}{2},$$

que en nuestro caso no es preciso realizar, ya que es patente que todos los coeficientes b_n son nulos, lo mismo que los a_n, salvo $a_0 = 1$, $a_2 = 1/2$. Por tanto, la solución del problema es

$$u(r,\phi) = \frac{1}{2} + \frac{r^2}{2R^2}\cos 2\phi. \ \square$$

Problema 7.9 *La función $u(r,\phi)$ es armónica en el interior del círculo de radio a centrado en el origen, siendo $u(a,\phi) = 5 + \sin\phi\cos\phi$. Hallar $u(r,\varphi)$ en el interior del círculo.*

Solución:

La función $u(r,\phi)$ es periódica en el ángulo ϕ, $u(r,0) = u(r,2\pi)$, por lo que este problema se puede abordar por series de Fourier, que verifican esta propiedad. Sabemos que las funciones armónicas en el disco de radio a se pueden expresar como

$$u(r,\phi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n(a_n\cos n\phi+b_n\sin n\phi)\,,$$

siendo a_n, b_n los coeficientes del desarrollo de Fourier del valor de la función en el borde,

$$u(a,\phi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\phi+b_n\sin n\phi)=5+\frac{\sin 2\phi}{2},$$

que en nuestro caso no es preciso realizar, ya que es patente que todos los coeficientes son nulos, salvo $a_0=10$, $b_2=1/2$. Por tanto, la solución del problema es

$$u(r,\phi)=5+\frac{r^2}{2a^2}\sin 2\phi.\ \square$$

Problema 7.10 *Hallar en forma de serie la solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace $\Delta u(r,\phi)=0$ en el semicírculo de radio R, $y\geq 0$, con condiciones de contorno $u(R,\phi)=f(\phi)$, $u(r,0)=0=u(r,\pi)$, $r\in(0,R)$, $\phi\in(0,\pi)$. Aplicarlo al caso $f(\phi)=6\sin 4x\cos 4x$.*

Solución:

Consideremos funciones armónicas $u(r,\phi)$ en un círculo centrado en el origen y de radio R. Intentaremos resolver la ecuación de Laplace en coordenadas polares, $r\in(0,R)$, $\phi\in(0,\pi)$,

$$u_{rr}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_{\phi\phi}}{r^2}=0,$$

por separación de variables, buscando soluciones de la forma $u(r,\phi)=R(r)\Phi(\phi)$, que sustituidas en la ecuación,

$$0=u_{rr}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_{\phi\phi}}{r^2}=R''(r)\Phi(\phi)+\frac{R'(r)\Phi(\phi)}{r}+\frac{R(r)\Phi''(\phi)}{r^2},$$

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)}=\lambda,$$

nos permiten separar las variables de la ecuación y reducirla a dos ecuaciones ordinarias,

$$r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda R(r)=0,\qquad \Phi''(\phi)+\lambda\Phi(\phi)=0.$$

Las condiciones de contorno nos dan el valor de u en $r=R$ y sobre el eje Y, donde toma el valor nulo. Las condiciones homogéneas $u(r,0)=0$, $u(r,\pi)=0$ conducen a condiciones de contorno

$$\Phi(0)=0,\qquad \Phi(\pi)=0,$$

lo cual lleva a un problema de contorno para Φ ya resuelto con anterioridad, que tiene por autovalores $\lambda_n=n^2$ y autofunciones $\Phi_n(\phi)=\sin n\phi$, $n\in\mathbb{N}$.

Queda por resolver la ecuación en la coordenada radial,

$$r^2 R_n''(r) + r R_n'(r) - n^2 R_n(r) = 0,$$

que es una ecuación de Euler, que se reduce, como hemos visto, a una ecuación lineal con coeficientes constantes con el cambio de variable independiente $r = e^s \Leftrightarrow s = \ln r$,

$$\ddot{R}_n - n^2 R_n = 0 \Rightarrow R_n(s) = A_n e^{ns} + B_n e^{-ns} = A_n r^n + B_n r^{-n},\ n = 1, 2, \ldots$$

denotando por un punto la derivada con respecto a s.

Llegado este punto, observamos que aparecen funciones singulares, las potencias inversas r^{-n}. Imponiendo que las soluciones sean funciones acotadas y regulares en el círculo, es patente que todos los coeficientes B_n tienen que ser nulos. Por tanto, las funciones radiales son $R_n(r) = A_n r^n$, $n = 1, \ldots$

Y podemos escribir la solución de la ecuación de Laplace en el círculo como

$$u(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \sin n\phi$$

Usando la condición de contorno inhomogénea, $u(R, \phi) = f(\phi)$,

$$u(R, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n R^n \sin n\phi = f(\phi),$$

y si la función $f(\phi)$ admite desarrollo de Fourier en serie de senos,

$$f(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin n\phi, \qquad f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\phi) \sin n\phi \, d\phi,$$

observamos, por la unicidad del desarrollo en serie de Fourier, que $A_n R^n = f_n$, $n \in \mathbb{N}$ y, por tanto, podemos identificar los coeficientes de la función armónica con los coeficientes del desarrollo de Fourier:

"El problema de la ecuación de Laplace $\Delta u(r, \phi) = 0$ para $r \in (0, R)$, $\phi \in (0, \pi)$ con condiciones de contorno $u(R, \phi) = f(\phi)$, $u(r, 0) = 0 = u(r, \pi)$ tiene solución

$$u(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(\frac{r}{R}\right)^n \sin n\phi \tag{7.1}$$

si la función $f(\phi)$ admite desarrollo de Fourier en serie de senos,"

$$f(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin n\phi \qquad f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\phi) \sin n\phi \, d\phi. \ \square$$

En nuestro caso particular $f(\phi) = 3 \sin 8\phi$, con lo cual el desarrollo de Fourier en senos sólo tiene no nulo el término $f_8 = 3$ y, por tanto, la solución del problema de Dirichlet queda

$$u(r, \phi) = \frac{3r^8}{R^8} \sin 8\phi. \ \square$$

Problema 7.11 *Sea u una función armónica en el disco de radio a centrado en el origen y que se anula en el diámetro $y = 0$. Demostrar que $u(x, -y) = -u(x, y)$.*

Solución:

Sabemos que las funciones armónicas en el disco de radio a se pueden expresar como

$$u(r, \phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi) .$$

El diámetro $y = 0$ es el eje X corresponde a las semirrectas $\phi = 0$, $\phi = \pi$. Por tanto, la función verifica $u(r, 0) = 0 = u(r, \pi)$, lo que trasladado al desarrollo supone

$$0 = u(r, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n a_n,$$

serie nula de términos positivos, de donde se deduce que los coeficientes a_n son todos nulos. Con la condición $u(r, \pi)$ se llega a la misma conclusión.

Por tanto, la condición de anulación impone que el desarrollo sea sólo de senos,

$$u(r, \phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n b_n \sin n\phi.$$

Comprobamos la condición de imparidad $u(x, -y) = -u(x, y)$. Como en coordenadas polares cambiar y por $-y$ es una reflexión respecto al eje X, supone cambiar ϕ por $-\phi$,

$$u(r, -\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n b_n \sin n(-\phi) = -\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n b_n \sin n\phi = -u(r, \phi),$$

ya que el seno es una función impar. □

Problema 7.12 *Sea $u(x, y)$ una función armónica para $x \in (0, \pi)$, $y > 0$. Se tiene que $u(x, 0) = 1$ para $x \in (0, \pi)$, $u(0, y) = 0 = u(\pi, y)$ para $y > 0$. Hallar $u(x, y)$.*

Solución:

Dado que $u(0, y) = 0 = u(\pi, y)$, hacemos un desarrollo de Fourier en serie de senos que cumpla dichas condiciones de contorno,

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin nx,$$

que sustituimos en la ecuación de Laplace,

$$0 = u_{xx} + u_{yy} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(Y''(y) - n^2 Y(y)\right) \sin nx,$$

y por la unicidad del desarrollo de Fourier, obtenemos un sistema infinito de ecuaciones ordinarias lineales homogéneas,

$$Y'' - n^2 Y = 0 \Rightarrow Y_n(y) = a_n \cosh ny + b_n \sinh ny, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, la función más general que es solución de la ecuación de Laplace con dichas condiciones de contorno es

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cosh ny + b_n \sinh ny) \sin nx.$$

Sabemos además que $u(x,0) = 1$. Por tanto,

$$1 = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx,$$

y los coeficientes a_n no son más que los del desarrollo de la función unidad en serie de senos,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & n \text{ par} \\ 4/n\pi & n \text{ impar} \end{array} \right. .$$

Pero esto fija sólo los coeficientes a_n, no los b_n. Luego el problema está mal planteado, ya que es indeterminado, como ya sabíamos, ya que es un problema mixto de valores iniciales para la ecuación de Laplace, que sólo permite problemas de contorno.

El problema tendría solución única si impusiéramos la condición adicional de que u sea acotada en infinito. Dado que

$$a_n \cosh ny + b_n \sinh ny = \frac{a_n + b_n}{2} e^{ny} + \frac{a_n - b_n}{2} e^{-ny},$$

eliminar los términos divergentes en infinito supone eliminar las exponenciales crecientes e^{ny}, lo que se consigue si $b_n = -a_n$.

Por tanto, la función buscada tiene desarrollo en serie

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-ny} \sin nx = \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{e^{-ny}}{n} \sin nx \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1} \frac{e^{-(2n-1)y}}{2n-1} \sin(2n-1)x. \ \Box \end{aligned}$$

Problema 7.13 *Hallar en forma de serie la solución del problema de Neumann para la ecuación de Laplace $\Delta u(r,\phi) = 0$ en el círculo de radio R con condiciones de contorno $u_r(R,\phi) = g(\phi)$, $r \in (0,R)$, $\phi \in (0,2\pi)$. Aplicar el resultado al caso en el que $g(\phi) = 1$ y al caso en el que $g(\phi) = \sin\phi\cos\phi$.*

Solución:

Consideremos funciones armónicas $u(r,\phi)$ en un círculo centrado en el origen y de radio R. Intentaremos resolver la ecuación de Laplace en coordenadas polares, $r \in (0,R)$, $\phi \in (0,2\pi)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0,$$

por separación de variables, buscando soluciones de la forma $u(r,\phi) = R(r)\Phi(\phi)$, que sustituidas en la ecuación,

$$0 = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\phi\phi}}{r^2} = R''(r)\Phi(\phi) + \frac{R'(r)\Phi(\phi)}{r} + \frac{R(r)\Phi''(\phi)}{r^2},$$

$$\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = \lambda,$$

nos permiten separar las variables de la ecuación y reducirla a dos ecuaciones ordinarias,

$$r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0, \qquad \Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0.$$

Independientemente del problema de contorno que tengamos que resolver, las propias coordenadas polares exigen condiciones de periodicidad,

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi), \qquad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi),$$

lo cual conduce a un problema de contorno para Φ ya resuelto con anterioridad, que tiene por autovalores $\lambda_n = n^2$ y autofunciones $\Phi_0(\phi) = 1$, $\Phi_n(\phi) = \cos n\phi$, $\tilde{\Phi}_n(\phi) = \sin n\phi$, $n \in \mathbb{N}$.

Queda por resolver la ecuación en la coordenada radial,

$$r^2R_n''(r) + rR_n'(r) - n^2R_n(r) = 0,$$

que es una ecuación de Euler, que se reduce, como hemos visto, a una ecuación lineal con coeficientes constantes con el cambio de variable independiente $r = e^s \Leftrightarrow s = \ln r$,

$$\ddot{R}_n - n^2R_n = 0 \Rightarrow R_n(s) = A_ne^{ns} + B_ne^{-ns} = A_nr^n + B_nr^{-n}, \ n \neq 0,$$

$$\ddot{R}_0 = 0 \Rightarrow R_0(s) = A_0 + B_0s = A_0 + B_0\ln r,$$

denotando por un punto la derivada con respecto a s.

Llegado este punto, observamos que aparecen funciones singulares, las potencias inversas r^{-n} y $\ln r$. Imponiendo que las soluciones sean funciones acotadas y regulares en el círculo, es patente que todos los coeficientes B_n tienen que ser nulos. Por tanto, las funciones radiales son $R_n(r) = r^n$, $n = 0, 1, \ldots$

Y podemos escribir la solución de la ecuación de Laplace en el círculo como

$$u(r,\phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n\cos n\phi + \tilde{A}_n\sin n\phi\right).$$

El problema de Neumann supone conocer la derivada de u normal al borde del recinto. En este caso el recinto es un círculo, así que la dirección normal es la radial, por lo que la condición de contorno de Neumann es de la forma $u_r(R,\phi) = g(\phi)$. Sustituyendo,

$$u_r(R,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} nR^{n-1}\left(A_n\cos n\phi + \tilde{A}_n\sin n\phi\right) = g(\phi),$$

y si la función $g(\phi)$ admite desarrollo de Fourier en serie de senos y cosenos,

$$g(\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\phi)\cos n\phi\, d\phi, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\phi)\sin n\phi\, d\phi,$$

observamos, por la unicidad del desarrollo en serie de Fourier, que $A_0 = K$ está indeterminado, ya que tenemos sólo condiciones sobre las derivadas de u, algo que sucede siempre con los problemas de Neumann.

El coeficiente a_0 del desarrollo del dato de Neumann tiene que ser nulo, lo cual era de esperar, ya que los problemas de Neumann tienen como condición necesaria para tener solución que la integral de la derivada normal de u a lo largo del borde del recinto se anule y, en nuestro caso,

$$0 = \int_\Gamma u_r(R,\phi)\, ds = R\int_0^{2\pi} g(\phi)\, d\phi = R\pi a_0.$$

Por su parte, $nR^{n-1}A_n = a_n$, $nR^{n-1}B_n = b_n$, $n \in \mathbb{N}$ y, por tanto, podemos identificar los coeficientes de la función armónica con los coeficientes del desarrollo de Fourier:

"El problema de la ecuación de Laplace $\Delta u(r,\phi) = 0$ para $r \in (0,R)$, $\phi \in (0,2\pi)$ con condición de contorno $u_r(R,\phi) = g(\phi)$ tiene solución

$$u(r,\phi) = K + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{nR^{n-1}} (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi),$$

unica salvo una constante K, si la función $g(\phi)$ admite desarrollo de Fourier en serie de senos y cosenos con término independiente a_0 nulo"

$$g(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\phi)\cos n\phi\, d\phi, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\phi)\sin n\phi\, d\phi.$$

Esta solución en serie de Fourier se puede sumar, al igual que se hizo para el problema de Dirichlet,

$$\begin{aligned} u(r_0,\phi_0) - K &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_0^n}{nR^{n-1}} (a_n \cos n\phi_0 + b_n \sin n\phi_0) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\phi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_0^n}{nR^{n-1}} (\cos n\phi_0 \cos\phi + \sin n\phi_0 \sin\phi)\, d\phi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\phi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_0^n}{nR^{n-1}} \cos n(\phi - \phi_0)\, d\phi, \end{aligned}$$

ya que las series de Fourier se pueden integrar bajo condiciones muy generales.

El integrando es la integral de una serie geométrica, como se comprueba desarrollando el coseno en exponenciales imaginarias,

$$\begin{aligned}
2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_0^n}{nR^{n-1}}\cos n\gamma &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_0^n}{nR^{n-1}}e^{in\gamma}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_0^n}{nR^{n-1}}e^{-in\gamma}\\
&= \int_0^{r_0} e^{i\gamma}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{re^{i\gamma}}{R}\right)^{n-1}+e^{-i\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{re^{i\gamma}}{R}\right)^{n-1}\right)dr\\
&= \int_0^{r_0}\left(\frac{Re^{i\gamma}}{R-re^{i\gamma}}+\frac{Re^{-i\gamma}}{R-re^{-i\gamma}}\right)dr\\
&= -R\left[\ln\left(R-re^{i\gamma}\right)+\ln\left(R-re^{-i\gamma}\right)\right]_0^{r_0}\\
&= 2R\ln R-R\ln\left(R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\gamma\right),
\end{aligned}$$

del cual podemos omitir el término constante, ya que lo podemos incorporar a la constante K,

$$u(r_0,\phi_0)=K-\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\phi)\ln\left(R^2+r_0^2-2Rr_0\cos(\phi-\phi_0)\right)\,d\phi.\ \square$$

Procedemos con los casos particulares: el caso $g(\phi)=1$ no tiene solución, ya que no se cumple la condición necesaria,

$$\int_0^{2\pi}g(\phi)\,d\phi=2\pi\neq 0.\ \square$$

El caso $g(\phi)=\sin\phi\cos\phi$ es sencillo, ya que su desarrollo de Fourier,

$$g(\phi)=\frac{\sin 2\phi}{2},$$

tiene todos los coeficientes nulos, salvo $b_2=1/2$. Por tanto, la solución del problema es

$$u(r,\phi)=K+\frac{r^2}{4R}\sin 2\phi.\ \square$$

Problema 7.14 *Hallar en forma de serie la solución del problema de Neumann para la ecuación de Laplace $\Delta u(x,y)=0$ para $x\in(0,L)$, $y\in(0,M)$ con condiciones de contorno $u_y(x,M)=g(x)$, $u_y(x,0)=0$ para $x\in(0,L)$, $u_x(0,y)=0=u_x(L,y)$ para $y\in(0,M)$. Aplicar el resultado al caso en el que $L=\pi=M$, $g(x)=2\sin^2 3x$. Lo mismo para $g(x)=2\sin^2 3x-1$.*

Solución:

Consideremos funciones armónicas $u(x,y)$ es un rectángulo, $x\in(0,L)$, $y\in(0,M)$. Intentaremos resolver la ecuación de Laplace por separación de variables, buscando soluciones de la forma $u(x,y)=X(x)Y(y)$, que sustituidas en la ecuación,

$$0=u_{xx}+u_{yy}=X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)\Rightarrow -\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\lambda,$$

nos permiten separar las variables de la ecuación y reducirla a dos ecuaciones ordinarias,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad Y''(y) - \lambda Y(y) = 0.$$

Tenemos un problema de Neumann simplificado, en el que sólo hay condiciones de contorno no triviales en uno de los lados del rectángulo,

$$u_y(x, M) = g(x),\ u_y(x, 0) = 0, \qquad u_x(0, y) = 0 = u_x(L, y),$$

para $x \in (0, L)$, $y \in (0, M)$.

Las condiciones de contorno se traducen en condiciones de contorno para las ecuaciones ordinarias,

$$X'(0) = 0 = X'(L), \quad Y'(0) = 0.$$

Resolvemos primero el problema para $X(x)$,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad X'(0) = 0 = X'(L).$$

Este problema ya lo hemos resuelto con anterioridad y tiene por autovalores y autofunciones,

$$k_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Abordamos la otra ecuación,

$$Y_n'' - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Y_n = 0 \Rightarrow Y_0(y) = A_0 + B_0 y, \quad Y_n(y) = A_n \cosh\frac{n\pi y}{L} + B_n \sinh\frac{n\pi y}{L},$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Imponemos la condición de contorno $Y_n'(0) = 0$,

$$0 = Y_0'(0) = B_0 \Rightarrow Y_0(y) = A_0,$$

$$0 = Y_n'(0) = B_n\frac{n\pi}{L}$$

y observamos que todos los coeficientes B_n tienen que ser nulos.

Por tanto, a falta de la condición inhomogénea, la solución se puede expresar en forma de serie,

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cosh\frac{n\pi y}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Falta por imponer la condición inhomogénea $u_y(x, M) = g(x)$,

$$g(x) = u_y(x, M) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{L}\sinh\frac{n\pi M}{L}\cos\frac{n\pi x}{L},$$

que es un desarrollo en serie de cosenos al que le falta el coeficiente g_0.

Por tanto, si la función $g(x)$ admite desarrollo de Fourier en serie de cosenos,

$$g(x) = \frac{g_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad g_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{n\pi A_n}{L}\sinh\frac{n\pi M}{L},$$

$$g_0 = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\,dx = 0,$$

tenemos la solución del problema de contorno:

"El problema de la ecuación de Laplace $\Delta u(x,y) = 0$ para $x \in (0,L)$, $y \in (0,M)$ con condiciones de contorno $u_y(x,M) = g(x)$, $u_y(x,0) = 0$ para $x \in (0,L)$, $u_x(0,y) = 0 = u_x(L,y)$ para $y \in (0,M)$ tiene solución

$$u(x,y) = K + \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n} \frac{\cosh\frac{n\pi y}{L}}{\sinh\frac{n\pi M}{L}} \cos\frac{n\pi x}{L},$$

si la función $g(x)$ admite desarrollo de Fourier en el intervalo $(0,L)$ en serie de cosenos,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \qquad g_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$

con coeficiente g_0 nulo,"

$$g_0 = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\,dx = 0.$$

La constante $K = a_0$ aparece ya que el problema de Neumann tiene solución única salvo constante. Es la constante a_0 que el desarrollo de Fourier no puede identificar, ya que desaparece al calcular la derivada.

La condición de tener el coeficiente g_0 era esperable, ya que el dato del problema de Neumann tiene que tener integral nula en el borde del recinto. En nuestro caso, como el dato se anula en tres de los lados del rectángulo, la condición necesaria se reduce a la anulación de la integral de la función $g(x)$ en el cuarto lado. □

Usando trigonometría elemental,

$$g(x) = 2\sin^2 3x = 1 - \cos 6x = \frac{g_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos nx,$$

la función $g(x)$ tiene desarrollo de Fourier con coeficientes nulos salvo $g_0 = 2$, $g_6 = -1$. Por tanto, este dato de contorno no cumple la condición necesaria $g_0 = 0$, por lo que el problema de Neumann en este caso no tiene solución. □

En cambio, en el otro caso,

$$g(x) = 2\sin^2 3x - 1 = -\cos 6x = \frac{g_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos nx,$$

la función $g(x)$ tiene desarrollo de Fourier con coeficientes nulos salvo $g_6 = -1$. Por tanto, la solución de problema de Neumann en este caso es

$$u(x,y) = K - \frac{\cosh 6y \cos 6x}{6\sinh 6\pi}. \ \square$$

Lo comprobamos,

$$u_x(x,y) = \frac{\cosh 6y \sin 6x}{\sinh 6\pi}, \quad u_{xx}(x,y) = \frac{6\cosh 6y \cos 6x}{\sinh 6\pi},$$

$$u_y(x,y) = -\frac{\sinh 6y \cos 6x}{\sinh 6\pi}, \quad u_{yy}(x,y) = -\frac{6\cosh 6y \cos 6x}{\sinh 6\pi}.$$

Obviamente, $u_x(0,y) = 0 = u_x(\pi,y)$, porque el seno se anula en cero y π. Igualmente $u_y(x,0) = 0$, porque se anula el seno hiperbólico. A su vez,

$$u_y(x,\pi) = -\cos 6x = g(x).$$

Y la ecuación de Laplace se verifica, ya que

$$u_{xx}(x,y) = \frac{6\cosh 6y \cos 6x}{\sinh 6\pi} = -u_{yy}(x,y). \ \square$$

Problema 7.15 *Hallar en forma de serie la solución del problema para la ecuación de Laplace* $\Delta u(z,\phi) = u_{zz} + u_{\phi\phi} = 0$*,* $u(0,\phi) = 0$*,* $u(L,\phi) = f(\phi)$*,* $u(z,-\pi) = u(z,\pi)$*,* $u_\phi(z,-\pi) = u_\phi(z,\pi)$ *para* $z \in (0,L)$*,* $\phi \in (-\pi,\pi)$*. Aplicar el resultado al caso en el que* $L = \pi$*,* $f(\phi) = 4\sin 2\phi \cos 2\phi + \cos^2 2\phi$*.*

Solución:

Intentaremos resolver la ecuación de Laplace por separación de variables, buscando soluciones de la forma $u(z,\phi) = Z(z)\Phi(\phi)$, que sustituidas en la ecuación,

$$0 = u_{zz} + u_{\phi\phi} = Z''(z)\Phi(\phi) + Z(z)\Phi''(\phi) \Rightarrow \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = \lambda,$$

nos permiten separar las variables de la ecuación y reducirla a dos ecuaciones ordinarias,

$$Z''(z) - \lambda Z(z) = 0, \qquad \Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0.$$

Tenemos un problema de Dirichlet,

$$u(0,\phi) = 0, \quad u(L,\phi) = f(\phi), \quad u(z,-\pi) = u(z,\pi), \quad u_\phi(z,-\pi) = u_\phi(z,\pi),$$

para $z \in (0,L)$, $\phi \in (-\pi,\pi)$.

Las condiciones de contorno se traducen en condiciones de contorno para las ecuaciones ordinarias,

$$Z(0) = 0, \quad \Phi(-\pi) = \Phi(\pi), \quad \Phi'(-\pi) = \Phi'(\pi).$$

Resolvemos primero el problema para $\Phi(\phi)$,

$$\Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0, \qquad \Phi(-\pi) = \Phi(\pi), \quad \Phi'(-\pi) = \Phi'(\pi),$$

que corresponde a condiciones de contorno periódicas y ya lo hemos resuelto con anterioridad y tiene por autovalores y autofunciones,

$$k_n = n^2, \quad n = 0,1,\ldots,$$

$$\Phi_0(\phi) = 1, \qquad \Phi_n(\phi) = \cos n\phi, \quad \tilde{\Phi}_n(\phi) = \sin n\phi, \qquad n = 1,2,\ldots$$

Abordamos la otra ecuación,

$$Z_n'' - n^2 Z_n = 0 \Rightarrow Z_0(z) = A_0 + B_0 z, \quad Z_n(z) = A_n \cosh nz + B_n \sinh nz,$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Imponemos la condición de contorno $Z_n(0) = 0$,

$$0 = Z_0(0) = A_0 \Rightarrow Z_0(z) = B_0 z,$$

$$0 = Z_n(0) = A_n \Rightarrow Z_n(z) = B_n \sinh nz,$$

y observamos que todos los coeficientes A_n tienen que ser nulos.

Por tanto, a falta de la condición inhomogénea, la solución se puede expresar en forma de serie,

$$u(z, \phi) = B_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cos n\phi + \tilde{B}_n \sin n\phi \right) \sinh nz.$$

Falta por imponer la condición inhomogénea $u(L, \phi) = f(\phi)$,

$$f(\phi) = u(L, \phi) = B_0 L + \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cos n\phi + \tilde{B}_n \sin n\phi \right) \sinh nL,$$

que es un desarrollo en serie de senos y cosenos para $f(\phi)$.

Por tanto, si la función $f(\phi)$ admite desarrollo de Fourier en serie de senos y cosenos,

$$f(\phi) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos n\phi + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n \sin n\phi,$$

$$f_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \cos n\phi \, d\phi, \qquad \tilde{f}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \sin n\phi \, d\phi,$$

comparando ambos desarrollos, concluimos

$$B_0 = \frac{f_0}{2L}, \qquad B_n = \frac{f_n}{\sinh nL}, \quad \tilde{B}_n = \frac{\tilde{f}_n}{\sinh nL}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

"El problema de la ecuación de Laplace $u_{zz} + u_{\phi\phi} = 0$ para $z \in (0, L)$, $\phi \in (-\pi, \pi)$ con condiciones de contorno $u(0, \phi) = 0$, $u(L, \phi) = f(\phi)$, $u(z, -\pi) = u(z, \pi)$, $u_\phi(z, -\pi) = u_\phi(z, \pi)$ tiene solución

$$u(z, \phi) = \frac{f_0}{2L} z + \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n \cos n\phi + \tilde{f}_n \sin n\phi \right) \frac{\sinh nz}{\sinh nL},$$

si la función $f(\phi)$ admite desarrollo de Fourier en el intervalo $(-\pi, \pi)$ en serie de senos y cosenos"

$$f(\phi) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos n\phi + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n \sin n\phi,$$

$$f_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \cos n\phi \, d\phi, \qquad \tilde{f}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \sin n\phi \, d\phi. \ \Box$$

Teniendo en cuenta que un cilindro circular de altura L y radio R, parametrizado en coordenadas cilíndricas por $g(z, \phi) = (R \cos \phi, R \sin \phi, z)$, $z \in (0, L)$, $\phi \in (-\pi, \pi)$ tiene por laplaciano

$$\Delta u = u_{zz} + \frac{u_{\phi\phi}}{R^2},$$

observamos que este problema es un problema de Dirichlet para un cilindro de radio unidad y altura L con datos de contorno sobre las circunferencias situadas en los planos $z = 0$ y $z = L$.

Usando trigonometría elemental,

$$f(\phi) = 4\sin 2\phi \cos 2\phi + \cos^2 2\phi = 2\sin 4\phi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\phi,$$

observamos que la función $f(\phi)$ tiene desarrollo de Fourier con coeficientes nulos salvo $f_0 = 1$, $f_4 = 1/2$, $\tilde{f}_4 = 2$. Por tanto, la solución de problema de Dirichlet en este caso es

$$u(z,\phi) = \frac{1}{2L}z + \frac{1}{\sinh 4L}\left(2\sin 4\phi + \frac{1}{2}\cos 4\phi\right)\sinh 4z. \ \square$$

Lo comprobamos. Obviamente, $u(0,\phi) = 0$, porque se anula el seno hiperbólico, y u es una función periódica de periodo 2π por serlo el seno y el coseno. Además,

$$u(L,\phi) = \frac{1}{2} + 2\sin 4\phi + \frac{1}{2}\cos 4\phi = f(\phi),$$

y también se verifica la ecuación de Laplace,

$$u_{zz} + u_{\phi\phi} = \frac{16}{\sinh 4L}\left(2\sin 4\phi + \frac{1}{2}\cos 4\phi\right)\sinh 4z$$

$$-\frac{16}{\sinh 4L}\left(2\sin 4\phi + \frac{1}{2}\cos 4\phi\right)\sinh 4z = 0. \ \square$$

Problema 7.16 *Hallar en forma de serie la solución del problema para la ecuación de Laplace* $R^2u_{zz} + u_{\phi\phi} = 0$, $u_z(0,\phi) = 0$, $u_z(h,\phi) = g(\phi)$, $u(z,-\pi) = u(z,\pi)$, $u_\phi(z,-\pi) = u_\phi(z,\pi)$ *para* $z \in (0,h)$, $\phi \in (-\pi,\pi)$, *siendo constantes* $h, R > 0$. *Aplicarlo al caso* $h = 1 = R$, $g(\phi) = \phi$. *Aplicarlo al caso* $h = 1 = R$, $g(\phi) = \phi^2$.

Solución:

Se trata de un problema simplificado de Neumann para la ecuación de Laplace en un rectángulo con condiciones de contorno periódicas, es decir, en un cilindro de radio R y altura h. Los datos de contorno se dan en las dos circunferencias del borde, situadas en $z = 0$, $z = h$.

Intentaremos resolver la ecuación de Laplace por separación de variables, buscando soluciones de la forma $u(z,\phi) = Z(z)\Phi(\phi)$, que sustituidas en la ecuación,

$$0 = R^2u_{zz} + u_{\phi\phi} = R^2Z''(z)\Phi(\phi) + Z(z)\Phi''(\phi) \Rightarrow \frac{R^2Z''(z)}{Z(z)} = -\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = \lambda,$$

nos permiten separar las variables de la ecuación y reducirla a dos ecuaciones ordinarias,

$$Z''(z) - \frac{\lambda}{R^2}Z(z) = 0, \qquad \Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0.$$

Las condiciones de contorno se traducen en condiciones de contorno para las ecuaciones ordinarias,

$$Z'(0) = 0, \quad \Phi(-\pi) = \Phi(\pi), \quad \Phi'(-\pi) = \Phi'(\pi).$$

Resolvemos primero el problema para $\Phi(\phi)$,

$$\Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0, \qquad \Phi(-\pi) = \Phi(\pi), \quad \Phi'(-\pi) = \Phi'(\pi),$$

que corresponde a condiciones de contorno periódicas y ya lo hemos resuelto con anterioridad y tiene por autovalores y autofunciones,

$$k_n = n^2, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

$$\Phi_0(\phi) = 1, \qquad \Phi_n(\phi) = \cos n\phi, \quad \tilde{\Phi}_n(\phi) = \sin n\phi, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Abordamos la otra ecuación,

$$Z_n'' - \frac{n^2}{R^2} Z_n = 0 \Rightarrow Z_0(z) = A_0 + B_0 z, \quad Z_n(z) = A_n \cosh\frac{nz}{R} + B_n \sinh\frac{nz}{R},$$

para $n = 1, 2, \ldots$

Necesitamos las derivadas,

$$Z_0'(z) = B_0, \quad Z_n'(z) = \frac{nA_n}{R}\sinh\frac{nz}{R} + \frac{nB_n}{R}\cosh\frac{nz}{R},$$

para imponer la condición de contorno $Z_n'(0) = 0$,

$$0 = Z_0'(0) = B_0 \Rightarrow Z_0(z) = A_0,$$

$$0 = Z_n'(0) = \frac{nB_n}{R} \Rightarrow Z_n(z) = A_n \cosh\frac{nz}{R},$$

y observamos que todos los coeficientes B_n tienen que ser nulos.

Por tanto, a falta de la condición inhomogénea, haciendo uso del principio de superposición lineal, la solución se puede expresar en forma de serie,

$$u(z, \phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos n\phi + \tilde{A}_n \sin n\phi\right) \cosh\frac{nz}{R},$$

y su derivada, que necesitaremos,

$$u_z(z, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{R} \left(A_n \cos n\phi + \tilde{A}_n \sin n\phi\right) \sinh\frac{nz}{R}.$$

Falta por imponer la condición inhomogénea $u_z(h, \phi) = g(\phi)$,

$$g(\phi) = u_z(h, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{R} \left(A_n \cos n\phi + \tilde{A}_n \sin n\phi\right) \sinh\frac{nh}{R},$$

que es un desarrollo en serie de senos y cosenos para $g(\phi)$, sin término constante, lo que impone una condición sobre el dato de contorno, como sucede en los problemas de Neumann.

Por tanto, si la función $g(\phi)$ admite desarrollo de Fourier en serie de senos y cosenos,

$$g(\phi) = \frac{g_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos n\phi + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n \sin n\phi,$$

$$g_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\cos n\phi\, d\phi, \qquad \tilde{g}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)\sin n\phi\, d\phi,$$

comparando ambos desarrollos, concluimos

$$g_0 = 0, \qquad A_n = \frac{Rg_n}{n\sinh\frac{nh}{R}}, \quad \tilde{A}_n = \frac{R\tilde{g}_n}{n\sinh\frac{nh}{R}}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

El coeficiente A_0 no queda determinado, como corresponde a un problema de Neumann, que tiene solución única salvo una constante $K = A_0$.

"El problema de la ecuación de Laplace $R^2u_{zz} + u_{\phi\phi} = 0$ para $z \in (0, h)$, $\phi \in (-\pi, \pi)$ con condiciones de contorno $u_z(0, \phi) = 0$, $u_z(h, \phi) = g(\phi)$, $u(z, -\pi) = u(z, \pi)$, $u_\phi(z, -\pi) = u_\phi(z, \pi)$ tiene solución

$$u(z, \phi) = K + R\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{g_n}{n}\cos n\phi + \frac{\tilde{g}_n}{n}\sin n\phi\right)\frac{\cosh\frac{nz}{R}}{\sinh\frac{nh}{R}},$$

si la función $g(\phi)$ admite desarrollo de Fourier en el intervalo $(-\pi, \pi)$ en serie de senos y cosenos

$$g(\phi) = \frac{g_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos n\phi + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n \sin n\phi,$$

$$g_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)\cos n\phi\, d\phi, \qquad \tilde{g}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)\sin n\phi\, d\phi,$$

con coeficiente g_0 nulo." □

En el caso $h = 1 = R$ las expresiones se simplifican,

$$u(z, \phi) = K + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{g_n}{n}\cos n\phi + \frac{\tilde{g}_n}{n}\sin n\phi\right)\frac{\cosh nz}{\sinh n}.$$

El caso $g(\phi) = \phi^2$ no tiene solución, ya que

$$g_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi^2\, d\phi = \frac{2\pi^3}{3} \neq 0. \ \square$$

El caso $g(\phi) = \phi$, al tratarse esta de una función impar, su desarrollo no tiene términos en coseno. Por tanto, todos los coeficientes g_n son nulos, incluido g_0. Luego habrá solución.

Calculamos el resto de coeficientes,

$$\tilde{g}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi\sin n\phi\, d\phi = \left[\frac{\sin n\phi}{n^2} - \frac{\phi\cos n\phi}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n},$$

y, por tanto, la solución de este problema es

$$u(z, \phi) = K + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2}\sin n\phi\frac{\cosh nz}{\sinh n}. \ \square$$

Problema 7.17 *Sea $u(x,y)$ una función tal que $u_{xx}+u_{yy}=-2\sin x\sin y$ para $x,y\in(0,\pi)$ que satisface $u=0$ en el borde de dicho cuadrado. Calcular $u(x,y)$.*

Solución:

La función satisface las condiciones de contorno $u(0,y)=0=u(\pi,y)$, $u(x,0)=0=u(x,\pi)$. Podemos realizar un desarrollo en serie de senos de la función,

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}Y_n(y)\sin nx,$$

que ya satisface las condiciones $u(0,y)=0=u(\pi,y)$.

El término inhomogéneo $F(x,y)=-2\sin x\sin y$, ya está desarrollado y tiene sólo el coeficiente $n=1$.

Sustituyendo el desarrollo en la ecuación de Poisson,

$$-2\sin y\sin x=u_{xx}+u_{yy}=\sum_{n=1}^{\infty}\big(Y_n''(y)-n^2Y_n(y)\big)=\sin nx,$$

obtenemos, usando la unicidad del desarrollo de Fourier, el siguiente sistema de problemas de contorno,

$$Y_n''(y)-n^2Y_n(y)=\begin{cases}-2\sin y & n=1\\ 0 & n\neq 1\end{cases},\quad Y(0)=0=Y(\pi),$$

haciendo uso de las condiciones restantes, $u(x,0)=0=u(x,\pi)$.

La solución general de las ecuaciones homogéneas $Y_n''-n^2Y_n=0$ es

$$Y_{nh}(y)=A_n\cosh ny+B_n\sinh ny.$$

Para $n>1$ no hay término inhomogéneo, por lo que las condiciones de contorno $Y(0)=0=Y(\pi)$ imponen

$$0=A_n,\qquad 0=A_n\cosh n\pi+B_n\sinh n\pi\Rightarrow A_n=0=B_n,\ n>1,$$

con lo que estas ecuaciones sólo tienen solución trivial $Y_n(y)=0$.

Para $n=1$ necesitamos una solución particular para la fuerza $f(y)=-2\sin y$. Sabemos que la solución tiene que ser de la forma $Y_{1p}(y)=a\cos y+b\sin y$, que sustituida en la ecuación,

$$0=2\sin y+Y_{1p}''-Y_{1p}=(-2a)\cos y+(2-2b)\sin y\Rightarrow a=0,\quad 2-2b=0,$$

nos proporciona los coeficientes indeterminados $a=0$, $b=1$, con lo cual la solución general de la ecuación es

$$Y_1(y)=A_1\cosh y+B_1\sinh y+\sin y,$$

y le podemos imponer las condiciones de contorno,

$$0=Y_1(0)=A_1,\qquad 0=Y_1(\pi)=A_1\cosh\pi+B_1\sinh\pi\Rightarrow A_1=0=B_1,$$

con lo cual llegamos a la conclusión de que los coeficientes del desarrollo de Fourier son $Y_1(y)=\sin y$, $Y_n(y)=0$, $n>1$, que sustituidos en el desarrollo nos proporcionan la solución del problema,

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}Y_n(y)\sin nx=\sin x\sin y.\ \Box$$

Problema 7.18 *Sea u una función armónica y no negativa en el círculo de radio R centrado en el origen, y continua en su borde. Demostrar las desigualdades*

$$\frac{R-||\mathbf{x}||}{R+||\mathbf{x}||}u(\mathbf{0}) \leq u(\mathbf{x}) \leq \frac{R+||\mathbf{x}||}{R-||\mathbf{x}||}u(\mathbf{0}).$$

Utilizar la fórmula integral de Poisson.

Solución:

Sabemos que una función armónica en el círculo de radio R se puede construir como

$$u(r_0,\phi_0) = \frac{R^2-r_0^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\phi)}{R^2+r_0^2-2Rr_0\cos(\phi-\phi_0)}\,d\phi,$$

siendo $f(\phi) = u(R,\phi)$ su valor en la circunferencia del borde.

El denominador de esta integral se puede acotar y sacar fuera de la integral, dado que el coseno toma sus valores en el intervalo $[-1,1]$,

$$(R-r_0)^2 \leq R^2+r_0^2-2Rr_0\cos(\phi-\phi_0) \leq (R+r_0)^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{R-r_0}{R+r_0}\int_0^{2\pi} f(\phi)\,d\phi \leq u(r_0,\phi_0) \leq \frac{1}{2\pi}\frac{R+r_0}{R-r_0}\int_0^{2\pi} f(\phi)\,d\phi.$$

La demostración se completa con el cálculo del valor de u en el centro del círculo,

$$u(\mathbf{0}) = u(0,\phi_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\,d\phi,$$

valor que se puede obtener también con la ley de la media.

Juntando ambos resultados, concluimos

$$\frac{R-r_0}{R+r_0}u(\mathbf{0}) \leq u(r_0,\phi_0) \leq \frac{R+r_0}{R-r_0}u(\mathbf{0}),$$

resultado conocido como desigualdad de Harnack. □

Problema 7.19 *Obtener la función de Green para el problema de Dirichlet en el semiespacio $z>0$ en $\mathbb{R}^3$.*

Solución:

Sabemos que la solución fundamental en el espacio con polo en $\mathbf{x}_0$ es

$$\psi_{\mathbf{x_0}}(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = -\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}.$$

El borde del semiespacio $z>0$ es el plano XY $(z=0)$. Sobre este plano,

$$\psi_{\mathbf{x_0}}(x,y,0) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}}.$$

Para que se anule $G_{\mathbf{x}_0}(x,y,0)$ habrá que añadir a $\psi_{\mathbf{x_0}}$ una función armónica $U_{\mathbf{x}_0}$ cuya contribución sobre el eje X cancele la de la solución fundamental. Por tanto, es preciso que

$$U_{\mathbf{x}_0}(x,y,0) = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}}.$$

La manera de conseguirlo es situar una *carga* negativa en el punto simétrico de $\mathbf{x}_0$ respecto al plano XY, que es $\tilde{\mathbf{x}}_0 = (x_0, y_0, -z_0)$. Así, como los puntos del plano XY son equidistantes de $\mathbf{x}_0$ y de $\tilde{\mathbf{x}}_0$, las contribuciones de ambos se cancelarán, al tener signo opuesto,

$$U_{\mathbf{x}_0}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}_0\|} = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}},$$

que es una función armónica, ya que el polo $(x_0, y_0, -z_0)$ no pertenece al semiespacio $z > 0$.

Por tanto, la función de Green del semiespacio $z > 0$ es

$$G_{\mathbf{x}_0}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}_0\|} - \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}. \ \square$$

La normal exterior al borde del semiespacio $z > 0$ es $\nu = -\mathbf{u_z}$. Por tanto,

$$\frac{dG_{\mathbf{x}_0}(x,y,0)}{d\nu} = -\frac{dG_{\mathbf{x}_0}(x,y,0)}{dz} = \frac{1}{2\pi}\frac{z_0}{\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2\right)^{3/2}},$$

y la solución del problema de Dirichlet, $\Delta u = 0$, $u(x,y,0) = f(x,y)$, será

$$u(x_0,y_0) = \frac{z_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{f(x,y)}{\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2\right)^{3/2}}.$$