Capítulo 5

Ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden

Objetivos

- Clasificar las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden y reducirlas a sus formas canónicas.
- Resolver problemas de valores iniciales y mixtos para la ecuación de la cuerda vibrante.
- Resolver problemas para ecuaciones diferenciales en derivadas parciales por separación de variables.

5.1. Características de ecuaciones cuasilineales

Las ecuaciones en derivadas parciales más comunes en física e ingeniería son las ecuaciones de segundo orden, a las que dedicaremos este tema.

Más exactamente, nos centraremos en las ecuaciones cuasilineales de segundo orden en dos variables dependientes, x, y. La forma más general de una ecuación de este tipo para una variable $u(x,y)$ es

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d, \tag{5.1}$$

donde a, b, c, d son funciones que dependen de x, y, u, u_x, u_y. Representaremos las soluciones de la ecuación como gráficas $z = u(x,y)$ de funciones de dos variables.

En principio, podríamos pensar que el problema de valores iniciales para este tipo de ecuaciones consiste en hallar soluciones de la ecuación, conocidas u, u_x, u_y a lo largo de una curva Γ en $\mathbb{R}^3$. Es decir, si la curva Γ está parametrizada por $\gamma(s) = \big(x(s), y(s), z(s)\big)$, el dato inicial está compuesto por tres funciones,

$$u\big(x(s), y(s)\big) = z(s), \qquad u_x\big(x(s), y(s)\big) = p(s), \qquad u_y\big(x(s), y(s)\big) = q(s).$$

Sin embargo, es fácil ver que no es necesario dar tres datos. Usando la regla de la cadena,

$$z'(s) = u_x\big(x(s), y(s)\big)x'(s) + u_y\big(x(s), y(s)\big)y'(s) = p(s)x'(s) + q(s)y'(s),$$

vemos que no podemos dar simultáneamente u, u_x, u_y a lo largo de una curva, ya que están ligados entre sí mediante la relación $z' = px' + qy'$. A lo sumo podemos dar dos datos iniciales. Incluso en algunos casos será preciso dar un único dato.

Al igual que hicimos con las ecuaciones de primer orden, podemos definir las curvas características como aquellas sobre las cuales no se puede definir el problema de valores iniciales.

Para ello, calculamos los valores de las derivadas u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} sobre una curva Γ. Los podemos despejar de las ecuaciones

$$\begin{aligned} p'(s) &= u_{xx}\big(x(s), y(s)\big)x'(s) + u_{xy}\big(x(s), y(s)\big)y'(s), \\ q'(s) &= u_{xy}\big(x(s), y(s)\big)x'(s) + u_{yy}\big(x(s), y(s)\big)y'(s), \\ d &= au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}. \end{aligned}$$

Este sistema de tres ecuaciones está determinado y tiene solución única si y sólo si el siguiente determinante no se anula,

$$\left| \begin{array}{ccc} x'(s) & y'(s) & 0 \\ 0 & x'(s) & y'(s) \\ a & 2b & c \end{array} \right|_{\big(x(s),y(s),z(s),p(s),q(s)\big)} \neq 0$$

Por tanto, las curvas características son aquellas para las cuales dicho determinante se anula. Más concretamente, aquellas que verifican

$$a\,(y')^2 - 2bx'y' + c\,(x')^2 = 0, \tag{5.2}$$

o bien, tomando la coordenada x como parámetro para las curvas,

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = 0. \tag{5.3}$$

Al igual que para las ecuaciones de primer orden, a lo largo de una curva no característica podemos calcular todas las derivadas superiores del dato inicial y construir formalmente la solución como serie de potencias en las variables x, y.

Salvo que a, b, c no dependan de u, como sucede en las ecuaciones lineales, la ecuación de las características dependerá de u, con lo que las características variarán según la solución de la ecuación que estemos considerando.

En caso contrario, si sólo la función d depende de u, la ecuación de las características se puede resolver sin conocer las soluciones de la ecuación en derivadas parciales. Recordemos que denominamos proyecciones características a estas curvas en el plano XY, aunque con frecuencia se suelen denominar también características.

Ejemplo 5.1.1 *Obtener las curvas características de la ecuación* $u_{tt} - c^2u_{xx} = f(t, x)$.

Esta es la ecuación de la cuerda vibrante, siendo c la velocidad del sonido. Como $A = -c^2$, $B = 0$, $C = 1$, la ecuación de las proyecciones características es

$$-c^2\,(t')^2 + (x')^2 = 0 \Rightarrow ct' = \pm x' \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm c,$$

con lo cual se trata de dos familias de rectas, $x = ct + x_0$, $x = -ct + x_0$.

5.2. Clasificación de las ecuaciones de segundo orden

La ecuación de las curvas características de una ecuación de segundo orden es una ecuación de grado dos en su velocidad dy/dx, que se puede resolver, lo que conduce a una ecuación ordinaria de primer orden para $y(x)$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Por tanto, dependiendo del signo del discriminante de la ecuación, podemos hacer la siguiente clasificación:

- Ecuaciones elípticas: $b^2 - ac < 0$. No poseen curvas características reales. Por ejemplo, la ecuación de Poisson $u_{xx} + u_{yy} = F(x, y)$.
- Ecuaciones hiperbólicas: $b^2 - ac > 0$. Poseen dos familias de curvas características reales. Por ejemplo, la ecuación de la cuerda vibrante.
- Ecuaciones parabólicas: $b^2 - ac \equiv 0$. Poseen una sola familia de curvas características. Por ejemplo, la ecuación del calor $u_t - ku_{xx} = F(x, t)$.
- Ecuaciones sin tipo definido: aquellas para las que el discriminante cambia de signo. Por ejemplo, la ecuación de Tricomi $u_{yy} - yu_{xx} = 0$.

Ejemplo 5.2.1 *Obtener las curvas características de la ecuación de Tricomi.*

Esta ecuación describe el movimiento de un cuerpo que se desplaza a velocidad supersónica.

Los coeficientes de la ecuación son $a(x, y) = -y$, $b = 0$, $c = 1$, con lo cual la ecuación de las características es

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{y}},$$

con lo cual la ecuación es elíptica para $y < 0$ e hiperbólica para $y > 0$.

Las proyecciones características en el caso hiperbólico son

$$\frac{2}{3}y^{3/2} = x - x_0.$$

Para poder integrar la ecuación de la características, nos ceñimos en lo sucesivo a ecuaciones para las cuales las funciones a, b, c dependen sólo de x, y, no de u, u_x, u_y. Este caso engloba el de las ecuaciones lineales.

5.3. Formas normales de ecuaciones de segundo orden

Al igual que sucedía para las ecuaciones lineales de primer orden, el uso de coordenadas asociadas a las características simplifica la forma de la ecuación, lo que en algunos casos conduce a su resolución. Estudiaremos cada caso por separado:

- Ecuaciones hiperbólicas: la ecuación diferencial tiene dos familias de proyecciones características, que podemos expresar en forma implícita,

  $$U(x,y)=K, \qquad V(x,y)=\tilde{K}.$$

  Es laborioso comprobar que mediante el cambio de variables a las nuevas coordenadas $U(x,y)$, $V(x,y)$, la ecuación se reduce a su forma normal,

  $$u_{UV}=D(U,V,u,u_U,u_V),$$

  en la que sólo aparece la derivada segunda cruzada.

- Ecuaciones elípticas: en este caso no hay proyecciones características reales, sino dos familias complejas conjugadas,

  $$U(x,y)+iV(x,y)=K, \qquad U-iV(x,y)=\tilde{K}.$$

  Se puede comprobar que el cambio de variables, $U(x,y)$, $V(x,y)$, conduce a la siguiente forma normal para la ecuación,

  $$u_{UU}+u_{VV}=D(U,V,u,u_U,u_V),$$

  en la que aparecen las dos derivadas segundas con el mismo coeficiente.

- Ecuaciones parabólicas: en este caso sólo hay una familia de proyecciones características,

  $$V(x,y)=K.$$

  Para completar el cambio de variables, necesitamos otra función $U(x,y)$ que proporcione un jacobiano no nulo. Por ejemplo, la coordenada x o la coordenada y. El cambio de variables $U(x,y)=x$, $V(x,y)$ conduce a la forma normal de la ecuación,

  $$u_{UU}=D(U,V,u,u_U,u_V),$$

  en la que sólo aparece una derivada segunda, respecto a la variable no asociada a ninguna característica.

Ejemplo 5.3.1 *Forma normal de la ecuación del calor,* $u_t-ku_{xx}=F(x,t)$.

Esta ecuación ya está en forma normal, ya que la podemos escribir como

$$u_{xx}=\frac{u_t-F(x,t)}{K},$$

donde sólo aparece una derivada segunda.

Obtenemos sus características igualmente. Como $a=-k$, $b=0$, $c=0$,

$$\frac{dt}{dx}=0\Rightarrow t=K,$$

se trata de las rectas de tiempo constante y forman una sola familia, por lo que la ecuación es parabólica. El cambio de variables a forma normal $U=x$, $V=t$ es trivial, obviamente.

Ejemplo 5.3.2 *Forma normal de la ecuación de Poisson,* $u_{xx}+u_{yy}=F(x,y)$.

Esta ecuación ya está en forma normal, ya que sólo aparecen las dos derivadas segundas en las variables.

Obtenemos sus características igualmente. Como $a=1$, $b=0$, $c=1$,

$$\frac{dy}{dx}=\pm i \Rightarrow x\pm iy=K,$$

tenemos dos familias complejas de características, por lo que la ecuación es elíptica. El cambio de variables a forma normal $U=x$, $V=y$ es trivial, obviamente.

5.4. Ecuación de la cuerda vibrante infinita

5.4.1. Solución general

La ecuación homogénea de la cuerda vibrante (ecuación de ondas unidimensional) infinita, $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$, se reduce a forma canónica mediante el cambio de variable

$$U(x,t)=x+ct, \qquad V(x,t)=x-ct,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial U}+\frac{\partial u}{\partial V},\\
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial t}=c\frac{\partial u}{\partial U}-c\frac{\partial u}{\partial V},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial U}+\frac{\partial u}{\partial V}\right)\\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial U^2}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial U\partial V}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial U\partial V}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial V^2}\frac{\partial V}{\partial x}\\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial U^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial U\partial V}+\frac{\partial^2 u}{\partial V^2},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial U}-\frac{\partial u}{\partial V}\right)\\
&= c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial U^2}\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial U\partial V}\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial U\partial V}\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial V^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right)\\
&= c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial U^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial U\partial V}+\frac{\partial^2 u}{\partial V^2}\right),
\end{aligned}$$

que da como resultado la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial U\partial V}=0,$$

que se integra directamente,

$$0=\frac{\partial}{\partial U}\left(\frac{\partial u}{\partial V}\right)\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial V}=g(V)\Rightarrow u=\int g(V)\,dV=H(U)+G(V),$$

siendo H, G funciones arbitrarias de una sola variable.

Por tanto, deshaciendo el cambio, la solución general de la ecuación homogénea de la cuerda vibrante es

$$u(x,t) = H(x+ct) + G(x-ct). \tag{5.4}$$

La interpretación de la solución general es bien sencilla. Es la suma de una onda que viaja hacia la izquierda del eje X con velocidad c, $H(x+ct)$, y otra que viaja hacia la derecha con la misma velocidad, $G(x-ct)$.

5.4.2. Problema de valores iniciales

Esta forma de la solución general es cómoda para resolver el problema de valores iniciales. Tomando $t=0$ como instante inicial, el dato inicial es la posición inicial de la cuerda, $u(x,0)$, y la velocidad inicial de la cuerda, $u_t(x,0)$. Es decir, son precisas dos funciones,

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x).$$

Sustituyendo $t=0$ en la solución general y su derivada temporal, obtenemos

$$f(x) = u(x,0) = H(x) + G(x) \Rightarrow f'(x) = H'(x) + G'(x),$$
$$g(x) = u_t(x,0) = cH'(x) - cG'(x),$$

de donde podemos despejar las expresiones de las derivadas de las ondas viajeras en función del dato inicial,

$$H'(x) = \frac{f'(x)}{2} + \frac{g(x)}{2c}, \qquad G'(x) = \frac{f'(x)}{2} - \frac{g(x)}{2c},$$

que podemos integrar salvo una constante,

$$H(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^x g(X)\,dX + k, \qquad G(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2c}\int_0^x g(X)\,dX - k,$$

lo que conduce a la solución general del problema de valores iniciales,

$$u(x,t) = H(x+ct) + G(x-ct) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(X)\,dX.$$

Para que u sea una función de clase C^2 precisamos que f sea de clase C^2 y que g sea de clase C^1:

Teorema 5.4.1 *El problema de valores iniciales $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$ para $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, siendo f de clase C^2, g de clase C^1, tiene por solución única*

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(X)\,dX. \tag{5.5}$$

Ejemplo 5.4.1 *Hallar la solución de la ecuación de la cuerda vibrante cuyo dato inicial es $u(x,0) = \sin x$, $u_t(x,0) = c\cos x$.*

Aplicando la fórmula anterior, con $f(x) = \sin x$, $g(x) = c\cos x$,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\sin(x+ct)+\sin(x-ct)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} \cos X\,dX \\ &= \frac{\sin(x+ct)+\sin(x-ct)}{2} + \frac{\sin(x+ct)-\sin(x-ct)}{2} = \sin(x+ct). \end{aligned}$$

5.4.3. Dominios de dependencia e influencia

Este resultado tiene una consecuencia interesante: el valor de $u(x_0, t_0)$ depende de los valores del dato inicial $u(x, 0)$ en dos puntos $(x_0 - ct_0, 0)$, $(x_0 + ct_0, 0)$, y de los valores de $u_t(x, 0)$ en todos los puntos del segmento del eje X que los une.

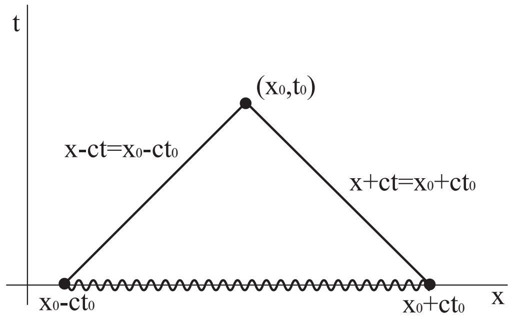

Figura 5.1: Dominio de dependencia para la ecuación de cuerda vibrante

Esto es lógico, ya que si la perturbación de la cuerda se desplaza a velocidad c, sólo los puntos que estén a una distancia inferior o igual a ct del punto x pueden afectarle transcurrido un tiempo t. El intervalo $[x - ct, x + ct]$ es el **dominio de dependencia** del punto (x, t).

A la inversa, un punto $(x_0, 0)$ del eje X influye en el instante t en todos los puntos de la cuerda que estén situados a una distancia inferior o igual a ct. Por tanto, su **dominio de influencia** es la región limitada por las semirrectas de pendiente $\pm c$ que parten de dicho punto.

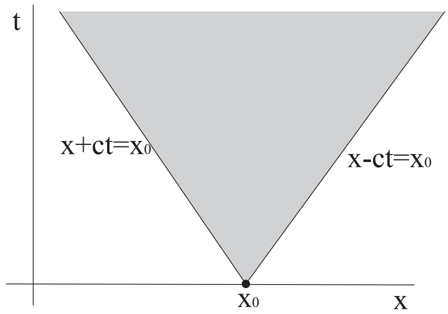

Figura 5.2: Dominio de influencia para la ecuación de la cuerda vibrante

5.4.4. Ley del paralelogramo

Otra propiedad importante de la ecuación homogénea de la cuerda vibrante es la que hace referencia a los paralelogramos formados por segmentos de características, como el de la figura.

Sabemos que cualquier solución de la ecuación es de la forma $u(U,V) = H(U) + G(V)$, usando coordenadas sobre las características. De este modo, si las coordenadas de los vértices opuestos del paralelogramo A y B son respectivamente (U_A, V_A), (U_C, V_C), las de B y D tendrán que ser necesariamente (U_C, V_A), (U_A, V_C).

Por tanto, sumando los valores de u en las parejas de vértices opuestos del paralelogramo,

$$u(A) + u(C) = H(U_A) + G(V_A) + H(U_C) + G(V_C),$$

$$u(B) + u(D) = H(U_C) + G(V_A) + H(U_A) + G(V_C),$$

llegamos a la conclusión de que son iguales:

Teorema 5.4.2 *Sea u una solución de la ecuación homogénea de la cuerda vibrante. Si A, C y B, D son parejas de vértices opuestos de un paralelogramo formado por segmentos de características, se cumple que*

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D). \tag{5.6}$$

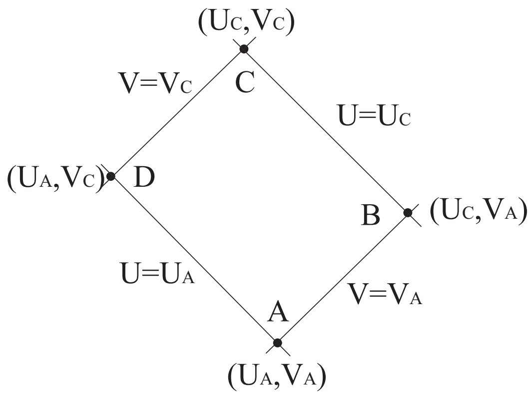

Figura 5.3: Paralelogramo característico

Este resultado es útil para calcular la solución de la ecuación de la cuerda vibrante finita.

5.5. Ecuación de la cuerda vibrante finita

5.5.1. Problema mixto

Consideremos una cuerda de longitud finita L, situada, por ejemplo, en el intervalo $[0, L]$ del eje X. De igual manera, se podría *centrar* la cuerda y situarla en el intervalo $[-L/2, L/2]$.

Aparte del dato inicial, ya que desconocemos el comportamiento de la cuerda en sus extremos, habría que indicar los valores $u(0,t)$, $u(L,t)$. Lo más común es que los extremos de la cuerda estén fijos, con lo cual la **condición de contorno** para este problema suele ser $u(0,t) = 0 = u(L,t)$.

Así pues, el problema más común para la ecuación de la cuerda vibrante es un **problema mixto**, con dos condiciones iniciales y dos condiciones de contorno,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,\ x \in (0, L),\ t > 0,$$
$$u(x,0) = f(x),\quad u_t(x,0) = g(x),\quad u(0,t) = \alpha(t),\quad u(L,t) = \beta(t). \quad (5.7)$$

Obviamente, $u(0,0)$, $u(L,0)$ están determinados a la vez por las condiciones iniciales y de contorno, que deben ser compatibles entre sí,

$$f(0) = u(0,0) = \alpha(0), \quad f(L) = u(L,0) = \beta(0),$$

al igual que sus derivadas temporales,

$$g(0) = u_t(0,0) = \alpha'(0), \quad g(L) = u_t(L,0) = \beta'(0),$$

o incluso las derivadas segundas, usando la ecuación de la cuerda,

$$c^2 f''(0) = c^2 u_{xx}(0,0) = u_{tt}(0,0) = \alpha''(0),$$
$$c^2 f''(L) = c^2 u_{xx}(L,0) = u_{tt}(L,0) = \beta''(0).$$

5.5.2. Dominios de dependencia

En la cuerda infinita las ondas viajeras se desplazaban indefinidamente y el esquema de los dominios de dependencia e influencia era sencillo.

Sin embargo, en la cuerda finita las ondas llegan a los extremos de la cuerda, donde sufren la influencia de las condiciones de contorno. Esto no es mayor problema para los puntos situados en el triángulo limitado por el segmento $[0, L]$ del eje X y las rectas características $x = ct$, $x = L - ct$ (zona I de la figura), con vértice superior en $(L/2, L/2c)$, puesto que estos puntos no son influidos por los extremos. En la región I es válida la fórmula 5.5 para el problema de valores iniciales.

En cambio, en la zona II, el triángulo limitado por las rectas $x = 0$, $x = ct$, $x = L - ct$, hay que tener en cuenta la influencia del extremo izquierdo de la cuerda.

Del mismo modo, en la zona III, el triángulo limitado por las rectas $x = L$ $x = ct$, $x = L - ct$, es el extremo derecho el que ejerce su influencia.

En el resto de regiones superiores ya influyen ambos extremos de la cuerda. Esta estructura de paralelogramos característicos se va reproduciendo a lo largo del eje temporal indefinidamente para tener en cuenta las ondas que alcanzan varias veces los extremos de la cuerda.

¿Cómo podemos obtener la solución del problema mixto para la ecuación de la cuerda vibrante? Dependerá de la región del plano que estemos considerando:

- Zona I: aplicamos la fórmula 5.5 directamente.
- Zona II: podemos usar la ley del paralelogramo con paralelogramos característicos que se apoyen, por ejemplo, en la recta $x = 0$ (donde conocemos el valor de u por la condición de contorno), en la recta $t = 0$ (donde conocemos el valor de u por el dato inicial) y en la zona I, donde acabamos de calcular la solución. La ley del paralelogramo nos permite despejar de esta forma el valor de u en puntos de la zona II.

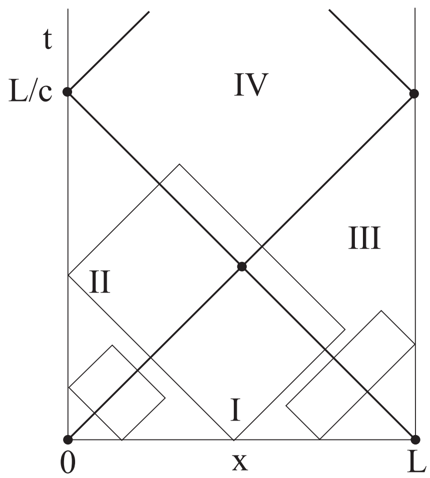

Figura 5.4: Dominios de dependencia para la ecuación de la cuerda finita

- Zona III: del mismo modo, podemos usar la ley del paralelogramo con paralelogramos característicos que se apoyen, por ejemplo, en la recta $x = L$ (donde conocemos el valor de u por la condición de contorno), en la recta $t = 0$ y en la zona I.
- Resto de zonas: podemos trazar paralelogramos característicos que se apoyen bien en las rectas $x = 0$, $x = L$, bien en zonas donde ya conozcamos la solución.

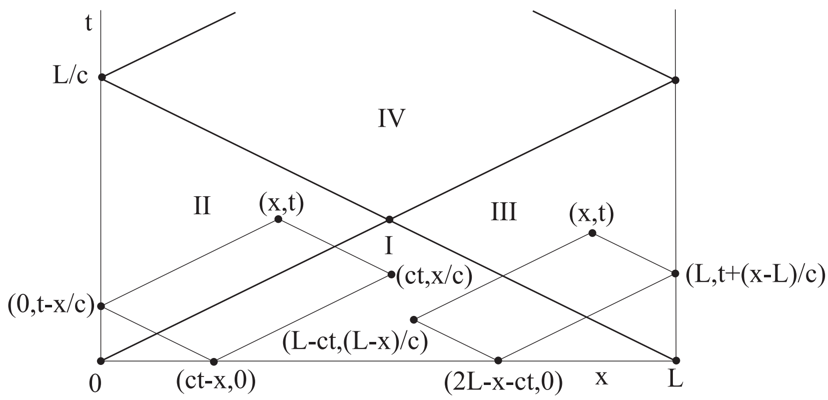

Figura 5.5: Cálculo de la solución de la ecuación de la cuerda finita

Ejemplo 5.5.1 *Obtener la solución de la ecuación de la cuerda vibrante* $u_{tt} = c^2 u_{xx} = 0$*,* $t > 0$*,* $x \in (0, \pi)$*, que verifica* $u(x, 0) = \sin x$*,* $u_t(x, 0) = 0$*, con condiciones de contorno* $u(0, t) = 0 = u(\pi, t)$*.*

Los datos, $f(x) = \sin x$, $g(x) = 0$, $\alpha(t) = 0 = \beta(t)$, verifican las condiciones de compatibilidad,

$$f(0) = 0 = \alpha(0), \quad f(\pi) = 0 = \beta(0), \quad g(0) = 0 = \alpha'(0), \quad g(\pi) = 0 = \beta'(0),$$
$$c^2 f''(0) = 0 = \alpha''(0), \qquad c^2 f''(\pi) = 0 = \beta''(0).$$

En la zona I podemos aplicar la fórmula de D'Alembert,

$$u_I(x,t) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} = \frac{\sin(x+ct)+\sin(x-ct)}{2} = \sin x \cos ct.$$

En la zona II podemos usar la ley del paralelogramo, de acuerdo con la figura 5.5,

$$\begin{aligned} u_{II}(x,t) &= u\left(0, t-\frac{x}{c}\right) + u_I\left(ct, \frac{x}{c}\right) - u(ct-x,0) = \sin ct\cos x - \sin(ct-x) \\ &= \sin x \cos ct. \end{aligned}$$

Del mismo modo, en la zona, podemos usar la misma ley, pero apoyándonos en la recta $x = \pi$,

$$\begin{aligned} u_{III}(x,t) &= u\left(\pi, t+\frac{x-\pi}{c}\right) + u_I\left(\pi - ct, \frac{\pi - x}{c}\right) - u(2\pi - x - ct, 0) \\ &= \sin(\pi - ct)\cos(\pi - x) - \sin(2\pi - x - ct) = \sin x \cos ct. \end{aligned}$$

Para la mitad inferior de la zona IV podemos usar un paralelogramo como el que empleamos en la zona II, pero más extenso, de modo que tenga vértices en las zonas IV y III,

$$\begin{aligned} u_{IV}(x,t) &= u\left(0, t-\frac{x}{c}\right) + u_{III}\left(ct, \frac{x}{c}\right) - u(ct-x,0) = \sin ct\cos x \\ &- \sin(ct-x) = \sin x\cos ct, \end{aligned}$$

y así sucesivamente en el resto de zonas más alejadas. No obstante, comprobamos que la solución en todas las zonas es la misma,

$$u(x,t) = \sin x \cos ct.$$

Más adelante justificaremos este resultado, que corresponde al hecho de que la onda es estacionaria.

5.5.3. Energía

Otro resultado interesante es el relativo a la energía de la cuerda vibrante finita. Definimos la **energía** de una onda u solución de la ecuación $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$,

$$E[u] := \int_0^L \left(u_t^2 + c^2 u_x^2\right) dx, \tag{5.8}$$

aunque, en realidad, para que sea la energía física, habría que multiplicar esta cantidad por alguna constante.

La primera propiedad de la energía de la cuerda es que es una cantidad positiva, $E[u] \geq 0$, ya que es la integral de una suma de términos positivos. De hecho, $E[u] > 0$ si la función u no es nula.

En principio, $E[u]$ depende del tiempo, ya que sólo hemos integrado en la variable espacial. Calculamos, pues, su derivada,

$$\begin{aligned}\frac{dE[u]}{dt} &= \int_0^L \frac{\partial\left(u_t^2+c^2u_x^2\right)}{\partial t}\,dx = 2\int_0^L \left(u_{tt}u_t + c^2u_{tx}u_x\right)\,dx\\ &= 2c^2\int_0^L \left(u_{xx}u_t + u_{tx}u_x\right)\,dx = 2c^2\int_0^L \frac{\partial\left(u_tu_x\right)}{\partial x}\,dx\\ &= 2c^2\left[u_tu_x\right]_{x=0}^{x=L} = 2c^2\left(u_t(L,t)u_x(L,t) - u_t(0,t)u_x(0,t)\right),\end{aligned}$$

para lo cual únicamente hemos hecho uso de la ecuación de la cuerda para sustituir u_{tt} por c^2u_{xx} en la segunda línea.

Observamos que el resultado depende tan sólo de los valores de u_t, u_x en los extremos de la cuerda y que en el caso particular de que los extremos estén fijos, es decir, si u_t se anula en los extremos, $dE[u]/dt$ se anula.

Esto es razonable con la interpretación de $E[u]$ como energía, ya que, si los extremos estuvieran libres o la cuerda estuviera forzada, habría disipación de energía por los extremos.

Esta propiedad de conservación de la energía es útil para dirimir cuestiones de unicidad de las soluciones de la ecuación de la cuerda vibrante.

Supongamos que tenemos dos soluciones distintas, $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ del problema mixto

$$u_{tt} - c^2u_{xx} = F(x,t), \quad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x),$$
$$u(0,t) = \alpha(t), \quad u(L,t) = \beta(t), \quad t > 0,\ x \in (0,L).$$

La función $u_0(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ es, por tanto, solución del siguiente problema de condiciones triviales,

$$u_{tt} - c^2u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0,$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t > 0,\ x \in (0,L).$$

En particular, $u_{0t}(0,t) = 0 = u_{0t}(L,t)$, puesto que u_0 es nula en los extremos de la cuerda. Por tanto, observamos que

$$\frac{dE[u_0]}{dt} = 2c^2\left(u_{0t}(L,t)u_{0x}(L,t) - u_{0t}(0,t)u_{0x}(0,t)\right) = 0,$$

la energía de u_0 es constante.

Por tanto, si la calculamos, por ejemplo, en el instante $t = 0$,

$$E[u_0] = \int_0^L \left(u_{0t}(x,0)^2 + c^2u_{0x}(x,0)^2\right)\,dx = 0,$$

ya que $u_{0t}(x,0) = 0$ y derivar el dato inicial $u_0(x,0) = 0$ implica $u_{0x}(x,0) = 0$.

Así pues, la energía de u_0 es constante e igual a cero, lo que implica que u_0 es la función nula. Por tanto concluimos que $u_1 = u_2$:

Teorema 5.5.1 *Es única la solución del problema mixto*

$$u_{tt} - c^2u_{xx} = F(x,t), \quad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x),$$
$$u(0,t) = \alpha(t), \quad u(L,t) = \beta(t), \quad t > 0,\ x \in (0,L).$$

De idéntica manera se demuestra el siguiente resultado:

Teorema 5.5.2 *Es única la solución del problema mixto*

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), \quad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x),$$

$$u_x(0,t) = \alpha(t), \quad u_x(L,t) = \beta(t), \quad t > 0,\ x \in (0,L).$$

5.5.4. Separación de variables

El problema mixto de la ecuación de la cuerda finita se puede abordar por separación de variables, dependiendo de cómo sean las condiciones de contorno. El caso más frecuente, como se ha mencionado, es el de extremos fijos,

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0.$$

Suponemos que la solución del problema se puede expresar mediante **separación de variables**, es decir que se puede escribir como $u(x,t) = X(x)T(t)$. Sustituyendo en la ecuación y separando los términos que dependen de cada variable,

$$u_{tt}(t,x) - c^2 u_{xx}(x,t) = X(x)T''(t) - c^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

siendo λ una constante, ya que el resultado no puede depender sólo de t y sólo de x al mismo tiempo.

Hemos reducido, por tanto, el problema a resolver dos ecuaciones ordinarias independientes,

$$T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0, \qquad X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

Las condiciones de contorno se traducen en

$$X(0) = 0, \qquad X(L) = 0,$$

ya que la anulación de u en los extremos es independiente del valor de t.

Así pues, tenemos un problema de contorno para X,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X(L) = 0,$$

que ya hemos resuelto con anterioridad:

Las únicas soluciones no triviales aparecen para $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, $n \in \mathbb{N}$, y son de la forma,

$$X_n(x) = C_n \sin\frac{n\pi}{L}x,$$

etiquetándolas con el subíndice n de acuerdo con el valor de λ permitido.

Ahora podemos abordar la ecuación de $T(t)$ para los valores permitidos de λ,

$$T_n''(t) + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 T_n(t) = 0,$$

cuya solución general es

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi c}{L}t + B_n \sin\frac{n\pi c}{L}t.$$

Por tanto, la forma más general de la solución de la ecuación de la cuerda vibrante, teniendo en cuenta que por el principio de superposición lineal la suma de soluciones de una ecuación lineal homogénea es también solución, es

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi c}{L}t+B_n\sin\frac{n\pi c}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x. \tag{5.9}$$

No se incluyen las constantes C_n, ya que se incorporan a las nuevas, A_n, B_n.
Sólo falta implementar las condiciones iniciales para resolver el problema,

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{L}x=u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\sin\frac{n\pi}{L}x\Rightarrow A_n=f_n,\ n\in\mathbb{N},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi c}{L}\sin\frac{n\pi}{L}x=u_t(x,0)=g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n\sin\frac{n\pi}{L}x\Rightarrow B_n=\frac{L}{n\pi c}g_n,\ n\in\mathbb{N}.$$

Observamos, por tanto, que de manera natural han aparecido los desarrollos de Fourier en serie de senos de las funciones $f(x)$, $g(x)$ del dato inicial:

Teorema 5.5.3 *El problema mixto para la ecuación de la cuerda vibrante $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$, $x\in(0,L)$, $t>0$, con condiciones iniciales $u(x,0)=f(x)$, $u_t(x,0)=g(x)$ y de contorno $u(0,t)=0=u(L,t)$ tiene por solución*

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(f_n\cos\frac{n\pi c}{L}t+\frac{L}{n\pi c}g_n\sin\frac{n\pi c}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x, \tag{5.10}$$

si las funciones f, g admiten desarrollo de Fourier en serie de senos,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\sin\frac{n\pi}{L}x,\quad g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n\sin\frac{n\pi}{L}x,$$

$$f_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx,\qquad g_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx.$$

En el caso de que las coordenadas no sitúen la cuerda en el intervalo $[0,L]$ no es preciso resolver otro problema, sino trasladar el eje con un sencillo cambio de variable. Por ejemplo, si hubiéramos situado la cuerda centrada, $x\in[-L/2,L/2]$, bastaría realizar la traslación $x=y-L/2$, que verifica que $x(0)=-L/2$, $x(L)=L/2$.

Ejemplo 5.5.2 *Obtener la solución de la ecuación de la cuerda vibrante $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$, $t>0$, $x\in(0,\pi)$, que verifica $u(x,0)=\sin x$, $u_t(x,0)=0$, con condiciones de contorno $u(0,t)=0=u(\pi,t)$.*

Dado que las condiciones de contorno son de extremos fijos, podemos abordar el problema por separación de variables. En este caso $L=\pi$.
Se trata de obtener los desarrollos de Fourier de $f(x)$, y $g(x)$,

$$f_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\qquad g_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g(x)\sin nx\,dx.$$

Pero este caso particular es especialmente sencillo, ya que todos los coeficientes g_n son nulos, ya que $g(x) = 0$, y, por su parte,

$$f(x) = \sin x = f_1 \sin x + f_2 \sin 2x + \cdots ,$$

con lo cual nos podemos ahorrar las integrales y concluir que todos los coeficientes f_n del desarrollo son nulos, salvo $f_1 = 1$.

Por tanto, sustituyendo en la solución general,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n \cos nct + \frac{g_n}{nc} \sin nct \right) \sin nx = \cos ct \sin x,$$

tal como habíamos obtenido, de una manera más laboriosa, en el ejemplo 5.5.1.

5.6. Ecuación inhomogénea de la cuerda vibrante

Para terminar este tema, consideraremos el caso de la cuerda vibrante sometida a una fuerza externa $F(x,t)$.

Abordaremos en primer lugar el caso de la cuerda infinita, de modo que no habrá condiciones de contorno y el problema de valores iniciales será

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}, \qquad u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x).$$

Para ello, recordemos que en coordenadas características $U(x,t) = x + ct$, $V(x,t) = x - ct$, la ecuación de la cuerda vibrante inhomogénea se escribe como

$$u_{UV} = -\frac{1}{4c^2} F\left(\frac{U+V}{2}, \frac{U-V}{2c} \right).$$

Por tanto, integrando dos veces la ecuación, tal como hicimos para la ecuación homogénea, obtenemos la solución general de la ecuación inhomogénea,

$$u(U,V) = H(U) + G(V) - \int dU \int dV F\left(\frac{U+V}{2}, \frac{U-V}{2c} \right),$$

y sólo habría que saber los extremos de integración para conocer la solución del problema de valores iniciales:

Teorema 5.6.1 *El problema de valores iniciales $u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)$, $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$ para $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, siendo f de clase C^2, g, F de clase C^1, tiene por solución*

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(X)\, dX + \frac{1}{2c} \int_0^t dT \int_{x-c(t-T)}^{x+c(t-T)} dX\, F(X,T). \tag{5.11}$$

Lo comprobamos explícitamente. El dato inicial es $f(x)$,

$$u(x,0) = \frac{f(x) + f(x)}{2} = f(x),$$

puesto que las integrales se anulan, ya que van de x a x y de cero a cero respectivamente.

Asimismo, la derivada temporal del dato inicial es $g(x)$, derivando las integrales

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= c\frac{f'(x+ct)-f'(x-ct)}{2}+\frac{g(x+ct)+g(x-ct)}{2} \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \{F(x+c(t-T),T)+F(x-c(t-T),T)\}\,dT, \end{aligned}$$

obtenemos el resultado esperado,

$$u_t(x,0) = c\frac{f'(x)-f'(x)}{2}+\frac{g(x)+g(x)}{2} = g(x).$$

Finalmente, calculamos el resto de derivadas,

$$\begin{aligned} u_x(x,t) &= \frac{f'(x+ct)+f'(x-ct)}{2}+\frac{g(x+ct)-g(x-ct)}{2c} \\ &+ \frac{1}{2c}\int_0^t \{F(x+c(t-T),T)-F(x-c(t-T),T)\}\,dT, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,t) &= \frac{f''(x+ct)+f''(x-ct)}{2}+\frac{g'(x+ct)-g'(x-ct)}{2c} \\ &+ \frac{1}{2c}\int_0^t \{F_x(x+c(t-T),T)-F_x(x-c(t-T),T)\}\,dT, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= c^2\frac{f''(x+ct)+f''(x-ct)}{2}+c\frac{g'(x+ct)-g'(x-ct)}{2} \\ &+ \frac{c}{2}\int_0^t \{F_x(x+c(t-T),T)-F_x(x-c(t-T),T)\}\,dT+F(x,t), \end{aligned}$$

y juntando todos los términos, comprobamos que efectivamente se satisface la ecuación de la cuerda vibrante,

$$u_{tt}(x,t)-c^2u_{xx}(x,t) = F(x,t).\ \square$$

Al igual que sucedía con la cuerda no forzada, la solución en (x,t) depende del dato inicial en los puntos $(x-ct,0)$, $(x+ct,0)$ y de la derivada temporal del dato en el intervalo $[x-ct,x+ct]$ del eje X. Observamos que la fuerza también aparece en la integral en el intervalo $[x-ct,x+ct]$ del eje X, por lo que el dominio de dependencia, y el de influencia, para la ecuación inhomogénea es el mismo que para la ecuación homogénea.

Ejemplo 5.6.1 *Hallar la solución de la ecuación de la cuerda vibrante sometida a una fuerza,* $u_{tt}-c^2u_{xx}=\cos t$*, cuyo dato inicial es* $u(x,0)=\sin x$*,* $u_t(x,0)=c\cos x$*.*

Obsérvese que es el ejemplo 5.4.1, pero con el añadido de la fuerza, con lo cual ya conocemos los dos primeros términos.

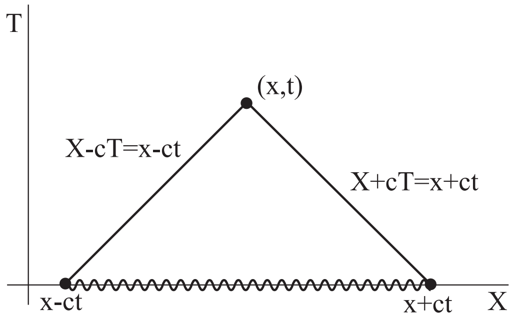

Figura 5.6: Dominio de dependencia para la ecuación inhomogénea de la cuerda

Aplicando la fórmula de D'Alembert, con $f(x) = \sin x$, $g(x) = c\cos x$,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\sin(x+ct)+\sin(x-ct)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} \cos X\, dX \\ &+ \frac{1}{2c}\int_0^t dT \int_{x-c(t-T)}^{x+c(t-T)} dX\ \cos T = \sin(x+ct) \\ &+ \int_0^t \int_{x-c(t-T)}^{x+c(t-T)} (t-T)\cos T\, dT = \sin(x+ct) + 1 - \cos t. \end{aligned}$$

5.7. Ecuación inhomogénea de la cuerda vibrante finita

El problema de la cuerda vibrante se complica cuando a la vez se introducen condiciones de contorno y un término inhomogéneo. Como ya vimos para la cuerda finita, no hay una fórmula cerrada para la solución general en la mayoría de los casos, y tampoco podemos utilizar la ley del paralelogramo, ya que sólo es válida para la ecuación homogénea. Podemos, eso sí, aplicar la fórmula 5.11 a la región I.

Una estrategia para resolver el problema mixto inhomogéneo,

$$\begin{gathered} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), \quad t > 0, \quad x \in (0,L), \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad u(0,t) = \alpha(t), \quad u(L,t) = \beta(x), \end{gathered} \tag{5.12}$$

es descomponerlo en problemas más sencillos, cada uno de los cuales resuelve parte del problema completo:

1. Condiciones de contorno: comenzamos eliminando las condiciones de contorno, caso de que no sean triviales. Realizando el cambio

   $$u(x,t) = v(x,t) + \frac{x}{L}\beta(t) + \frac{L-x}{L}\alpha(t),$$

   garantizamos que $u(0,t) = \alpha(t)$, $u(L,t) = \beta(t)$ si el problema para $v(x,t)$ tiene condiciones de contorno de extremos fijos,

   $$\begin{gathered} v_{tt} - c^2 v_{xx} = \tilde{F}(x,t), \quad t > 0, \quad x \in (0,L), \\ v(x,0) = \tilde{f}(x), \quad u_t(x,0) = \tilde{g}(x), \quad v(0,t) = 0, \quad v(L,t) = 0, \end{gathered}$$

donde han variado la fuerza y los datos iniciales,

$$\tilde F(x,t) = F(x,t) - \frac{x}{L}\beta''(t) - \frac{L-x}{L}\alpha''(t),$$

$$\tilde f(x) = f(x) - \frac{x}{L}\beta(0) - \frac{L-x}{L}\alpha(0), \quad \tilde g(x) = g(x) - \frac{x}{L}\beta'(0) - \frac{L-x}{L}\alpha'(0).$$

2. Condiciones iniciales: descomponemos $v(x,t) = w(x,t) + z(x,t)$ donde $z(x,t)$ es solución del problema homogéneo mixto para la ecuación de la cuerda finita,

$$z_{tt} - c^2 z_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad x \in (0,L),$$
$$z(x,0) = \tilde f(x), \quad z_t(x,0) = \tilde g(x), \quad z(0,t) = 0, \quad z(L,t) = 0,$$

y, por tanto, $w(x,t)$ tendrá que ser solución de un problema trivial, salvo por el término inhomogéneo de la fuerza,

$$w_{tt} - c^2 w_{xx} = \tilde F(x,t), \quad t > 0, \quad x \in (0,L),$$
$$w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = 0, \quad w(0,t) = 0, \quad w(L,t) = 0.$$

3. Problema inhomogéneo: para obtener $w(x,t)$ partimos del hecho de que las series de Fourier en senos satisfacen las condiciones de contorno triviales. Por ello, suponiendo que la fuerza admite desarrollo de Fourier,

$$\tilde F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin\frac{n\pi}{L}x, \qquad F_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L F(x,t)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx,$$

y si desarrollamos igualmente la solución $w(x,t)$ del problema,

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi}{L}x,$$

las condiciones de contorno se satisfacen trivialmente, $w(0,t) = 0 = w(L,t)$. Y si además imponemos $T_n(0) = 0$, $T_n'(0) = 0$, las condiciones iniciales se satisfarán también.

Introducimos los desarrollos en la ecuación,

$$\begin{aligned} w_{tt}(x,t) - c^2 w_{xx}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n''(t) + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 T_n(t)\right)\sin\frac{n\pi}{L}x \\ &= \tilde F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)\sin\frac{n\pi}{L}x, \end{aligned}$$

y por la unicidad del desarrollo de Fourier, llegamos a la conclusión de que las funciones temporales $T_n(t)$ satisfacen un problema de valores iniciales para un sistema de ecuaciones ordinarias,

$$T_n''(t) + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 T_n(t) = F_n(t), \qquad T_n(0) = 0 = T_n'(0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, al menos formalmente, el problema está resuelto.

Juntando todos los términos, es obvio que la solución del problema mixto inhomogéneo es

$$u(x,t) = w(x,t) + z(x,t) + \frac{x}{L}\beta(t) + \frac{L-x}{L}\alpha(t). \tag{5.13}$$

Ejemplo 5.7.1 *Hallar la solución de la ecuación de la cuerda vibrante sometida a una fuerza,* $u_{tt} - c^2u_{xx} = \sin x$, $t > 0$, $x \in (0,\pi)$, *con dato inicial* $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$ *y condiciones de contorno* $u(0,t) = 0 = u(\pi,t)$.

En este caso, como la fuerza es una función sencilla que sólo depende de x, podemos simplificar el problema buscando una solución sencilla, $u_p(x)$, que no dependa de t. Sustituyendo en la ecuación,

$$-c^2u_p''(x) = \sin x \Rightarrow u_p(x) = \frac{\sin x}{c^2}.$$

Descomponiendo $u(x,t) = v(x,t) + u_p(x)$, reducimos el problema a resolver $v_{tt} - c^2v_{xx}$ con condiciones iniciales y de contorno

$$f(x) = v(x,0) = u(x,0) - u_p(x) = -\frac{\sin x}{c^2}, \qquad g(x) = v_t(x,0) = u_t(x,0) = 0,$$

$$v(0,t) = u(0,t) - u_p(0) = 0, \qquad v(\pi,t) = u(\pi,t) - u_p(\pi) = 0,$$

que es un problema mixto homogéneo de extremos fijos. Lo resolvemos por series de Fourier,

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(f_n\cos nct + \frac{g_n}{nc}\sin nct\right)\sin nx,$$

si las funciones f, g admiten desarrollo de Fourier en serie de senos,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin nx, \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin nx.$$

La función $g(x)$ es nula, luego todos los coeficientes g_n son nulos. En cambio,

$$-\frac{\sin x}{c^2} = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin nx \Rightarrow f_1 = -\frac{1}{c^2}, \quad f_n = 0,\ \forall n \neq 1,$$

$$v(x,t) = -\frac{\cos ct \sin x}{c^2},$$

y por tanto, la solución del problema es

$$u(x,t) = u_p(x) + v(x,t) = \frac{\sin x}{c^2}(1 - \cos ct).$$

No obstante, podríamos haber resuelto este problema según el esquema anterior. Como las condiciones de contorno e iniciales son triviales, podemos comenzar por el punto tercero:

Hayamos el desarrollo de Fourier de la fuerza,

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)\sin nx \Rightarrow F_1(t) = 1, \quad F_n = 0,\ \forall n \neq 1,$$

lo que unido al desarrollo de la solución,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx,$$

conduce a un problema de valores iniciales para un sistema de ecuaciones ordinarias,

$$T_n'' - n^2c^2T_n = F_n, \quad T_n(0) = 0 = T_n'(0), \quad n \in \mathbb{N},$$

que en nuestro caso se reduce a dos tipos de ecuaciones:

Para $n \neq 1$:

$$T_n'' + n^2c^2T_n = 0 \Rightarrow T_n(t) = a_n \cos nct + b_n \sin nct,$$

pero las condiciones iniciales $T_n(0) = 0 = T_n'(0)$ imponen que $a_n = 0 = b_n$, con lo cual $T_n(t) \equiv 0$, para $n \neq 1$.

Para $n = 1$:

$$T_1'' + c^2T_1 = 1 \Rightarrow T_1(t) = a_1 \cos ct + b_1 \sin ct + \frac{1}{c^2},$$

y las condiciones iniciales $T_1(0) = 0 = T_1'(0)$ imponen

$$0 = T_1(0) = a_1 + \frac{1}{c^2}, \qquad 0 = T_1'(0) = cb_1,$$

con lo cual $a_1 = -c^{-2}$, $b_1 = 0$, y reobtenemos la solución del problema,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx = \frac{1 - \cos ct}{c^2} \sin x.$$

5.8. Cuerda semiinfinita

Un problema más sencillo relacionado con los anteriores es el de la cuerda semiinfinita. Es decir, una cuerda con un solo extremo, que ubicaremos en $x = 0$. La cuerda, por su parte, estará situada en la semirrecta real positiva. Se trata, por tanto, de problemas de valores iniciales,

$$u_{tt} - c^2u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \qquad x, t > 0,$$

que deben completarse con una condición de contorno en el extremo $x = 0$.

Esta situación nos obliga a dividir el plano XT en dos regiones, teniendo en cuenta los sucesos que se ven influidos por el extremo $x = 0$, que están separados del resto por la característica de ecuación $x = ct$.

- La región I: $x > ct$: en esta región el extremo $x = 0$ no tiene ninguna influencia, con lo cual el problema mixto se resuelve con un problema de valores iniciales con la fórmula de D'Alembert.

- La región II: $x < ct$: estos sucesos se ven influidos por el extremo $x = 0$, con lo cual el problema mixto se debe resolver por la ley de paralelogramo (si la condición de contorno es de la forma $u(0,t) = \alpha(t)$) o por algún otro procedimiento.

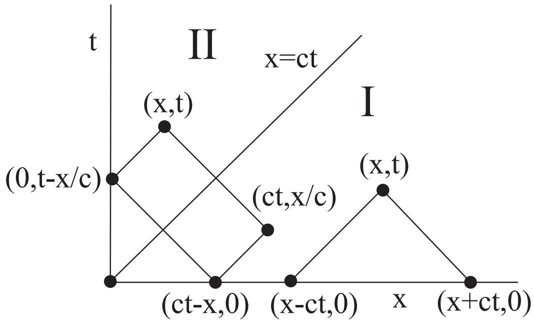

Figura 5.7: Dominios de dependencia para la cuerda semiinfinita

Nos centramos en el caso de condición de contorno de extremo fijo $u(0,t) = 0$.

Echando un vistazo a la fórmula de D'Alembert para una cuerda infinita, particularizada en $x = 0$,

$$u(0,t) = \frac{f(ct) + f(-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} g(X)\,dX,$$

observamos que si los datos iniciales fueran funciones impares, $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = -g(x)$, obtendríamos el buscado valor $u(0,t) = 0$.

Por tanto si extendemos de forma impar las funciones f y g a los negativos,

$$\tilde{f}(x) = \left\{ \begin{array}{cc} -f(-x) & x < 0 \\ f(x) & x > 0 \end{array} \right., \qquad \tilde{g}(x) = \left\{ \begin{array}{cc} -g(-x) & x < 0 \\ g(x) & x > 0 \end{array} \right.,$$

reducimos el problema de la cuerda semiinfinita con extremo fijo al de una cuerda infinita:

Teorema 5.8.1 *El problema mixto $u_{tt} - c^2u_{xx} = 0$, $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, $u(0,t) = 0$ para $t > 0$, $x > 0$, siendo f de clase C^2, g de clase C^1, tiene por solución única*

$$u(x,t) = \frac{\tilde{f}(x+ct) + \tilde{f}(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(X)\,dX, \tag{5.14}$$

donde $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ son las extensiones impares de f, g respectivamente.

Ejemplo 5.8.1 *Resolver el problema $u_{tt} - c^2u_{xx} = 0$, $u(x,0) = \sin x$, $u_t(x,0) = c\cos x$, $u(0,t) = 0$ para $t > 0$, $x > 0$.*

Los resolvemos de las dos maneras. Separando en zonas:

En la zona I podemos aplicar la fórmula de D'Alembert,

$$u_I(x,t) = \frac{\sin(x+ct) + \sin(x-ct)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} \cos X\,dX = \sin(x+ct).$$

En la zona II podemos usar la ley del paralelogramo,

$$u_{II}(x,t) = u\left(0, t - \frac{x}{c}\right) + u_I\left(ct, \frac{x}{c}\right) - u(ct-x, 0) = 2\sin x\cos ct.$$

Otra forma de resolverlo es haciendo uso de la extensión impar del dato inicial. Como el seno ya es impar, su extensión es trivial. No así la del coseno, que es par,

$$\tilde{f}(x) = \sin x = f(x), \qquad \tilde{g}(x) = \begin{cases} -\cos x & x < 0 \\ \cos x & x > 0 \end{cases} \Rightarrow \tilde{g}(x) = \operatorname{signo}(x) \cos x,$$

$$u(x,t) = \frac{\sin(x+ct) + \sin(x-ct)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} \operatorname{signo}(X) \cos X \, dX,$$

que da pie a los casos anteriores, ya que depende del signo de $x - ct$:

Si $x - ct > 0$, la integral se realiza en un intervalo en el que X es positiva. Por tanto,

$$u(x,t) = \frac{\sin(x+ct) + \sin(x-ct)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} \cos X \, dX = \sin(x+ct).$$

En cambio, si $x - ct < 0$, parte de la integral se realiza en el intervalo $[x-ct, 0]$ en el que el signo de X es negativo,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\sin(x+ct) + \sin(x-ct)}{2} + \frac{1}{2}\int_{0}^{x+ct} \cos X \, dX - \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{0} \cos X \, dX \\ &= \sin(x+ct) + \sin(x-ct) = 2 \sin x \cos ct. \end{aligned}$$