Capítulo 4

Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden

Objetivos

- Resolver problemas de valores iniciales para ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden cuasilineales.

4.1. Introducción

Hasta el momento nos hemos ocupado de las ecuaciones diferenciales ordinarias, que son aquellas en las que las magnitudes que se pretende modelizar por medio de ecuaciones diferenciales dependen tan sólo de una variable independiente, normalmente un tiempo o en algunos casos una coordenada espacial. Sobre todo en el último caso, planteando problemas en el plano o en el espacio, es fácil imaginar problemas físicos o ingenieriles en los que intervenga más de una variable independiente.

Al igual que para las ecuaciones diferenciales ordinarias, el **orden** de una ecuación en derivadas parciales es el orden más alto de las derivadas que aparecen en la ecuación.

Por ejemplo, la forma más general de una ecuación de primer orden para una función $u(x_1, \ldots, x_m)$ de variables independientes $x_1, \ldots, x_m$ es

$$F(x_1, \ldots, x_m, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_m}) = 0,$$

donde F es una función con ciertas condiciones de diferenciabilidad.
Notación: para aligerar la notación, muchas veces nos referiremos a las derivadas parciales por medio de subíndices,

$$u_x := \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} := \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

siempre que no cause confusión.

También, por aligerar la notación, como hemos hecho en el párrafo precedente, eliminaremos las dependencias de las funciones. Por ejemplo, escribiendo u_{xy} en lugar de $u_{xy}(x, y)$, siempre que sean conocidas.

En el caso de dos variables independientes, x, y, la expresión general se reduce a $F(x,y,u,u_x,u_y) = 0$. Las variables independientes pueden ser dos coordenadas espaciales, x, y, o una coordenada temporal y una espacial, x, t, dependiendo del problema.

Un ejemplo de ecuación de primer orden es la ecuación de Burgers,

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = 0, \qquad (u_t + uu_x = 0)\,,$$

que se emplea en el estudio de ondas de choque en gases.

Esta ecuación es, como veíamos en la parte de ecuaciones ordinarias, **cuasilineal**, ya que es lineal en las derivadas de orden más alto, en este caso las derivadas primeras respecto a t y respecto a x.

Una ecuación es **lineal** cuando es lineal en la variable dependiente y en todas sus derivadas.

Por ejemplo, la ecuación de Burgers no es lineal, por culpa del producto del segundo término.

En cambio, la ecuación del transporte,

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = 0, \qquad (u_t + u_x = 0)\,,$$

sí que es lineal.

Un ejemplo sencillo de ecuación de orden superior es la ecuación de Poisson,

$$\Delta V(x,y,z) = \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial z^2} = \kappa\rho(x,y,z),$$

que rige el comportamiento de un potencial escalar $V(x,y,z)$ gravitatorio (o electrostático) en presencia de densidad de masa (o de carga) $\rho(x,y,z)$. La constante es $\kappa = 4\pi G$, donde G es la constante de gravitación universal, en el caso gravitatorio. Y en el caso electrostático $\kappa = -1/\varepsilon$, siendo ε es la constante dieléctrica del medio.

Este es un ejemplo de ecuación lineal en derivadas parciales de segundo orden con tres variables independientes, las coordenadas x, y, z. La única variable dependiente es el potencial $V(x,y,z)$. En notación simplificada la ecuación de Poisson se escribiría

$$V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = \kappa\rho.$$

La ecuación de la cuerda vibrante,

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = F(t,x), \qquad \big(u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(t,x)\big)\,,$$

describe la evolución de la separación u de una cuerda de su posición de equilibrio en presencia de una fuerza f, siendo c la velocidad de propagación de la onda a lo largo de la cuerda. Obviamente, la separación de la cuerda depende del tiempo t, pero también depende de la posición x sobre la cuerda, ya que en unos puntos se separará del equilibrio más que en otros, como sucede en la cuerdas de un violín o una guitarra.

Esta es una ecuación lineal en derivadas parciales de segundo orden con dos variables independientes, el tiempo t y la coordenada x a lo largo de la cuerda.

Las matemáticas también proporcionan ecuaciones en derivadas parciales de forma natural:

Pensemos en superficies de revolución en torno al eje Z. Sabemos que las superficies se pueden parametrizar por medio de gráficas de funciones de dos variables, $(x, y, z(x, y))$. En el caso de las superficies de revolución, la altura z se puede expresar tan sólo en función del radio cilíndrico $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por tanto, se pueden describir por una función $z(x^2 + y^2)$. Usando la regla de la cadena, denotando $u = \rho^2 = x^2 + y^2$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\frac{dz}{du}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = 2y\frac{dz}{du},$$

con lo cual, eliminando dz/du de ambas expresiones obtenemos la ecuación en derivadas parciales,

$$y\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} - x\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 0, \qquad (yz_x - xz_y = 0)\,,$$

que satisfacen las superficies de revolución parametrizadas por gráficas de funciones $(x, y, z(x, y))$.

También podemos pensar en **sistemas de ecuaciones en derivadas parciales**, sistemas de ecuaciones en los que hay más de una variable dependiente. Un ejemplo de la física son las ecuaciones para un potencial vectorial $\mathbf{A}(x, y, z)$ de una fuerza $\mathbf{F}(x, y, z)$, que, como sabemos, es solución de la ecuación vectorial $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, que en coordenadas,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial A^z(x, y, z)}{\partial y} - \dfrac{\partial A^y(x, y, z)}{\partial z} = F^x(x, y, z) \\ \dfrac{\partial A^x(x, y, z)}{\partial z} - \dfrac{\partial A^z(x, y, z)}{\partial x} = F^y(x, y, z) \\ \dfrac{\partial A^y(x, y, z)}{\partial x} - \dfrac{\partial A^x(x, y, z)}{\partial y} = F^z(x, y, z) \end{array}\right\}\,,$$

proporciona un sistema de tres ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales de primer orden para las tres coordenadas del potencial, A^x, A^y, A^z.

Denominaremos **solución general** de una ecuación en derivadas parciales de orden n a una familia de soluciones de la ecuación que dependa de n funciones independientes de las variables independientes.

Ejemplo 4.1.1 *Hallar la solución general de la ecuación* $u_{xy}(x, y) = F(x, y)$.

Este caso es sencillo, ya que se reduce a integrar en ambas variables,

$$u_x(x, y) = \int \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial y} dy + g(x) = \int F(x, y)\, dy + g(x),$$

donde $g(x)$ es la *constante* de integración al integrar en la variable y. A su vez,

$$u(x, y) = \int \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx + H(y) = \int \left(\int F(x, y)\, dy + g(x)\right) dx + H(y),$$

con lo cual la solución general de la ecuación es

$$u(x, y) = \int \left(\int F(x, y)\, dy\right) dx + G(x) + H(y),$$

denotando por $G(x)$ la primitiva de $g(x)$. Como se puede observar, depende de dos funciones arbitrarias, $G(x)$, $H(y)$, como corresponde a una ecuación de segundo orden.

Ejemplo 4.1.2 *Comprobar que la solución general de la ecuación homogénea de la cuerda vibrante, $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ es $u(x,t) = G(x-ct) + H(x+ct)$, siendo F, G funciones arbitrarias.*

En el tema siguiente se obtendrá dicha solución general, así que aquí nos limitaremos a comprobar su validez.

Denotemos $v(x,t) = x - ct$, $w(x,t) = x + ct$, con lo cual $u(v,w) = G(v) + H(w)$. Por la regla de la cadena, calculamos las derivadas primeras de la solución general,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} = -c\frac{dG}{dv} + c\frac{dH}{dw},\\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dG}{dv} + \frac{dH}{dw},
\end{aligned}$$

que nos sirven a su vez para calcular las derivadas segundas,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_t}{\partial t} &= \frac{\partial u_t}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u_t}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} = c^2\frac{d^2G}{dv^2} + c^2\frac{d^2H}{dw^2},\\
\frac{\partial u_x}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{d^2G}{dv^2} + \frac{d^2H}{dw^2},
\end{aligned}$$

y, al sustituirlas en la ecuación de la cuerda,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = c^2\frac{d^2G}{dv^2} + c^2\frac{d^2H}{dw^2} - c^2\left(\frac{d^2G}{dv^2} + \frac{d^2H}{dw^2}\right) \equiv 0,$$

comprobamos que efectivamente es una familia de soluciones de la ecuación.

Como, además, la familia depende de dos funciones arbitrarias, G y H y la ecuación es de orden dos, efectivamente es una solución general de la ecuación.

La solución general de una ecuación en derivadas parciales no es sencilla de conseguir en la mayoría de los casos, por lo que en general abordaremos problemas de valores iniciales, problemas de contorno y problemas mixtos, tal como hicimos con las ecuaciones ordinarias.

4.2. Ecuaciones cuasilineales de primer orden

Como ya hemos mencionado, se puede abordar el problema de Cauchy o de valores iniciales para cualquier ecuación en derivadas parciales de primer orden. En este curso, no obstante, nos limitaremos al caso de las ecuaciones cuasilineales, comenzando con dos variables independientes, x, y, y una variable dependiente $u(x,y)$. La forma más general de ecuación cuasilineal para u es

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u),$$

donde a, b, c son funciones de tres variables, con ciertas propiedades de diferenciabilidad.

Podemos representar las funciones $u(x,y)$ como superficies en $\mathbb{R}^3$ que sean gráficas de funciones de dos variables $z = u(x,y)$. La superficie estará formada por puntos $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = u(x,y)\}$. Es decir, a cada punto (x,y) del plano le asignamos la altura dada por el valor $u(x,y)$.

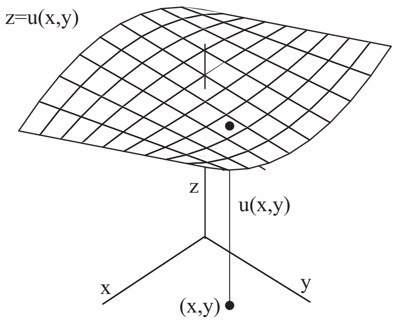

Figura 4.1: Gráfica de la función $u(x,y)$

La superficie tiene por ecuación implícita $F(x,y,z)=u(x,y)-z=0$ y, por tanto, $\operatorname{grad} F(x,y,z)=(u_x,u_y,-1)$ proporciona un vector perpendicular a la superficie en cada uno de sus puntos.

Consideremos curvas parametrizadas por $\delta(\tau)=\big(x(\tau),y(\tau),z(\tau)\big)$ en algún intervalo y que estén contenidas en la superficie dada por la solución. Es decir,

$$F\big(x(\tau),y(\tau),z(\tau)\big)\equiv 0.$$

Derivando esta expresión con respecto al parámetro τ de la curva,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dF\big(x(\tau),y(\tau),z(\tau)\big)}{d\tau} = \left.\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\right|_{(x(\tau),y(\tau),z(\tau))}\frac{dx(\tau)}{d\tau} \\ &+ \left.\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\right|_{(x(\tau),y(\tau),z(\tau))}\frac{dy(\tau)}{d\tau} + \left.\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\right|_{(x(\tau),y(\tau),z(\tau))}\frac{dz(\tau)}{d\tau} \\ &= \dot{x}(\tau)u_x\big(x(\tau),y(\tau),z(\tau)\big)+\dot{y}(\tau)u_y\big(x(\tau),y(\tau),z(\tau)\big)-\dot{z}(\tau), \end{aligned}$$

denotando con un punto la derivada respecto al parámetro τ.

Comparando esta expresión con la ecuación diferencial, $au_x+bu_y-c=0$, observamos que las curvas que verifican el sistema autónomo

$$\begin{aligned} \frac{dx(\tau)}{d\tau} &= a\big(x(\tau),y(\tau),z(\tau)\big), \\ \frac{dy(\tau)}{d\tau} &= b\big(x(\tau),y(\tau),z(\tau)\big), \\ \frac{dz(\tau)}{d\tau} &= c\big(x(\tau),y(\tau),z(\tau)\big), \end{aligned} \tag{4.1}$$

o en notación simplificada, donde el punto denota derivación respecto a τ,

$$\dot{x}=a, \quad \dot{y}=b, \quad \dot{z}=c,$$

están contenidas en la superficie dada por alguna solución de la ecuación diferencial.

El teorema de existencia y unicidad para sistemas de ecuaciones ordinarias afirma que si las funciones a,b,c son de clase C^1 en un punto (x_0,y_0,z_0), por dicho punto pasará una sola curva solución del sistema.

Obsérvese que un cambio de parámetro $\tau = \tau(\sigma)$,

$$\frac{d\delta\big(\tau(\sigma)\big)}{d\sigma} = \frac{d\delta(\tau)}{d\tau}\bigg|_{\tau(\sigma)} \frac{d\tau(\sigma)}{d\sigma},$$

simplemente conduce a multiplicar la velocidad $\dot{\delta}(\tau)$ de la curva por la función $d\tau(\sigma)/d\sigma$ y, por tanto, a multiplicar por esta misma función el lado derecho del sistema 4.1.

Por ello, como el parámetro empleado es irrelevante, para no comprometernos de antemano con una parametrización de las curvas, muchas veces se reescribe el sistema como

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c},$$

de modo que desaparezca la referencia explícita al parámetro.

Las curvas que verifican el sistema 4.1 se denominan **curvas características de la ecuación diferencial** $au_x + bu_y - c = 0$.

En el caso de que las funciones a, b no dependan de u,

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y,u),$$

como sucede, por ejemplo, en el caso de las ecuaciones lineales, las dos primeras ecuaciones del sistema característico se desacoplan de la tercera,

$$\begin{aligned} \frac{dx(\tau)}{d\tau} &= a\big(x(\tau), y(\tau)\big), \\ \frac{dy(\tau)}{d\tau} &= b\big(x(\tau), y(\tau)\big), \end{aligned} \tag{4.2}$$

y permiten definir una familia de curvas en el plano XY llamadas **proyecciones características**, o más confusamente **características**, que, al no depender de u, son comunes para todas las soluciones y son, por tanto, una propiedad de la ecuación.

También podemos hablar de proyecciones características en el caso cuasilineal como la proyección de las curvas características sobre el plano XY, aunque en este caso, en general, dependerán de la solución u considerada.

Ejemplo 4.2.1 *Obtener las curvas características de la ecuación* $u_t + ku_x = 0$.

En este ejemplo, $a = k$, $b = 1$, $c = 0$, con lo cual el sistema es

$$\dot{x} = k, \quad \dot{t} = 1, \quad \dot{z} = 0,$$

o equivalentemente, dividiendo todas las ecuaciones por la segunda,

$$\frac{dx(t)}{dt} = k, \quad \frac{dz(t)}{dt} = 0,$$

y su solución general es

$$x(t) = kt + x_0, \quad z(t) = z_0,$$

donde x_0, z_0 son constantes.

Las curvas características en este ejemplo son rectas horizontales parametrizadas por $\delta(t) = (x_0 + kt, t, z_0)$, todas ellas paralelas, ya que su velocidad es $\dot{\delta}(t) = (k, 1, 0)$.

Ejemplo 4.2.2 *Obtener las curvas características de la ecuación* $u_t + uu_x = 0$.

Este ejemplo no es lineal, $a = z$, $b = 1$, $c = 0$, y su sistema característico es

$$\dot{x} = z, \quad \dot{t} = 1, \quad \dot{z} = 0,$$

o dividiendo todas las ecuaciones por la segunda,

$$\frac{dx(t)}{dt} = z, \quad \frac{dz(t)}{dt} = 0,$$

y su solución general es

$$x(t) = x_0 + z_0 t, \quad z(t) = z_0,$$

donde x_0, z_0 son constantes.

Las curvas características en este ejemplo vuelven a ser rectas horizontales parametrizadas por $\delta(t) = (x_0 + z_0 t, t, z_0)$, pero no son paralelas, ya que su velocidad es $\dot{\delta}(t) = (z_0, 1, 0)$.

4.3. Problema de valores iniciales

Las curvas características de una ecuación nos permiten construir la solución de los problemas de valores iniciales. Supongamos que conocemos los valores (dato inicial) $u|_\Gamma$ de la variable dependiente u a lo largo de una curva Γ (ver Figura 4.2). Queremos conocer la solución u de la ecuación

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u),$$

que toma los valores de $u|_\Gamma$ sobre la curva Γ. Es decir

Trazando las características que pasan por los puntos de Γ, podemos construir la superficie de la solución de la ecuación que tiene por dato inicial $u|_\Gamma$, siempre que Γ corte transversalmente a las características.

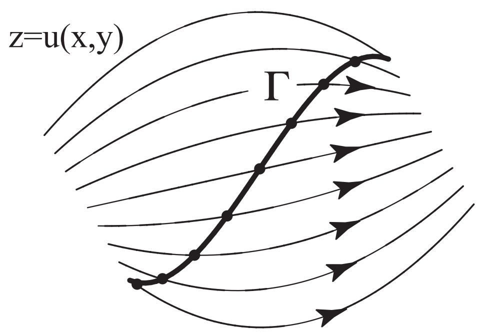

Figura 4.2: Gráfica de la solución $u(x, y)$ como unión de características transversales a una curva Γ

Por contra, si la curva Γ fuese una característica, la construcción anterior sería imposible, ya que no podríamos continuar el dato inicial más allá de Γ. No podemos en general dar el dato inicial sobre una curva característica.

De hecho, otra manera de construir las curvas características es plantear el problema de valores iniciales para la ecuación $au_x + bu_y = c$ en el que como dato se dan los valores $u|_\Gamma$ de u a lo largo de una curva Γ. Es decir, si Γ está parametrizada por $\gamma(s) = \big(f(s), g(s), h(s)\big)$, conocemos $u\big(f(s), g(s)\big) = h(s)$.

Haciendo uso de la regla de la cadena, podemos conocer también los valores de u_x, u_y a lo largo de Γ,

$$\frac{dh(s)}{ds} = \frac{du\big(f(s), g(s)\big)}{ds} = \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right|_{\left(f(s),g(s)\right)} \frac{df(s)}{ds} + \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{\left(f(s),g(s)\right)} \frac{dg(s)}{ds},$$

con lo cual, podemos conocer $u_x|_\Gamma$, $u_y|_\Gamma$, resolviendo el sistema lineal,

$$h' = u_x f' + u_y g', \quad au_x + bu_y = c,$$

en el que las funciones a, b, c, u_x, u_y están restringidas a tomar valores sobre la curva Γ. Con este procedimiento podemos obtener, no sólo las derivadas primeras, sino las derivadas de orden superior, iterando la aplicación de la regla de la cadena. Y conocidas todas las derivadas de u, podríamos expresar formalmente la solución como una serie de Taylor.

Este sistema lineal está determinado y tiene solución única si y sólo si

$$\begin{vmatrix} a\big(f(s), g(s), h(s)\big) & f'(s) \\ b\big(f(s), g(s), h(s)\big) & g'(s) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Es decir si los vectores (a, b), (f', g') son paralelos, lo que equivale a que los vectores (a, b, c), $\gamma' = (f', g', h')$ sean paralelos (recordemos que ambos tienen que ser perpendiculares a $\operatorname{grad} F(x, y, z) = (u_x, u_y, -1)$), el sistema no está determinado. Pero precisamente (a, b, c) nos define la velocidad de las curvas características, con lo cual lo que estamos enunciando es que, para que el problema tenga solución, debemos dar el dato sobre una curva Γ que no sea tangente (es decir, que sea transversal) en ningún punto a ninguna característica.

Teorema 4.3.1 *Sea la ecuación $a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$. El problema de valores iniciales a lo largo de una curva Γ tiene solución unica en un entorno de Γ si a, b, c son funciones de clase C^1 y*

$$\begin{vmatrix} a\big(f(s), g(s), h(s)\big) & f'(s) \\ b\big(f(s), g(s), h(s)\big) & g'(s) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{4.3}$$

donde $\gamma(s) = \big(f(s), g(s), h(s)\big)$ es una parametrización de la curva Γ en un intervalo.

Otra manera de interpretar la condición de transversalidad 4.3 es pensar en un cambio de variables $x = x(\tau, s)$, $y = y(\tau, s)$ para resolver el problema de valores iniciales. La condición para que el cambio de variables sea invertible (difeomorfismo local) en un entorno de la curva Γ, que situamos en $\tau = 0$, es precisamente que el jacobiano del cambio no se anule,

$$0 \neq \frac{\partial(x,y)}{\partial(\tau,s)}(0,s) = \left.\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \tau} & \dfrac{\partial x}{\partial s} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial \tau} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix}\right|_{(0,s)} = \begin{vmatrix} a\big(f(s), g(s), h(s)\big) & f'(s) \\ b\big(f(s), g(s), h(s)\big) & g'(s) \end{vmatrix}.$$

A efectos prácticos, si el dato inicial está dado por una curva Γ parametrizada por $\gamma(s) = \big(f(s), g(s), h(s)\big)$, tendremos que resolver el sistema característico,

$$\dot{x} = a, \qquad \dot{y} = b, \qquad \dot{z} = c.$$

Las condiciones iniciales en $\tau = 0$ son $x(s,0) = f(s)$, $y(s,0) = g(s)$, $z(s,0) = h(s)$. O, lo que es lo mismo, $u\big(f(s), g(s)\big) = h(s)$.

Resolver el problema de valores iniciales para funciones arbitrarias f, g, h equivale a obtener la solución general de la ecuación, en forma paramétrica,

$$u\big(x(s,\tau), y(s,\tau)\big) = z(s,\tau),$$

ya que la solución dependerá de los parámetros s, τ, en lugar de las coordenadas x, y.

Ejemplo 4.3.1 *Resolver el problema de valores iniciales para la ecuación lineal* $u_t + k u_x = 0$*, donde* k *es una constante, para* $u(x,0) = h(x)$*.*

Nos están dando el dato inicial a lo largo del eje X, que será la curva Γ, por lo que parece razonable tomar como parámetro s la propia coordenada x,

$$x(s,0) = f(s) = s, \quad t(s,0) = g(s) = 0, \quad z(s,0) = h(s).$$

Los coeficientes de la ecuación son $a = k$, $b = 1$, $c = 0$.

Comprobamos la condición de transversalidad,

$$\left| \begin{array}{cc} a & f'(s) \\ b & g'(s) \end{array} \right|_{(f(s),g(s),h(s))} = \left| \begin{array}{cc} k & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right| = -1 \neq 0.$$

Planteamos el sistema característico,

$$\dot{x} = k, \qquad \dot{t} = 1, \qquad \dot{z} = 0,$$

cuya solución es

$$x(s,\tau) = k\tau + \alpha(s), \quad t(s,\tau) = \tau + \beta(s), \quad z(s,\tau) = \gamma(s),$$

a la que imponemos la condición inicial,

$$s = x(s,0) = \alpha(s), \quad 0 = t(s,0) = \beta(s), \quad h(s) = z(s,0) = \gamma(s),$$

y concluimos que la solución del problema de valores iniciales, en forma paramétrica es

$$x(s,\tau) = k\tau + s, \quad t(s,\tau) = \tau, \quad z(s,\tau) = h(s).$$

No siempre podremos, pero en este caso es factible eliminar los dos parámetros s, τ,

$$\tau = t, \qquad s = x - k\tau = x - kt,$$

y obtener la solución del problema en función exclusivamente de las coordenadas x, t, $u(x,y) = z$,

$$u(x,t) = h(x - kt),$$

que corresponde a una onda viajera de velocidad k que se desplaza hacia la derecha a lo largo del eje X, considerando que t es un tiempo.

Al dejar libre el dato inicial, ya que no hemos facilitado la expresión de $h(s)$, esta es la solución general de la ecuación, que depende de una función arbitraria, la propia h.

Con esta expresión podemos resolver cualquier problema de valores iniciales. Por ejemplo, si el dato inicial fuera $u(x,0) = \sin x$, es decir, $h(s) = \sin s$, la solución del problema sería simplemente $u(x,t) = \sin(x - kt)$.

Ejemplo 4.3.2 *Resolver el problema de valores iniciales para la ecuación cuasilineal $u_t + uu_x = 0$, para $u(x,0) = h(x)$.*

Esta es la ecuación de Burgers, en la que u representa la velocidad de un fluido que recorre el eje X, con velocidad dependiente tanto del tiempo, como de la posición.

La derivada u_t representa, pues, la aceleración en un punto x en un instante t. Si queremos conocer la aceleración de un partícula de fluido, tendremos que realizar la derivada total,

$$\frac{du(x(t),t)}{dt} = \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{(x(t),t)} + \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{(x(t),t)} \frac{dx(t)}{dt} = u_t + uu_x|_{(x(t),t)}.$$

Por tanto, la ecuación de Burgers expresa la condición de que la aceleración total de las partículas individuales es nula.

Nos están dando el dato inicial a lo largo del eje X, por lo que tomamos como parámetro s la propia coordenada x,

$$x(s,\tau) = f(s) = s, \quad t(s,\tau) = g(s) = 0, \quad z(s,\tau) = h(s).$$

Los coeficientes de la ecuación son $a = z$, $b = 1$, $c = 0$.

Comprobamos la condición de transversalidad,

$$\left|\begin{array}{cc} a & f'(s) \\ b & g'(s) \end{array}\right|_{(f(s),g(s),h(s))} = \left|\begin{array}{cc} h(s) & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = -1 \neq 0.$$

Planteamos el sistema característico,

$$\dot{x} = z, \qquad \dot{t} = 1, \qquad \dot{z} = 0,$$

del cual podemos resolver inmediatamente las dos últimas ecuaciones,

$$t(s,\tau) = \tau + \beta(s), \qquad z(s,\tau) = \gamma(s),$$

e imponerles las condiciones iniciales,

$$0 = t(s,0) = \beta(s), \quad h(s) = z(s,0) = \gamma(s) \Rightarrow t(s,\tau) = \tau, \qquad z(s,\tau) = h(s),$$

y sustituyendo en la primera obtenemos

$$\dot{x} = h(s) \Rightarrow x(s,\tau) = h(s)\tau + \alpha(s),$$

y la condición inicial nos permite despejar $\alpha(s)$,

$$s = x(s,0) = \alpha(s) \Rightarrow x(s,\tau) = h(s)\tau + s,$$

con lo cual ya tenemos la solución de todos los problemas de valores iniciales y, por tanto, la solución general de la ecuación, en forma paramétrica,

$$x(s,\tau) = h(s)\tau + s, \quad t(s,\tau) = \tau, \quad z(s,\tau) = h(s).$$

Podemos eliminar los parámetros s, τ,

$$\tau = t, \qquad s = x - zt,$$

y obtener la solución en función de las coordenadas, x, t, $u(x,y) = z$, exclusivamente,

$$u = h(x - ut),$$

que en este caso queda en forma implícita, al no poder despejarse, en general, u en función de x, t.

Se trata de una onda viajera, pero de velocidad variable u.

Por ejemplo, en el caso en el que el dato inicial sea $u(x,0) = x$, es decir, $h(s) = s$, la solución del problema de valores iniciales es

$$u = x - ut \Rightarrow u(x,t) = \frac{x}{1+t}.$$

La ecuación de Burgers tiene una peculiaridad: dado que sus proyecciones características son rectas de la forma $x(t) = x_0 + z_0 t$, cabe la posibilidad de que estas rectas se corten, lo que no sucede con la ecuación del transporte, para la cual las características son paralelas.

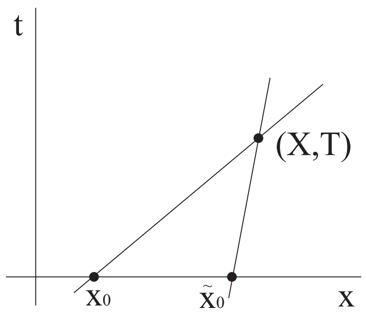

Figura 4.3: Proyecciones características de la ecuación de Burgers

Que haya dos proyecciones características, $x(t) = x_0 + z_0 t$, $x(t) = \tilde{x}_0 + \tilde{z}_0 t$, que se corten en un punto (X,T) es grave, ya que la primera asigna a la solución el valor $u(X,T) = z_0$ en dicho punto, mientras que la segunda le asigna el valor $u(X,t) = \tilde{z}_0$, lo que es incompatible si $z_0 \neq \tilde{z}_0$.

Resolviendo la ecuación,

$$x_0 + z_0 T = X = \tilde{x}_0 + \tilde{z}_0 T \Rightarrow T = -\frac{\tilde{x}_0 - x_0}{\tilde{z}_0 - z_0}, \quad X = \frac{z_0 \tilde{x}_0 - \tilde{z}_0 x_0}{z_0 - \tilde{z}_0},$$

observamos que esto sucede en un instante $T > 0$ en el futuro si el signo de $\tilde{x}_0 - x_0$ es opuesto al signo de $\tilde{z}_0 - z_0$. Teniendo en cuenta que $u(x,t)$ es la velocidad de las partículas del fluido, esto se puede evitar si la velocidad en $t = 0$ es una función creciente de x.

Esto es lógico, ya que, si las partículas más adelantadas (con mayor x inicial) tienen una velocidad mayor, nunca chocarán con las partículas más rezagadas (con menor x inicial).

Por ello la ecuación de Burgers se utiliza para modelizar ondas de choque, que aparecen cuando unas partículas de fluido alcanzan a las que están situadas por delante.

4.4. Solución general de la ecuación cuasilineal

Si queremos obtener directamente la solución general de una ecuación cuasilineal sin pasar por la solución en forma paramétrica, podemos reescribirlo formalmente como

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c},$$

y reducirlo a un sistema de dos ecuaciones de primer orden, por ejemplo, tomando x como variable independiente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{c}{a},$$

o cualquier otra.

La ventaja fundamental es que no aparece ningún parámetro. Como hemos visto, esto es equivalente a un cambio de variable independiente de τ a x.

Como son dos ecuaciones de orden uno, su solución general podrá expresarse en forma implícita por medio de dos constantes,

$$F(x, y, u) = C_1, \qquad G(x, y, u) = C_2,$$

que se fijarán con el dato inicial para la curva característica.

Si en vez de una sola curva característica tuviéramos un problema de valores iniciales con dato Γ, parametrizado por $\gamma(s)$, las *constantes* dependerían del parámetro s, $C_1(s)$, $C_2(s)$ y podríamos eliminarlo despejando, a través de o de manera implícita,

$$C_1 = f(C_2), \qquad C_2 = g(C_1), \qquad h(C_1, C_2) = 0,$$

a través de una función que no conocemos.

Cualquiera de estas tres expresiones nos da una forma de la solución general,

$$F(x, y, u) = f\left(G(x, y, u)\right), \qquad G(x, y, u) = g\left(F(x, y, u)\right),$$

$$h\left(F(x, y, u), G(x, y, u)\right) = 0,$$

y usaremos la que más nos convenga en cada caso.

Lo vemos con un ejemplo:

Ejemplo 4.4.1 *Hallar la solución general de la ecuación cuasilineal* $u_t + uu_x = 0$.

El sistema característico en este caso quedaría como

$$dt = \frac{dx}{u}, \quad du = 0,$$

que resolvemos fácilmente, ya que la segunda ecuación se integra inmediatamente, $u = C_1$, lo que nos permite integrar la primera,

$$C_2 + ut = x \Rightarrow C_2 = x - ut,$$

con lo cual podemos expresar la solución general de esta ecuación como $C_1 = f(C_2)$,

$$u = f(x - ut),$$

en forma implícita, como hemos visto. □

Obviamente, también se podrían haber empleado las otras expresiones equivalentes,

$$x - ut = g(u), \qquad h(u, x - ut) = 0,$$

pero resultan más incómodas.

4.5. Solución general de la ecuación lineal

Las ecuaciones lineales de primer orden y, en general, las ecuaciones de la forma

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y,u), \tag{4.4}$$

se pueden reducir con un cambio de variables a ecuaciones ordinarias de primer orden.

Para ello, hacemos uso de las proyecciones características,

$$\dot{x} = a(x,y), \qquad \dot{y} = b(x,y),$$

que en estos casos son propiedades de la ecuación, ya que no dependen de una solución concreta, puesto que la variable dependiente u no aparece en el sistema de ecuaciones.

Tomando, por ejemplo, como parámetro τ la propia coordenada x (se podría tomar la coordenada y indistintamente), las proyecciones características son soluciones de la ecuación ordinaria de primer orden,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)},$$

que tendrá una solución general de la forma $K = F(x,y)$, en forma implícita, siendo K una constante arbitraria.

Realizamos el cambio de variables $U(x,y) = x$, $V(x,y) = F(x,y)$, suponiendo que el cambio tiene jacobiano distinto de cero. En caso contrario, se podría tomar $U(x,y) = y$.

Por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial U} + \frac{\partial u}{\partial V}\frac{\partial F}{\partial x},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial V}\frac{\partial F}{\partial y},$$

podemos expresar la ecuación en las nuevas variables independientes U, V,

$$(u_U + u_V F_x)a + u_V F_y b = c,$$

pero como $a = \dot{x}$, $b = \dot{y}$, el término

$$u_V F_x a + u_V F_y b = u_V F_x \dot{x} + u_V F_y \dot{y} = u_V \frac{dF}{d\tau} = 0,$$

se anula, ya que $F(x, y) = K$ es constante a lo largo de las características.

Por tanto, la ecuación 4.4 se reduce a una ecuación ordinaria,

$$a u_U = c,$$

ya que no aparece V en las nuevas variables. La solución general de esta ecuación contendrá una *constante*, que dependerá de V, la variable que etiqueta las características de la ecuación. □

Si hubiéramos tomado $U(x, y) = y$, la ecuación ordinaria resultante habría sido, como es fácil comprobar, $b u_U = c$.

Ejemplo 4.5.1 *Hallar la solución general de la ecuación del transporte,* $u_t + k u_x = 0$.

Esta ecuación es lineal y sabemos que sus proyecciones características verifican

$$\dot{x} = k, \qquad \dot{t} = 1 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = k \Rightarrow x = kt + K.$$

Tomamos como variables nuevas $U(x, t) = x$, $V(x, t) = x - kt$ y la ecuación se reduce a $u_U = 0$, que tiene por solución $u = h(V)$. Es decir,

$$u(x, t) = h(x - kt),$$

como ya habíamos obtenido previamente.