Capítulo 8

Ecuación del calor

Problema 8.1 *Hallar la distribución de temperaturas de una varilla infinita sabiendo que el perfil inicial de temperaturas es gaussiano,* $u(x,0) = T_0 e^{-x^2/a^2}$*,* $x \in \mathbb{R}$*,* $a > 0$*. ¿Qué sucede para* $u(x,0) = T_0 e^{x^2/a^2}$*?*

Solución:

La solución se obtiene integrando el dato inicial con el núcleo de la ecuación del calor,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{T_0}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/a^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}\, dy = \frac{T_0 a e^{-\frac{x^2}{4\kappa t + a^2}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{4\kappa t + a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\, dz \\ &= \frac{T_0 a}{\sqrt{4\kappa t + a^2}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa t + a^2}} \end{aligned}$$

completando cuadrados y realizando el cambio de variable a variable z,

$$\frac{x^2 - 2xy + y^2}{4\kappa t} + \frac{y^2}{a^2} = \left(\frac{\sqrt{4\kappa t + a^2}\, y}{a\sqrt{4\kappa t}} - \frac{ax}{\sqrt{4\kappa t + a^2}\sqrt{4\kappa t}} \right)^2 + \frac{x^2}{4\kappa t + a^2},$$

$$z = \frac{\sqrt{4\kappa t + a^2}\, y}{a\sqrt{4\kappa t}} - \frac{ax}{\sqrt{4\kappa t + a^2}\sqrt{4\kappa t}}. \ \square$$

Obsérvese que la distribución de temperaturas en cada instante de tiempo $t = T$ sigue siendo gaussiana. Obviamente, para t tendiendo a infinito la temperatura tiende a cero en todos los puntos de la varilla.

El segundo problema corresponde esencialmente a cambiar a^2 por $-a^2$ y es fácil comprobar que la solución es

$$u(x,t) = \frac{T_0 a}{\sqrt{a^2 - 4\kappa t}} e^{\frac{x^2}{a^2 - 4\kappa t}}.$$

Sin embargo, esta solución es singular en $t = a^2/4\kappa$ y es compleja para tiempos posteriores a dicho valor.

Esta situación era esperable, ya que el dato inicial no es acotado. $\square$

Problema 8.2 *Una varilla infinita está inicialmente a temperatura T_0, excepto un tramo de longitud L, que está a temperatura $T_1 > T_0$. Hallar la distribución de temperaturas en el futuro.*

Solución:

La distribución inicial de temperaturas es

$$f(x) = u(x,0) = \begin{cases} T_0 & T \notin [0,L] \\ T_1 & T \in [0,L] \end{cases},$$

por tanto, la distribución futura de temperaturas es

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)K(x,y,t)\,dy = T_0 \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y,t)\,dy \\ &+ \frac{T_1 - T_0}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int_0^L e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}\,dy = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/\sqrt{4\kappa t}}^{(L-x)/\sqrt{4\kappa t}} e^{-z^2}\,dz \\ &= T_0 + \frac{T_1 - T_0}{2} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{L-x}{\sqrt{4\kappa t}} \right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\kappa t}} \right) \right), \end{aligned}$$

usando la función error, que se define como integral de la gaussiana,

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2}\,dz,$$

y el cambio de variable $z = (y-x)/\sqrt{4\kappa t}$. $\square$

Obviamente, para t tendiendo a infinito, como $\operatorname{erf}(0) = 0$, la temperatura tiende a T_0 en todos los puntos de la varilla.

Problema 8.3 *Hallar para $t > 0$ la distribución de temperaturas $u(x,t)$ en una barra semiinfinita ($x \geq 0$), si en $t = 0$ está a temperatura uniforme T_0, y para $t > 0$ se mantiene su extremo a temperatura T_1.*

Solución:

El dato inicial es $u(x,0) = T_0$ y el de contorno es $u(0,t) = T_1$. Para que la condición de contorno sea homogénea realizamos el cambio

$$u(x,t) = T_1 + v(x,t),$$

de modo que $v(x,t)$ satisface

$$v_t - \kappa v_{xx} = 0, \qquad v(x,0) = T_0 - T_1, \qquad v(0,t) = 0, \qquad x,t > 0,$$

que podemos resolver por extensión impar a toda la varilla,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} T_1 - T_0 & x < 0 \\ T_0 - T_1 & x > 0 \end{cases},$$

usando el núcleo integral de la ecuación del calor,

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(y)K(x,y,t)\,dy = (T_0 - T_1) \int_0^{\infty} K(x,y,t)\,dy \\ &+ (T_1 - T_0) \int_{-\infty}^0 K(x,y,t)\,dy. \end{aligned}$$

Realizamos la primera integral mediante el cambio de variable $z = (y - x)/\sqrt{4\kappa t}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\int_0^\infty e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}\,dy &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/\sqrt{4\kappa t}}^\infty e^{-z^2}\,dz = \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/\sqrt{4\kappa t}}^0 e^{-z^2}\,dz\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\kappa t}}\right),\end{aligned}$$

y, del mismo modo, la segunda,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}\,dy &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-x/\sqrt{4\kappa t}} e^{-z^2}\,dz = \frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/\sqrt{4\kappa t}}^0 e^{-z^2}\,dz\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\kappa t}}\right).\end{aligned}$$

Juntando ambas integrales, obtenemos la solución del problema,

$$u(x,t) = T_1 + (T_0 - T_1)\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\kappa t}}\right). \ \square$$

Obviamente, cuando t tiende a infinito, la temperatura tiende en todos los puntos de la varilla al valor T_1, ya que $\mathrm{erf}\,(0) = 0$. Esto es lo esperable, ya que quiere decir que la varilla acaba alcanzando la temperatura del foco de calor situado en el extremo $x = 0$.

Problema 8.4 *Estudiar la evolución de la temperatura de una varilla de longitud L, cuyos extremos están en contacto, respectivamente, con focos de temperatura, T_1 y T_2. Aplicarlo al caso en que la varilla tiene temperatura inicial nula.*

Solución:

El problema planteado se puede modelizar como

$$u_t - \kappa u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad u(0,t) = T_1, \quad u(L,t) = T_2,\ x \in [0,L],\ t > 0,$$

en el caso particular en el que $f(x) = 0$.

Las condiciones de contorno no son homogéneas, pero descomponiendo la solución,

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{L-x}{L}T_1 + \frac{x}{L}T_2, \qquad x \in [0,L],\ t > 0,$$

reducimos el problema a uno homogéneo,

$$v_t - \kappa v_{xx}, \quad v(x,0) = f(x) - \frac{L-x}{L}T_1 - \frac{x}{L}T_2 = \tilde{f}(x), \quad v(0,t) = 0 = v(L,t),$$

que podemos resolver por series de Fourier,

$$u(x,t) = \frac{L-x}{L}T_1 + \frac{x}{L}T_2 + \sum_{n=1}^\infty \tilde{f}_n e^{-(n\pi/L)^2\kappa t}\sin\frac{n\pi x}{L},$$

si la función $\tilde{f}(x)$ admite desarrollo de Fourier en el intervalo $(0, L)$,

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \qquad \tilde{f}_n = \frac{2}{L} \int_0^L \tilde{f}(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx. \ \square$$

Obsérvese que en el límite t tendiendo a infinito la distribución de temperaturas tiende a la recta

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{L-x}{L} T_1 + \frac{x}{L} T_2,$$

independientemente del dato inicial $f(x)$.

Consideremos el caso en el que la temperatura inicial de la varilla es nula en todos sus puntos, $u(x,0) = f(x) = 0$,

$$\tilde{f}(x) = -\frac{L-x}{L} T_1 - \frac{x}{L} T_2.$$

Realizamos el desarrollo de Fourier de $\tilde{f}(x)$ en serie de senos,

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_n &= \frac{2}{L^2} \int_0^L ((T_1 - T_2)x - LT_1) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \\
&= \frac{2}{n\pi} \left[\frac{(T_2 - T_1)x + LT_1}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{(T_1 - T_2)}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L} \right]_0^L \\
&= \frac{2}{n\pi} \left((-1)^n T_2 - T_1 \right),
\end{aligned}$$

$$u(x,t) = \frac{L-x}{L} T_1 + \frac{x}{L} T_2 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n T_2 - T_1}{n} e^{-(n\pi/L)^2 \kappa t} \sin \frac{n\pi x}{L}. \ \square$$

Problema 8.5 *Hallar la distribución de temperaturas de una varilla de longitud L para $t > 0$ si el flujo de calor por los extremos es nulo, $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$, y la distribución inicial de temperaturas es $u(x,0) = \cos^2(\pi x/L)$.*

Solución:

Consideremos soluciones $u(x,t)$ de la ecuación del calor para una varilla finita, $x \in (0,L)$, $t > 0$. Buscamos soluciones de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, que sustituidas en la ecuación,

$$0 = u_t - \kappa u_{xx} = X(x)T'(t) - \kappa X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\kappa T(t)} = -\lambda,$$

nos permiten separar las variables de la ecuación y reducirla a dos ecuaciones ordinarias,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad T'(t) + \lambda\kappa T(t) = 0.$$

Las condiciones de flujo de calor nulo por los extremos,

$$u_x(0,t) = 0 = u_x(L,t), \qquad t > 0,$$

conducen a las siguientes para la ecuacion en $X(x)$,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad X'(0) = 0 = X'(L).$$

Ya nos hemos encontrado varias veces con este problema, que tiene por autovalores y autofunciones,

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, 2\ldots$$

Procedemos ahora con la otra ecuación,

$$T_n' + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \kappa T = 0 \Rightarrow T_n(t) = a_n e^{-(n\pi/L)^2\kappa t}.$$

Por tanto, a falta de la condición inicial, la solución se puede expresar en forma de serie,

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n\pi/L)^2\kappa t} \cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Imponemos la condición $u(x,0) = f(x)$,

$$f(x) = u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Por tanto, si la función $f(x)$ admite desarrollo de Fourier en serie de cosenos,

$$f(x) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \qquad f_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = a_n,$$

tenemos la solución del problema mixto:

"El problema de la ecuación del calor $u_t - \kappa u_{xx} = 0$ para $x \in (0,L)$, $t > 0$ con condiciones mixtas $u(x,0) = f(x)$, $u_x(0,t) = 0 = u_x(L,t)$ para $x \in (0,L)$, $t > 0$, tiene solución

$$u(x,t) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{-(n\pi/L)^2\kappa t} \cos\frac{n\pi x}{L},$$

si la función $f(x)$ admite desarrollo de Fourier en el intervalo $(0,L)$"

$$f(x) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \qquad f_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx. \ \square$$

En nuestro problema concreto, el dato inicial,

$$f(x) = u(x,0) = \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi x}{L},$$

tiene desarrollo de Fourier finito, con sólo dos términos no nulos, $f_0 = 1$, $f_2 = 1/2$, con lo cual la solución buscada es

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-(2\pi/L)^2\kappa t} \cos\frac{2\pi x}{L}. \ \square$$

Problema 8.6 *Hallar para $t > 0$ la distribución de temperaturas $u(x,t)$ en una barra de longitud $2l$, si en $t = 0$ su mitad izquierda está a temperatura T_1 y su mitad derecha a temperatura T_2, cumpliéndose $u_x(-l,t) = u_x(l,t) = 0$.*

Solución:

Para poder usar desarrollos de Fourier conocidos, trasladamos los ejes mediante el cambio $y = x + l$, de modo que la varilla esté situada en $[0, L]$, $L = 2l$.

De este modo el dato inicial es $u(y, 0) = f(y)$,

$$f(y) = \begin{cases} T_1 & y \in [0, L/2) \\ T_2 & y \in (L/2, L] \end{cases},$$

con condiciones de contorno de flujo de calor nulo en los extremos, $u_y(0, t) = 0 = u_y(L, t)$, $t > 0$.

Sabemos que este problema tiene solución en forma de desarrollo de Fourier en serie de cosenos,

$$u(y, t) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{-(n\pi/L)^2 \kappa t} \cos \frac{n\pi y}{L},$$

siendo f_n los coeficientes del desarrollo del dato inicial,

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{2}{L} \int_0^L f(y)\, dy = \frac{2T_1}{L} \int_0^{L/2} dy + \frac{2T_2}{L} \int_{L/2}^{L} dy = T_1 + T_2, \\ f_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \cos \frac{n\pi y}{L}\, dy = \frac{2T_1}{L} \int_0^{L/2} \cos \frac{n\pi y}{L}\, dy + \frac{2T_2}{L} \int_{L/2}^{L} \cos \frac{n\pi y}{L}\, dy \\ &= \frac{2T_1}{n\pi} \left[\sin \frac{n\pi y}{L} \right]_0^{L/2} + \frac{2T_2}{n\pi} \left[\sin \frac{n\pi y}{L} \right]_{L/2}^{L} = \frac{2(T_1 - T_2)}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}, \end{aligned}$$

con lo cual la solución del problema es, deshaciendo el cambio,

$$u(x, t) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{2(T_1 - T_2)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{2} \frac{e^{-(n\pi/2l)^2 \kappa t}}{n} \cos \frac{n\pi(x + l)}{L},$$

que muestra que la distribución de temperaturas tiende al equilibrio alcanzando el valor medio $(T_1 + T_2)/2$ cuando el tiempo tiende a infinito. □

Problema 8.7 *Consideremos un anillo de espesor despreciable y radio R, aislado de su entorno. Supuesta una distribución inicial de temperaturas en el anillo, hallar la distribución de temperaturas para tiempos posteriores. Aplicar el resultado a un anillo con distribución inicial de temperaturas $u(\phi, 0) = 5 \cos \phi$.*

Solución:

Usaremos como coordenada el ángulo polar, ϕ, de modo que la distancia desde un punto del anillo, que tomaremos como origen de ángulos, es $x = R\phi$, $\phi \in [0, 2\pi]$. Por tanto, la ecuación del calor, con este cambio de variable, para $u(\phi, t)$ quedará así

$$u_t - \frac{\kappa}{R^2} u_{\phi\phi} = 0,$$

en ausencia de fuentes de calor externas.

Intentaremos resolver la ecuación del calor en estas coordenadas, $\phi \in (0, 2\pi)$, $t > 0$, por separación de variables, buscando soluciones de la forma $u(\phi, t) = \Phi(\phi) T(t)$, que sustituidas en la ecuación,

$$0 = T'(t)\Phi(\phi) - \frac{\kappa}{R^2} T(t) \Phi''(\phi),$$

$$\frac{R^2}{\kappa}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = -\lambda,$$

nos permiten separar las variables de la ecuación y reducirla a dos ecuaciones ordinarias,

$$T'(t) + \lambda\frac{\kappa}{R^2}T(t) = 0, \qquad \Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0.$$

Aparentemente no hay condiciones de contorno, pero las propias coordenadas polares exigen condiciones de periodicidad,

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi), \qquad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi),$$

lo cual conduce a un problema de contorno para Φ ya resuelto con anterioridad, que tiene por autovalores $\lambda_n = n^2$ y autofunciones $\Phi_0(\phi) = 1$, $\Phi_n(\phi) = \cos n\phi$, $\tilde{\Phi}_n(\phi) = \sin n\phi$, $n \in \mathbb{N}$.

Queda por resolver la ecuación en la coordenada temporal,

$$T_n'(t) + \frac{n^2\kappa}{R^2}T_n(t) = 0 \Rightarrow T_n(t) = A_n e^{-n^2\kappa t/R^2},$$

con lo cual podemos escribir la solución de la ecuación del calor en el anillo como

$$u(\phi, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\kappa t/R^2}\left(A_n \cos n\phi + \tilde{A}_n \sin n\phi\right).$$

Falta por imponer la condición inicial $u(\phi, 0) = f(\phi)$,

$$u(\phi, 0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos n\phi + \tilde{A}_n \sin n\phi\right) = f(\phi),$$

y si la función $f(\phi)$ admite desarrollo de Fourier en serie de senos y cosenos,

$$f(\phi) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(f_n \cos n\phi + \tilde{f}_n \sin n\phi\right),$$

$$f_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cos n\phi\, d\phi, \qquad \tilde{f}_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\sin n\phi\, d\phi,$$

observamos, por la unicidad del desarrollo en serie de Fourier, que $A_0 = f_0/2$, $A_n = f_n$, $B_n = \tilde{f}_n$, $n \in \mathbb{N}$ y, por tanto, podemos identificar los coeficientes de la solución con los coeficientes del desarrollo de Fourier:

"El problema de la ecuación del calor en un anillo de radio R, $u_t - \kappa u_{\phi\phi}/R^2 = 0$ para $\phi \in (0, 2\pi)$, $t > 0$ con condición inicial $u(\phi, 0) = f(\phi)$ tiene solución

$$u(\phi, t) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\kappa t/R^2}\left(f_n \cos n\phi + \tilde{f}_n \sin n\phi\right),$$

si la función $f(\phi)$ admite desarrollo de Fourier en serie de senos y cosenos"

$$f(\phi) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(f_n \cos n\phi + \tilde{f}_n \sin n\phi\right),$$

$$f_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cos n\phi\, d\phi, \qquad \tilde{f}_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\sin n\phi\, d\phi.$$

En el caso particular del anillo de distribución de temperaturas inicial $f(\phi) = 5\cos\phi$, el desarrollo de Fourier tiene todos los términos nulos salvo $f_1 = 5$. Por tanto, la solución del problema de valores iniciales es

$$u(\phi, t) = 5e^{-\kappa t/R^2}\cos\phi. \ \square$$

Problema 8.8 *La temperatura de una varilla de longitud L verifica la siguiente ecuación del calor inhomogénea: $u_t - \kappa u_{xx} = x$, con las siguientes condiciones iniciales y de contorno: $u(x,0) = f(x)$, $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$. Obtener la distribución de temperaturas para $t > 0$. Aplicarlo al caso en el que $f(x) = 0$.*

Solución:

Descomponemos el problema en dos, haciendo uso del principio de superposición lineal, $u = v + w$, de modo que une resuelve la ecuación inhomogénea y el otro resuelve la condición inicial,

$$v_t - \kappa v_{xx} = x, \quad v(x,0) = 0, \quad v_x(0,t) = 0 = v_x(L,t), \qquad t > 0,\ x \in [0, L],$$

$$w_t - \kappa w_{xx} = 0, \quad w(x,0) = f(x), \quad w_x(0,t) = 0 = w_x(L,t), \quad t > 0,\ x \in [0, L].$$

El segundo problema es conocido, ya que es el problema mixto con flujo nulo a través de los extremos, cuya solución en forma de desarrollo de Fourier en serie de cosenos es

$$w(x,t) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{-(n\pi/L)^2\kappa t}\cos\frac{n\pi x}{L},$$

si la función $f(x)$ admite desarrollo de Fourier en el intervalo $(0, L)$,

$$f(x) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \qquad f_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

Para el primero desarrollamos la solución y la fuerza en serie de cosenos igualmente,

$$v(x,t) = \frac{T_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cos\frac{n\pi x}{L},$$

$$F(x,t) = x = \frac{F_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n\cos\frac{n\pi x}{L} = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{L},$$

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{2}{L}\int_0^L x\, dx = L,\\
F_n &= \frac{2}{L}\int_0^L x\cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{n\pi}\left[x\sin\frac{n\pi x}{L} + \frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_0^L\\
&= \frac{2L}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right).
\end{aligned}$$

Sustituyendo el desarrollo de $v(x,t)$ en la ecuación inhomogénea,

$$0 = v_t - \kappa v_{xx} - x = \frac{T_0'(t) - F_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n'(t) + \kappa \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T_n(t) - F_n \right) \cos \frac{n\pi x}{L},$$

con condición inicial trivial, $v(x,0) = 0$, obtenemos un sistema infinito de problemas de valores iniciales,

$$T_n'(t) + \kappa \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T_n(t) = F_n, \qquad T_n(0) = 0, \qquad n = 0, 1, \dots$$

cuya solución es

$$T_0(t) = F_0 t, \qquad T_n(t) = \frac{L^2}{\kappa n^2 \pi^2} F_n \left(1 - e^{-\kappa n^2 \pi^2 t / L^2}\right),$$

con lo cual la solución del primer problema es

$$v(x,t) = \frac{Lt}{2} + \frac{2L^3}{\kappa \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^4} \left(1 - e^{-\kappa n^2 \pi^2 t / L^2}\right) \cos \frac{n\pi x}{L}. \ \square$$

En el caso en el que la temperatura inicial es nula, $w(x,t) \equiv 0$,

$$u(x,t) = v(x,t) = \frac{Lt}{2} + \frac{2L^3}{\kappa \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^4} \left(1 - e^{-\kappa n^2 \pi^2 t / L^2}\right) \cos \frac{n\pi x}{L}. \ \square$$

Problema 8.9 *Hallar la distribución de temperaturas de una varilla de longitud L para $t > 0$ si los extremos están a temperatura nula, $u(0,t) = 0 = u(L,t)$, y la distribución inicial de temperaturas verifica $u_x(x,0) = g(x)$. Aplicarlo al caso $L = \pi$, $g(x) = \cos^2 x$. Aplicarlo al caso $L = \pi$, $g(x) = \sin 2x$.*

Solución:

Consideremos soluciones $u(x,t)$ de la ecuación del calor para una varilla finita, $x \in (0,L)$, $t > 0$. Buscamos soluciones de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, que sustituidas en la ecuación,

$$0 = u_t - \kappa u_{xx} = X(x)T'(t) - \kappa X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\kappa T(t)} = -\lambda,$$

nos permiten separar las variables de la ecuación y reducirla a dos ecuaciones ordinarias,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad T'(t) + \lambda \kappa T(t) = 0.$$

Las condiciones de temperatura nula en los extremos,

$$u(0,t) = 0 = u(L,t), \qquad t > 0,$$

conducen a las siguientes para la ecuacion en $X(x)$,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad X(0) = 0 = X(L).$$

Ya nos hemos encontrado varias veces con este problema, que tiene por autovalores y autofunciones,

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2 \dots$$

Procedemos ahora con la otra ecuación,

$$T_n' + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \kappa T = 0 \Rightarrow T_n(t) = a_n e^{-(n\pi/L)^2\kappa t}.$$

Por tanto, a falta de la condición inicial, la solución se puede expresar en forma de serie,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n\pi/L)^2\kappa t} \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

A su vez, la derivada,

$$u_x(x,t) = \frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty} n a_n e^{-(n\pi/L)^2\kappa t} \cos\frac{n\pi x}{L}.$$

nos permite imponer la condición $u_x(x,0) = g(x)$,

$$g(x) = u_x(x,0) = \frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Por tanto, si la función $g(x)$ admite desarrollo de Fourier en serie de cosenos,

$$g(x) = \frac{g_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \qquad g_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$

podemos identificar los coeficientes de la serie,

$$a_n = \frac{L}{n\pi} g_n,$$

si el coeficiente g_0 es nulo, ya que la expresión de $u_x(x,0)$ no contiene término independiente.

Por tanto, tenemos la solución del problema mixto, que no siempre existe:

"El problema de la ecuación del calor $u_t - \kappa u_{xx} = 0$ para $x \in (0,L)$, $t > 0$ con condiciones mixtas $u_x(x,0) = g(x)$, $u(0,t) = 0 = u(L,t)$ para $x \in (0,L)$, $t > 0$, tiene solución

$$u(x,t) = \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n} e^{-(n\pi/L)^2\kappa t} \sin\frac{n\pi x}{L},$$

si la función $g(x)$ admite desarrollo de Fourier en el intervalo $(0,L)$,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \qquad g_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$

con coeficiente g_0 nulo,"

$$g_0 = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\,dx = 0. \ \square$$

Por tanto, el problema tiene solución y es única si el dato inicial verifica

$$\int_0^L g(x)\,dx = 0.$$

Para la función $g(x) = \cos^2 x$, el desarrollo de Fourier en serie de cosenos con $L = \pi$ tiene sólo dos términos,

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x, \qquad g_0 = 1,\ g_2 = \frac{1}{2},$$

y como g_0 no es nulo, el problema en este caso no tiene solución.

En cambio la función $g(x) = \sin 2x$ sí que tiene integral nula en el intervalo $(0, \pi)$. Por tanto, el problema tendrá solución.

Calculamos su desarrollo en serie de cosenos,

$$\begin{aligned}
g_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin 2x \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \{\sin(n+2)x + \sin(2-n)x\}\, dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n+2)x}{n+2} + \frac{\cos(2-n)x}{2-n}\right]_0^\pi = \frac{1-(-1)^n}{\pi}\left\{\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2-n}\right\} \\
&= \frac{4}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{4-n^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ 8/\pi(4-n^2) & n \text{ impar} \end{cases},
\end{aligned}$$

y la solución del problema mixto es

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi}\sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{e^{-n^2\kappa t}}{4-n^2}\frac{\sin nx}{n}. \ \square$$

Problema 8.10 *Hallar la distribución de temperaturas de una varilla de longitud L para $t > 0$ si el flujo de calor por los extremos es nulo, $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$, y la distribución inicial de temperaturas es $u_x(x,0) = -g(x)$.*

Solución:

Consideremos soluciones $u(x,t)$ de la ecuación del calor para una varilla finita, $x \in (0, L)$, $t > 0$. Buscamos soluciones de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, que sustituidas en la ecuación,

$$0 = u_t - \kappa u_{xx} = X(x)T'(t) - \kappa X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\kappa T(t)} = -\lambda,$$

nos permiten separar las variables de la ecuación y reducirla a dos ecuaciones ordinarias,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad T'(t) + \lambda\kappa T(t) = 0.$$

Las condiciones de flujo de calor nulo por los extremos,

$$u_x(0,t) = 0 = u_x(L,t), \qquad t > 0,$$

conducen a las siguientes para la ecuacion en $X(x)$,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad X'(0) = 0 = X'(L).$$

Ya nos hemos encontrado varias veces con este problema, que tiene por autovalores y autofunciones,

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, 2\ldots$$

Procedemos ahora con la otra ecuación,

$$T_n' + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \kappa T = 0 \Rightarrow T_n(t) = a_n e^{-(n\pi/L)^2\kappa t}.$$

Por tanto, a falta de la condición inicial, la solución se puede expresar en forma de serie,

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n\pi/L)^2\kappa t} \cos\frac{n\pi x}{L}.$$

A su vez, la derivada,

$$u_x(x,t) = -\frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty} n a_n e^{-(n\pi/L)^2\kappa t} \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

nos permite imponer la condición $u_x(x,0) = -g(x)$,

$$g(x) = -u_x(x,0) = \frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Por tanto, si la función $g(x)$ admite desarrollo de Fourier en serie de senos,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad g_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$

podemos identificar los coeficientes de la serie,

$$a_n = \frac{L}{n\pi} g_n,$$

salvo el coeficiente a_0, que queda indeterminado, ya que todas las condiciones del problema afectan a las derivadas.

Denotando $K = a_0/2$, tenemos la solución del problema mixto:

"El problema de la ecuación del calor $u_t - \kappa u_{xx} = 0$ para $x \in (0,L)$, $t > 0$ con condiciones mixtas $u_x(x,0) = -g(x)$, $u_x(0,t) = 0 = u_x(L,t)$ para $x \in (0,L)$, $t > 0$, tiene solución

$$u(x,t) = K + \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n} e^{-(n\pi/L)^2\kappa t} \cos\frac{n\pi x}{L},$$

si la función $g(x)$ admite desarrollo de Fourier en el intervalo $(0,L)$"

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad g_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx. \ \square$$

Por tanto, el problema tiene solución única salvo una constante K y no impone ninguna condición adicional sobre la función $g(x)$.

Para la función $g(x) = 1$, el desarrollo de Fourier en serie de senos con $L = \pi$ tiene infinitos términos,

$$g_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\,dx = -\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \dfrac{4}{n\pi} & n \text{ impar} \end{cases},$$

y la solución del problema mixto es

$$u(x,t) = K + \frac{4}{\pi}\sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{e^{-n^2\kappa t}}{n^2}\cos nx. \ \square$$

Problema 8.11 *Hallar la distribución de temperaturas de una varilla de longitud L para $t > 0$ si la temperatura en los extremos es nula, $u(0,t) = u(L,t) = 0$, y la distribución inicial de temperaturas verifica $u_t(x,0) = -f(x)$. Aplicarlo al caso en el que la condición inicial es $u_t(x,0) = x$, $x \in (0,\pi)$.*

Solución:

Consideremos soluciones $u(x,t)$ de la ecuación del calor para una varilla finita, $x \in (0,L)$, $t > 0$. Buscamos soluciones de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, que sustituidas en la ecuación,

$$0 = u_t - \kappa u_{xx} = X(x)T'(t) - \kappa X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\kappa T(t)} = -\lambda,$$

nos permiten separar las variables de la ecuación y reducirla a dos ecuaciones ordinarias,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad T'(t) + \lambda\kappa T(t) = 0.$$

Las condiciones de temperatura nula en los extremos,

$$u(0,t) = 0 = u(L,t), \qquad t > 0,$$

conducen a las siguientes para la ecuacion en $X(x)$,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad X(0) = 0 = X(L).$$

Ya nos hemos encontrado varias veces con este problema, que tiene por autovalores y autofunciones,

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1,2\ldots$$

Procedemos ahora con la otra ecuación,

$$T_n' + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \kappa T = 0 \Rightarrow T_n(t) = a_n e^{-(n\pi/L)^2\kappa t}.$$

Por tanto, a falta de la condición inicial, la solución se puede expresar en forma de serie,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n\pi/L)^2\kappa t}\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

A su vez, la derivada,

$$u_t(x,t) = -\frac{\pi^2}{L^2}\kappa\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n e^{-(n\pi/L)^2\kappa t}\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

nos permite imponer la condición $u_t(x,0) = -f(x)$,

$$f(x) = -u_t(x,0) = \frac{\pi^2}{L^2}\kappa\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Por tanto, si la función $f(x)$ admite desarrollo de Fourier en serie de senos,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad f_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$

podemos identificar los coeficientes de la serie,

$$a_n=\frac{L^2}{n^2\pi^2\kappa}f_n, \qquad n=1,2,\dots$$

Así pues, tenemos la solución del problema mixto:

"El problema de la ecuación del calor $u_t-\kappa u_{xx}=0$ para $x\in(0,L)$, $t>0$ con condiciones mixtas $u_t(x,0)=-f(x)$, $u(0,t)=0=u(L,t)$ para $x\in(0,L)$, $t>0$, tiene solución

$$u(x,t)=\frac{L^2}{\pi^2\kappa}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{n^2}e^{-(n\pi/L)^2\kappa t}\sin\frac{n\pi x}{L},$$

si la función $f(x)$ admite desarrollo de Fourier en el intervalo $(0,L)$"

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad f_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx. \ \Box$$

En el caso en el que la condición inicial es $u_t(x,0)=x$, $x\in(0,\pi)$, a la vista del resultado anterior, tenemos que calcular el desarrollo de Fourier de la función $f(x)=-x$ en serie de senos en el intervalo $[0,\pi]$,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n\sin nx,$$

$$f_n=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=-\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}=\frac{2(-1)^n}{n},$$

con lo cual la solución de este problema es

$$u(x,t)=\frac{2}{\kappa}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}e^{-n^2\kappa t}\sin nx. \ \Box$$

Problema 8.12 *Hallar la distribución de temperaturas de una varilla de longitud L para $t>0$ si el flujo de calor por los extremos es nulo, $u_x(0,t)=u_x(L,t)=0$, y la distribución inicial de temperaturas cumple $u_t(x,0)=-f(x)$. Aplicarlo al caso $f(x)=\sin x$, $L=\pi$. Aplicarlo al caso $f(x)=\sin 2x$, $L=\pi$.*

Solución:

Consideremos soluciones $u(x,t)$ de la ecuación del calor para una varilla finita, $x\in(0,L)$, $t>0$. Buscamos soluciones de la forma $u(x,t)=X(x)T(t)$, que sustituidas en la ecuación,

$$0=u_t-\kappa u_{xx}=X(x)T'(t)-\kappa X''(x)T(t)\Rightarrow\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{\kappa T(t)}=-\lambda,$$

nos permiten separar las variables de la ecuación y reducirla a dos ecuaciones ordinarias,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad T'(t) + \lambda\kappa T(t) = 0.$$

Las condiciones de flujo de calor nulo por los extremos,

$$u_x(0,t) = 0 = u_x(L,t), \qquad t > 0,$$

conducen a las siguientes para la ecuacion en $X(x)$,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad X'(0) = 0 = X'(L).$$

Ya nos hemos encontrado varias veces con este problema, que tiene por autovalores y autofunciones,

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 0,1,2\dots$$

Procedemos ahora con la otra ecuación,

$$T_n' + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \kappa T = 0 \Rightarrow T_n(t) = a_n e^{-(n\pi/L)^2\kappa t}.$$

Por tanto, a falta de la condición inicial, la solución se puede expresar en forma de serie,

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n\pi/L)^2\kappa t}\cos\frac{n\pi x}{L}.$$

A su vez, la derivada,

$$u_t(x,t) = -\frac{\kappa\pi^2}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n e^{-(n\pi/L)^2\kappa t}\cos\frac{n\pi x}{L}.$$

nos permite imponer la condición $u_t(x,0) = -f(x)$,

$$f(x) = -u_t(x,0) = \frac{\kappa\pi^2}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Por tanto, si la función $f(x)$ admite desarrollo de Fourier en serie de cosenos,

$$f(x) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \qquad f_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$

podemos identificar los coeficientes de la serie,

$$a_n = \frac{L^2}{n^2\pi^2\kappa} f_n,$$

salvo el coeficiente a_0, que queda indeterminado, ya que todas las condiciones del problema afectan a las derivadas.

Además, observamos que el coeficiente f_0 tiene que ser nulo para que exista solución, ya que la serie de $u_t(x,0)$ no tiene término independiente.

Por tanto, denotando $K = a_0/2$, tenemos la solución del problema mixto:

"El problema de la ecuación del calor $u_t - \kappa u_{xx} = 0$ para $x \in (0, L)$, $t > 0$ con condiciones mixtas $u_t(x, 0) = -f(x)$, $u_x(0, t) = 0 = u_x(L, t)$ para $x \in (0, L)$, $t > 0$, tiene solución

$$u(x,t) = K + \frac{L^2}{\pi^2 \kappa} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{n^2} e^{-(n\pi/L)^2 \kappa t} \cos \frac{n\pi x}{L},$$

si la función $f(x)$ admite desarrollo de Fourier en el intervalo $(0, L)$ con coeficiente f_0 nulo"

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \qquad f_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx. \ \square$$

Por tanto, el problema tiene solución única salvo una constante K e impone la condición adicional sobre la función $f(x)$ de que f_0 sea nulo, es decir,

$$\int_0^L f(x)\, dx = 0.$$

Es fácil ver de donde proviene esta condición, usando la ecuación del calor y la regla de Barrow

$$\begin{aligned} \int_0^L f(x)\, dx &= -\int_0^L u_t(x,0)\, dx = -\kappa \int_0^L u_{xx}(x,0)\, dx = -\kappa \left[u_x(x,0)\right]_0^L \\ &= u_x(0,0) - u_x(L,0) = 0, \end{aligned}$$

ya que las condiciones de contorno imponen $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$, no sólo para el instante inicial $t = 0$, sino para todo valor de t.

Para la función $f(x) = \sin x$, $L = \pi$ el problema no tiene solución, por tanto, ya que

$$\int_0^L f(x)\, dx = \int_0^\pi \sin x\, dx = [-\cos x]_0^\pi = 2 \neq 0. \ \square$$

Para la función $f(x) = \sin 2x$, $L = \pi$ el problema tiene solución, ya que

$$\int_0^L f(x)\, dx = \int_0^\pi \sin 2x\, dx = \left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^\pi = 0.$$

Calculamos el resto de coeficientes del desarrollo de Fourier,

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin 2x \cos nx\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\sin(2+n)x + \sin(2-n)x\right)\, dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(2+n)x}{2+n} + \frac{\cos(2-n)x}{2-n}\right]_0^\pi = \frac{1-(-1)^n}{\pi} \left(\frac{1}{2+n} + \frac{1}{2-n}\right) \\ &= \frac{4}{\pi} \frac{1-(-1)^n}{4-n^2}, \end{aligned}$$

para $n \neq 2$, con lo cual todos los coeficientes pares son nulos.

El coeficiente f_2 lo calculamos aparte,

$$f_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin 2x \cos 2x \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin 4x \, dx = -\frac{1}{4\pi}\left[\cos 4x\right]_0^\pi = 0.$$

Por tanto, la solución del problema mixto es

$$u(x,t) = K + \frac{4}{\pi\kappa}\sum_{n=1}^\infty \frac{1-(-1)^n}{4-n^2}\frac{e^{-n^2\kappa t}}{n^2}\cos nx. \; \square$$

Problema 8.13 *Obtener el núcleo integral para el problema de Cauchy de una varilla infinita que intercambia calor con un medio exterior a temperatura nula, suponiendo que la temperatura de la varilla se rige por la ecuación* $u_t = \kappa u_{xx} - hu$*, donde* κ *y* h *son, respectivamente, los coeficientes de conducción y convección. Aplicarlo al caso particular en el que la temperatura inicial es* $u(x,0) = T_0 e^{-x^2/a^2}$*,* $x \in \mathbb{R}$*,* $a > 0$*.*

Solución:

Tenemos dos estrategias: una de ellas es reducir el problema al de la ecuación del calor. Podemos eliminar el término novedoso, hu, mediante el cambio de variable dependiente

$$u(x,t) = e^{-ht}v(x,t) \Rightarrow v_t = \kappa v_{xx}, \qquad v(x,0) = u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \; t > 0,$$

que nos conduce al problema de valores iniciales para la ecuación del calor para v, cuya solución es

$$v(x,t) = \int_{-\infty}^\infty K(x,y,t) f(x)\, dx, \qquad K(x,y,t) = \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}}{\sqrt{4\pi\kappa t}}.$$

Por tanto, deshaciendo el cambio de variable,

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^\infty \tilde{K}(x,y,t) f(y)\, dy, \qquad \tilde{K}(x,y,t) = \frac{e^{-ht-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}}{\sqrt{4\pi\kappa t}}. \; \square$$

Otra estrategia sería recurrir directamente a la transformada de Fourier de la ecuación, como ya hicimos con la ecuación del calor. Denotando por $U(k,t)$ la transformada de Fourier de $u(x,t)$,

$$U_t + \left(h + \kappa k^2\right) U = 0 \Rightarrow U(k,t) = A(k) e^{-(h+\kappa k^2)t},$$

cuya solución depende de una función arbitraria $A(k)$.

Al igual que para la ecuación del calor, la solución de la ecuación se descompone en ondas planas de frecuencia k, amortiguadas con un factor exponencial decreciente en el tiempo.

Invirtiendo la transformada de Fourier,

$$u(x,t) = \frac{e^{-ht}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty A(k) e^{-\kappa k^2 t + ikx}\, dk,$$

podemos determinar $A(k)$ a partir de los datos iniciales, $u(x,0) = f(x)$,

$$f(x) = u(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx}\, dk,$$

que resulta ser la transformada de Fourier de f, que sustituida en la expresión de u, nos da la solución del problema de valores iniciales para la varilla infinita,

$$u(x,t) = \frac{e^{-ht}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y) e^{-\kappa k^2 t + ik(x-y)} = \frac{e^{-ht}}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}\, dy,$$

haciendo el cambio de variable $z = k\sqrt{\kappa t} - i(x-y)/2\sqrt{\kappa t}$ e integrando la exponencial gaussiana. $\square$

El caso particular de un perfil gaussiano de temperaturas es idéntico al del primer problema de este tema, por tanto,

$$u(x,t) = \frac{e^{-ht}}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}\, dy = \frac{T_0 a}{\sqrt{4\kappa t + a^2}} e^{-ht - \frac{x^2}{4\kappa t + a^2}}. \ \square$$