

Capítulo 6

Problemas de contorno

Objetivos

- Identificar los problemas de Sturm-Liouville y manejar sus propiedades.
- Realizar desarrollos en serie de funciones ortogonales, especialmente series de Fourier.

6.1. Introducción

Hasta el momento hemos abordado los problemas de valores iniciales, pero también tienen su relevancia los problemas de contorno. En este tipo de problemas, las condiciones no se imponen en un instante inicial t_0 , en el que conocemos la posición $x(t_0) = x_0$, la velocidad $x'(t_0) = x'_0$ y tal vez derivadas superiores, sino los valores de la solución en dos valores t_0, t_1 . Es decir, conocemos $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$.

Normalmente en este tipo de problemas la variable independiente no es un tiempo, sino una coordenada espacial, y así los valores de contorno indican los valores de la solución en los extremos de un segmento $[t_0, t_1]$, que puede representar una varilla, una cuerda o cualquier otro objeto unidimensional.

Ejemplo 6.1.1 *Tiro parabólico.*

Pensemos en un proyectil que se lanza al espacio desde una posición, que ubicaremos en $(0, 0)$ y que queremos que alcance otra posición, que ubicaremos en $(L, 0)$, gracias a la fuerza de la gravedad y a la velocidad inicial del proyectil. Las ecuaciones del problema son

$$y'' = -g, \quad x'' = 0 \Rightarrow x' = v_x = \text{const.},$$

y podemos eliminar la variable t con un sencillo cambio de variable, reescribiendo $y(x)$,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = v_x \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = v_x^2 \frac{d^2y}{dx^2},$$

y plantear el problema como problema de contorno,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{v_x^2}, \quad y(0) = 0 = y(L).$$

La resolución es idéntica a la de los problemas de valores iniciales. Primero obtenemos la solución general de la ecuación,

$$y(x) = -\frac{gx^2}{2v_x^2} + k_1x + k_2,$$

y le imponemos las condiciones de contorno,

$$0 = y(0) = k_2, \quad 0 = y(L) = -\frac{gL^2}{2v_x^2} + k_1L + k_2,$$

que conduce a la identificación de las constantes de la solución general, $k_1 = gL/2v_x^2$, $k_2 = 0$,

$$y(x) = \frac{gx(L-x)}{2v_x^2},$$

y conduce, como es sabido, a una trayectoria parabólica.

A diferencia de lo que sucede para los problemas de valores iniciales, la unicidad de la solución no está garantizada para los problemas de contorno:

Ejemplo 6.1.2 *Problema de contorno para un resorte.*

Consideremos un resorte lineal de frecuencia ω , regido por la ley de Hooke, $x'' = -\omega^2x$, al que imponemos condiciones de contorno $x(0) = 0$, $x(T) = 0$.

La solución general de la ecuación es

$$x(t) = k_1 \sin \omega t + k_2 \cos \omega t,$$

y las condiciones de contorno imponen

$$0 = x(0) = k_2, \quad 0 = x(T) = k_1 \sin \omega T + k_2 \cos \omega T,$$

lo que produce dos casos diferenciados:

- Si $\omega T \neq n\pi$ con n entero, entonces $\sin \omega T \neq 0$ y la única solución es la trivial, $k_1 = 0 = k_2$, $x(t) \equiv 0$.
- Si $\omega T = n\pi$ con n entero, entonces $\sin \omega T = 0$ y hay infinitas soluciones, $k_2 = 0$, $x(t) = k_1 \sin \omega t$.

En el segundo caso todas las soluciones son múltiplos de $\sin(n\pi t/T)$ con frecuencia $\omega = n\pi/T$. Diremos que los valores $\lambda = \omega^2 = (n\pi/T)^2$ son los *autovalores* del problema, ya que proporcionan soluciones no triviales, y las funciones $x_n(t) = \sin(n\pi t/T)$ y sus múltiplos son los *autovectores* o *autofunciones* del problema.

6.2. Separación de variables

Este tipo de problemas aparece de manera natural al intentar resolver una ecuación lineal homogénea en derivadas parciales por separación de variables.

Pongamos como ejemplo de ecuación lineal homogénea en derivadas parciales la ecuación de la cuerda vibrante finita de longitud L ,

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0, \quad x \in (0, L), \quad (6.1)$$

con condiciones de contorno de extremos fijos, $u(0, t) = 0 = u(L, t)$.

Podemos buscar soluciones en variables separadas, de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$, expresión que sustituida en la ecuación,

$$X(x)T''(t) - c^2X''(x)T(t) = 0 \Rightarrow \frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

conduce a dos ecuaciones ordinarias, para $T(t)$ y $X(x)$, independientes, ya que la única posibilidad de que la expresión de la izquierda no dependa de x y de que la expresión de la derecha no dependa de t es que ambas sean constantes.

Como las condiciones de contorno imponen $X(0)T(t) = 0 = X(L)T(t)$ para $t > 0$, la única posibilidad no trivial es que $X(0) = 0 = X(L)$, lo que conduce a un problema de contorno dependiente de un parámetro λ ,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0 = X(L),$$

como el que hemos resuelto anteriormente.

Veremos en la siguiente sección que, bajo unas condiciones muy generales, estos problemas de contorno tienen soluciones no nulas $X_n(x)$ sólo para una colección numerable de valores λ_n , $n \in \mathbb{N}$, con lo cual, después de resolver la ecuación correspondiente a $T(t)$, en nuestro ejemplo

$$T_n''(t) + \lambda_n c^2 T_n(t) = 0,$$

podremos usar el principio de superposición lineal para ecuaciones lineales homogéneas y escribir formalmente la solución general del problema 6.1 como

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t).$$

Este tipo de expresiones son válidas con bastante generalidad no sólo para la ecuación de la cuerda vibrante sino para cualquier otra ecuación lineal homogénea con condiciones de contorno. En el caso de la cuerda vibrante veremos que $\lambda_n = (n\pi/L)^2$ y $X_n(x) = \sin(n\pi x/L)$, $n \in \mathbb{N}$.

6.3. Problemas de Sturm-Liouville

Nos centraremos en el caso más frecuente de problemas de contorno, que son los problemas para ecuaciones lineales de segundo orden,

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = f(t). \quad (6.2)$$

Este tipo de problemas, con un parámetro libre, además de su interés propio por su aplicación en problemas en recintos finitos, como varillas o cuerdas, aparece de manera natural, como acabamos de ver, en problemas de ecuaciones en derivadas parciales, cuando se abordan por el método de separación de variables, que permite reducirlos a problemas de contorno de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Por ello, escribiremos la ecuación de una manera distinta, más apropiada para estos fines, multiplicando la ecuación por $p(t) = \exp \int a(t) dt$, ya que entonces

$$x'' e^{\int a(t) dt} + a(t)x' e^{\int a(t) dt} = \left(x' e^{\int a(t) dt} \right)'$$

Consideremos funciones $p(t) \in C^1([a, b])$, $q(t), r(t) \in C([a, b])$, $p(t), r(t) > 0$ para $t \in [a, b]$.

Denominaremos **problemas de Sturm-Liouville regulares con condiciones separadas** a los problemas de contorno de la forma

$$(p(t)x')' - q(t)x + \lambda r(t)x = 0, \quad \alpha x(a) + \tilde{\alpha}x'(a) = 0, \quad \beta x(b) + \tilde{\beta}x'(b) = 0, \quad (6.3)$$

donde $\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta}$ son constantes.

Se llaman problemas de condiciones separadas, ya que las condiciones de contorno no mezclan los puntos a, b .

Y **problemas de Sturm-Liouville regulares con condiciones periódicas** a los problemas de contorno de la forma

$$(p(t)x')' - q(t)x + \lambda r(t)x = 0, \quad x(a) = x(b), \quad x'(a) = x'(b), \quad (6.4)$$

con $p(a) = p(b)$.

Estos dos tipos de problemas tienen condiciones homogéneas, no tienen término independiente de x . Veremos más adelante que las condiciones inhomogéneas se pueden reducir a homogéneas.

Como vemos, se ha introducido un parámetro variable, λ , con lo cual estamos hablando de familias de problemas dependientes de dicho valor, que denominaremos **autovalor** del problema. Las soluciones no triviales del correspondiente problema se denominan consiguientemente **autofunciones** asociadas al autovalor λ .

Comentario:

No hay que confundir los autovalores λ del problema de contorno, que acabamos de definir, con los autovalores de la ecuación lineal, que son las soluciones de la ecuación característica. Para evitar confusiones designaremos con la letra μ a estos últimos en este tema.

Nos centraremos en estos dos tipos de problemas regulares, ya que son los que entran dentro del marco de aplicación del siguiente resultado:

Teorema 6.3.1 *Los autovalores de un problema de Sturm-Liouville regular forman una sucesión infinita $\lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$ no acotada. Las autofunciones correspondientes a autovalores distintos $\lambda_m \neq \lambda_n$, x_m, x_n , son ortogonales con peso r ,*

$$\int_a^b r x_m x_n dt = 0,$$

en el intervalo $[a, b]$. Si las condiciones de contorno son separadas, las autofunciones asociadas a cada autovalor forman un subespacio de dimensión uno, es decir, están definidas salvo un factor multiplicativo y la autofunción x_n tiene exactamente $n - 1$ ceros en el intervalo (a, b) .

Este teorema es complejo de demostrar, pero al menos la condición de ortogonalidad es sencilla de comprobar:

Las autofunciones x_n, x_m verifican

$$(p(t)x'_n)' - q(t)x_n + \lambda_n r(t)x_n = 0, \quad (p(t)x'_m)' - q(t)x_m + \lambda_m r(t)x_m = 0,$$

y multiplicando respectivamente por x_m y x_n y restando e integrando las ecuaciones,

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b r x_m x_n dt = \int_a^b (x_m (p x_n')' - x_n (p x_m')') dt = [p(x_m x_n' - x_n x_m')]_a^b,$$

integrando por partes.

El caso de condiciones periódicas es trivial, ya que

$$p(a)(x_m(a)x_n'(a) - x_n(a)x_m'(a)) = p(b)(x_m(b)x_n'(b) - x_n(b)x_m'(b)).$$

Lo mismo sucede con el caso de condiciones separadas,

$$x_m(b)x_n'(b) - x_n(b)x_m'(b) = 0 = x_m(a)x_n'(a) - x_n(a)x_m'(a),$$

como se comprueba fácilmente.

De hecho, la propiedad de ortogonalidad se verifica para problemas más generales, llamados **autoadjuntos**, para los que $[p|W|(x_m, x_n)]_a^b = 0$.

El nombre de autoadjunto proviene del hecho de que el operador diferencial L que define la ecuación, $Lx = (px')' - qx$, es realmente autoadjunto, como se comprueba integrando dos veces por partes,

$$\begin{aligned} \langle y, Lx \rangle &= \int_a^b y Lx dt = \int_a^b (y(px')' - qyx) dt = [pyx']_a^b - \int_a^b (py'x' + qyx) dt \\ &= [p(yx' - xy')]_a^b + \int_a^b (x(py')' - qxy) dt = \langle Ly, x \rangle, \end{aligned}$$

si y sólo si $[p|W|(x, y)]_a^b = 0$. \square

Ejemplo 6.3.1 *Obtener autovalores y autofunciones del problema del Sturm-Liouville $x'' + \lambda x = 0$ con condiciones $x(0) = 0 = x(L)$.*

Es un problema regular con condiciones separadas y $p(t) = 1 = r(t)$, $q(t) = 0$. Luego es aplicable el teorema. Lo comprobamos explícitamente, ya que la ecuación es integrable. Buscando soluciones de la forma $x(t) = e^{\mu t}$, la ecuación característica es $\mu^2 + \lambda = 0$, con lo cual $\mu = \pm\sqrt{-\lambda}$. Hay tres casos, por tanto:

- $\lambda = -k^2 < 0$: Autovalores reales $\mu = \pm k$. La solución general es $x(t) = k_1 \sinh kt + k_2 \cosh kt$. Las condiciones de contorno implican

$$0 = x(0) = k_2, \quad 0 = x(L) = k_1 \sinh kL \Rightarrow k_1 = 0 = k_2,$$

con lo cual la única solución es la trivial, $x(t) = 0$.

- $\lambda = 0$: Autovalor doble $\mu = 0$. La solución general es $x(t) = k_1 t + k_2$. Las condiciones de contorno implican

$$0 = x(0) = k_2, \quad 0 = x(L) = k_1 L \Rightarrow k_1 = 0 = k_2,$$

con lo cual también en este caso la única solución es la trivial, $x(t) = 0$.

- $\lambda = k^2 > 0$: Autovalores imaginarios $\mu = \pm ik$. La solución general es $x(t) = k_1 \sin kt + k_2 \cos kt$. Las condiciones de contorno implican, aparte de la solución trivial,

$$0 = x(0) = k_2, \quad 0 = x(L) = k_1 \sin kL \Rightarrow k_2 = 0, \quad k = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, los autovalores son de la forma $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, $n = 1, 2, \dots$ y las autofunciones asociadas son

$$x_n(t) = \sin \frac{n\pi}{L}t, \quad n = 1, 2, \dots$$

y sus múltiplos, que tienen $n - 1$ ceros en el intervalo $(0, 1)$ y son claramente ortogonales en dicho intervalo,

$$\begin{aligned} \langle x_m, x_n \rangle &= \int_0^L \sin \frac{m\pi}{L}t \sin \frac{n\pi}{L}t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\cos \frac{(m-n)\pi}{L}t - \cos \frac{(m+n)\pi}{L}t \right) dt \\ &= \frac{L}{2} \left[\frac{\sin \frac{(m-n)\pi}{L}t}{m-n} - \frac{\sin \frac{(m+n)\pi}{L}t}{m+n} \right]_0^L = 0. \end{aligned}$$

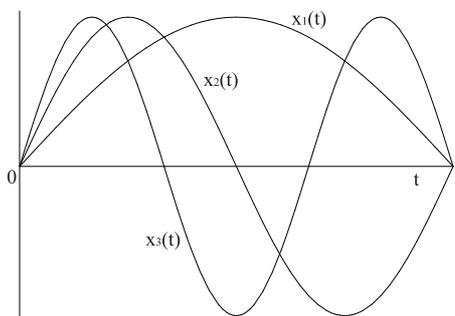


Figura 6.1: Autofunciones del problema $x'' + \lambda x = 0$, $x(0) = 0 = x(1)$

Ejemplo 6.3.2 *Obtener autovalores y autofunciones del problema del Sturm-Liouville $x'' + \lambda x = 0$ con condiciones $x(-L/2) = 0 = x(L/2)$.*

Este problema se puede abordar directamente, como en el ejemplo anterior, pero las cuentas son más complicadas. Es más cómodo realizar un cambio de variable y aprovechar el resultado anterior.

Sabemos que el mismo problema en el intervalo $[0, L]$ tiene autovalores $\tilde{\lambda}_n = (n\pi/L)^2$, $n = 1, 2, \dots$ y autofunciones $\tilde{x}_n(s) = \sin(n\pi s/L)$.

Si realizamos el cambio de variable

$$s = \frac{t-a}{b-a}L, \quad t \in [a, b],$$

obtenemos que $s(a) = 0$, $s(b) = L$, con lo que llevamos el intervalo $[0, L]$ al intervalo $[a, b]$,

$$\frac{dx^2}{ds^2} = \frac{dx^2}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = \frac{dx^2}{dt^2} \frac{(b-a)^2}{L^2}.$$

$$0 = \frac{dx^2}{ds^2} + \tilde{\lambda}x = \frac{dx^2}{dt^2} \frac{(b-a)^2}{L^2} + \tilde{\lambda}x \Rightarrow \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{L^2}{(b-a)^2} \tilde{\lambda}x = 0.$$

Comparando con la ecuación,

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \lambda x = 0,$$

concluimos que los autovalores serán

$$\lambda_n = \frac{L^2}{(b-a)^2} \tilde{\lambda}_n = \left(\frac{n\pi}{b-a} \right)^2,$$

mientras que las autofunciones son

$$x_n(t) = \tilde{x}_n \left(\frac{t-a}{b-a} L \right) = \sin \left(n\pi \frac{t-a}{b-a} \right).$$

Por tanto, en nuestro caso concreto, $a = -L/2$, $b = L/2$, el cambio de variable es

$$s = t + L/2, \quad t \in [-L/2, L/2],$$

y los autovalores siguen siendo $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, $n = 1, 2, \dots$, lo cual es lógico, ya que no hemos cambiado la longitud del intervalo, sólo su emplazamiento. Las autofunciones son los múltiplos de

$$x_n(t) = \tilde{x}_n \left(\frac{t-a}{b-a} L \right) = \sin \frac{n\pi}{L} (t + L/2), \quad n = 1, 2, \dots$$

Ejemplo 6.3.3 *Obtener autovalores y autofunciones del problema del Sturm-Liouville $x'' + \lambda x = 0$ con condiciones periódicas $x(-L) = x(L)$, $x'(-L) = x'(L)$.*

Es un problema regular con condiciones periódicas y $p(t) = 1 = r(t)$, $q(t) = 0$. Comprobamos el teorema explícitamente. Como hemos visto, hay tres casos, según los valores que tome λ :

- $\lambda = -k^2 < 0$: La solución general es $x(t) = k_1 \sinh kt + k_2 \cosh kt$. Las condiciones de contorno implican, usando la paridad del coseno y la imparidad del seno,

$$-k_1 \sinh kL + k_2 \cosh kL = x(-L) = x(L) = k_1 \sinh kL + k_2 \cosh kL,$$

$$kk_1 \cosh kL - kk_2 \sinh kL = x'(-L) = x'(L) = kk_1 \cosh kL + kk_2 \sinh kL,$$

con lo cual la única solución es la trivial, $k_1 = 0 = k_2$, $x(t) = 0$.

- $\lambda = 0$: La solución general es $x(t) = k_1 t + k_2$. Las condiciones de contorno implican

$$-k_1 L + k_2 = x(-L) = x(L) = k_1 L + k_2 \Rightarrow k_1 = 0,$$

$$k_1 = x'(-L) = x'(L) = k_1,$$

con lo cual en este caso las únicas soluciones no triviales son las constantes, $x(t) = k_2$ y $\lambda = 0$ es autovalor del problema.

- $\lambda = k^2 > 0$: La solución general es $x(t) = k_1 \sin kt + k_2 \cos kt$. Las condiciones de contorno implican, usando la paridad del coseno y la imparidad del seno,

$$-k_1 \sin kL + k_2 \cos kL = x(-L) = x(L) = k_1 \sin kL + k_2 \cos kL,$$

$$kk_1 \cos kL + kk_2 \sin kL = x'(-L) = x'(L) = kk_1 \cos kL - kk_2 \sin kL,$$

cuyas soluciones no triviales aparecen cuando $\sin kL = 0$, que corresponde a $k = n\pi/L$, $n \in \mathbb{N}$,

$$x(t) = k_1 \sin \frac{n\pi}{L}t + k_2 \cos \frac{n\pi}{L}t,$$

con lo cual son autovalores $\lambda = (n\pi/L)^2$.

Por tanto, los autovalores son de la forma $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ y las autofunciones asociadas son

$$x_0(t) = 1, \quad x_n(t) = \cos \frac{n\pi}{L}t, \quad \tilde{x}_n(t) = \sin \frac{n\pi}{L}t, \quad n = 1, 2, \dots$$

y sus combinaciones lineales, que son claramente ortogonales en dicho intervalo, como es sencillo comprobar.

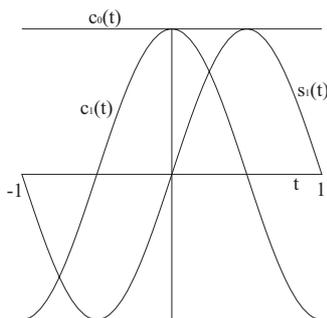


Figura 6.2: Autofunciones del problema $x'' + \lambda x = 0$, $x(0) = x(1)$, $x'(0) = x'(1)$

Obsérvese que, mientras que para $\lambda = 0$ existe una única autofunción linealmente independiente, para $\lambda = (n\pi/L)^2$ existen dos.

Hemos comenzado la numeración de los autovalores en el cero en este ejemplo para no alterar la lista de autovalores.

Es fácil ver que si el intervalo hubiera sido $[a, a + 2L]$, los autovalores y autofunciones seguirían siendo los mismos, ya que las autofunciones son funciones periódicas de periodo $2L$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} x_n(t + 2L) &= \sin \frac{n\pi(t + 2L)}{L} = \sin \frac{n\pi t}{L} \cos 2n\pi + \cos \frac{n\pi t}{L} \sin 2n\pi \\ &= \sin \frac{n\pi t}{L} = x_n(t), \end{aligned}$$

y lo mismo para $\tilde{x}_n(t)$.

En muchos casos, no será sencilla la resolución del problema de Sturm-Liouville y la obtención del conjunto de autovalores. No obstante, es posible obtener información acerca de estos por comparación con problemas conocidos.

Teorema 6.3.2 Teorema de comparación de Sturm: Sean x, \tilde{x} soluciones respectivamente de las ecuaciones

$$(p(t)x')' + g(t)x = 0, \quad (p(t)\tilde{x}')' + \tilde{g}(t)\tilde{x} = 0,$$

tales que $p(t) > 0$, con p función de clase C^1 y g, \tilde{g} funciones continuas en un intervalo $[a, b]$. Si $\tilde{g}(t) > g(t)$, entonces $\tilde{x}(t)$ se anula al menos una vez entre cualquier par de ceros consecutivos de $x(t)$ en dicho intervalo.

Sean t_1, t_2 dos ceros consecutivos de $x(t)$. Supongamos que $\tilde{x}(t)$ no se anula en (t_1, t_2) . Podemos suponer que tanto $x(t)$ como $\tilde{x}(t)$ son positivas en este intervalo. Si alguna fuera negativa, bastaría tomar su opuesta, ya que, a la vista de las ecuaciones, si, por ejemplo, $x(t)$ es solución, también lo es $-x(t)$.

Integramos por partes la expresión

$$\begin{aligned} 0 < \int_{t_1}^{t_2} (\tilde{g} - g)x\tilde{x} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \{\tilde{x}(px')' - x(p\tilde{x}')'\} dt = [\tilde{x}px' - xp\tilde{x}']_{t_1}^{t_2} \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \{x'p\tilde{x} - \tilde{x}'px'\} dt = \tilde{x}(t_2)p(t_2)x'(t_2) - \tilde{x}(t_1)p(t_1)x'(t_1), \end{aligned}$$

llegamos a una contradicción, ya que la expresión final es negativa o nula, puesto que $\tilde{x}(t)$ es positiva en el intervalo, lo mismo que $p(t)$ y $x'(t_1) \geq 0$, $x'(t_2) \leq 0$ para que $x(t)$ pueda ser positiva en (t_1, t_2) y anularse en los extremos.

Por tanto, llegamos a una contradicción con la hipótesis de partida, que $\tilde{x}(t)$ no se anulaba en (t_1, t_2) . Por tanto, esta función tiene al menos un cero en dicho intervalo. \square

Este resultado se puede extender a otro más general:

Teorema 6.3.3 Sean x, \tilde{x} soluciones respectivamente de las ecuaciones

$$(p(t)x')' + g(t)x = 0, \quad (\tilde{p}(t)\tilde{x}')' + \tilde{g}(t)\tilde{x} = 0,$$

tales que $p(t), \tilde{p}(t) > 0$, con p, \tilde{p} funciones de clase C^1 y g, \tilde{g} funciones continuas en un intervalo $[a, b]$. Si $\tilde{g}(t) > g(t)$ y $\tilde{p}(t) < p(t)$, entonces $\tilde{x}(t)$ se anula al menos una vez entre cualquier par de ceros consecutivos de $x(t)$ en dicho intervalo.

En resumidas cuentas, si aumentamos $g(t)$ o disminuimos $p(t)$, aumentamos el número de ceros.

Ejemplo 6.3.4 Aplicar el teorema de Sturm a las ecuaciones $x'' + x = 0$ y $\tilde{x}'' + 4\tilde{x} = 0$

Las soluciones de estos problemas son

$$x(t) = A \sin(t + a), \quad \tilde{x}(t) = B \sin(2t + b),$$

que son, respectivamente, periódicas de periodo 2π y π . Por tanto, los ceros de $x(t)$ están espaciados π , mientras que los ceros de $\tilde{x}(t)$ lo están $\pi/2$. Esto está de acuerdo con el teorema, ya que $\tilde{g}(t) = 4 > 1 = g(t)$.

Estos resultados se aplican de manera inmediata a los problemas de Sturm-Liouville.

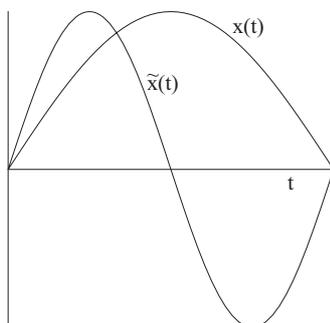


Figura 6.3: Soluciones de los problemas $x'' + x = 0$, $\tilde{x}'' + 4\tilde{x} = 0$

Consideremos problemas de Sturm-Liouville,

$$(p(t)x')' - q(t)x + \lambda r(t)x = 0, \quad x(a) = 0 = x(b),$$

$$(\tilde{p}(t)\tilde{x}')' - \tilde{q}(t)\tilde{x} + \tilde{\lambda}\tilde{r}(t)\tilde{x} = 0, \quad \tilde{x}(a) = 0 = \tilde{x}(b).$$

Supongamos $\tilde{q}(t) < q(t)$, $\tilde{p}(t) < p(t)$, $\tilde{r}(t) > r(t)$ en el intervalo (a, b) .

Supongamos que para el mismo n , $\tilde{\lambda}_n \geq \lambda_n \geq 0$. Entonces,

$$\tilde{g}(t) = \tilde{\lambda}_n \tilde{r}(t) - \tilde{q}(t) \geq \lambda_n r(t) - q(t) = g(t),$$

con lo cual aplicando el teorema de Sturm, entre cada dos ceros consecutivos de $x_n(t)$ hay un cero al menos de $\tilde{x}_n(t)$. Como $x_n(t)$ tiene $n + 1$ ceros en $[a, b]$, esto supone que $\tilde{x}_n(t)$ tiene n ceros en (a, b) , lo cual no es posible, como sabemos, ya que tiene $n - 1$. Por tanto, la hipótesis es falsa y tenemos que $\tilde{\lambda}_n < \lambda_n$.

Teorema 6.3.4 *Sea el problema, $(p(t)x')' - q(t)x + \lambda r(t)x = 0$, $x(a) = 0 = x(b)$, de Sturm-Liouville. Si disminuimos p o q o aumentamos r , disminuyen los autovalores positivos del problema. Y a la inversa.*

Esta propiedad nos puede servir para acotar los autovalores positivos de un problema complicado, conociendo los de problemas solubles.

Ejemplo 6.3.5 *Acotar los autovalores del problema $((1 + t^2)x')' + tx + \lambda(1 + t^2)x = 0$, $x(0) = 0 = x(1)$.*

Como $p(t) = 1 + t^2$, $q(t) = -t$, $r(t) = 1 + t^2$, podemos acotar inferiormente los autovalores λ_n con un problema disminuyendo p , q y aumentando r . Por ejemplo, $\tilde{p}(t) = 1$, $\tilde{q}(t) = -1$, $\tilde{r}(t) = 2$,

$$x'' + x + 2\tilde{\lambda}x = 0 \Rightarrow \tilde{\lambda}_n = \frac{n^2\pi^2 - 1}{2}.$$

Y podemos acotar superiormente los autovalores λ_n con un problema aumentando p , q y disminuyendo r . Por ejemplo, $\hat{p}(t) = 2$, $\hat{q}(t) = 0$, $\hat{r}(t) = 1$,

$$2x'' + \hat{\lambda}x = 0 \Rightarrow \hat{\lambda}_n = 2n^2\pi^2.$$

Por tanto, juntando la información,

$$\frac{n^2\pi^2 - 1}{2} < \lambda_n < 2n^2\pi^2.$$

6.4. Problemas no homogéneos

En la sección precedente hemos considerado tan sólo problemas homogéneos, ya que no hay términos que no dependan de la función x . Analizaremos ahora los problemas inhomogéneos con condiciones separadas,

$$(p(t)x')' + g(t)x = f(t), \quad \alpha x(a) + \alpha' x'(a) = 0, \quad \beta x(b) + \beta' x'(b) = 0, \quad (6.5)$$

donde $g(t)$ puede ser de la forma $\lambda r(t) - q(t)$. Llamaremos problema homogéneo asociado al mismo problema con $f \equiv 0$.

Veremos que el problema inhomogéneo no siempre tiene solución única:

Teorema 6.4.1 *Sea $(p(t)x')' + g(t)x = f(t)$, $\alpha x(a) + \alpha' x'(a) = 0$, $\beta x(b) + \beta' x'(b) = 0$. Este problema tiene solución única si y sólo si el problema homogéneo asociado tiene solución única trivial $x(t) = 0$. Si el problema homogéneo tiene soluciones no triviales, x_h , el problema inhomogéneo tiene infinitas o ninguna solución, si las integrales $\int_a^b f(t)x_h(t) dt$ son nulas o no, respectivamente.*

Supongamos que existen varias soluciones, $x_1(t)$, $x_2(t)$ del problema inhomogéneo. Por la linealidad del problema, $x_h(t) = x_1(t) - x_2(t)$ es solución no trivial del problema homogéneo. Y, a la inversa, si $x(t)$ es solución del problema inhomogéneo, $x(t) + x_h(t)$ es otra solución del problema inhomogéneo. Por tanto, suponiendo que exista, queda demostrado que la solución del problema inhomogéneo es única si y sólo si la solución del problema homogéneo es única, la trivial.

Sea x_h una solución del problema homogéneo. Denotemos $Lx := (px')' + gx$. Obviamente, $Lx_h = 0$, $Lx = f$, para x solución del problema inhomogéneo. Como L es autoadjunto,

$$\int_a^b f(t)x_h(t) dt = \langle f, x_h \rangle = \langle Lx, x_h \rangle = \langle x, Lx_h \rangle = 0,$$

es condición necesaria para que exista solución del problema inhomogéneo que se anulen las integrales de las soluciones del problema homogéneo $\int_a^b f(t)x_h(t) dt$, condición que se cumple, obviamente, en el caso de la solución trivial.

No detallamos la demostración de la existencia de solución, que será construida más adelante. \square

Nos centraremos en el primer caso y buscaremos una fórmula que nos permita resolver el problema inhomogéneo a partir de las soluciones del problema homogéneo, tal como se hizo con el problema de valores iniciales con la fórmula de variación de constantes:

Teorema 6.4.2 *Si el problema homogéneo asociado tiene solución única trivial, $x(t) = 0$, y $x_1(t)$, $x_2(t)$ son soluciones de la ecuación homogénea $(p(t)x')' + g(t)x = 0$ y satisfacen cada una una condición de contorno, $\alpha x_1(a) + \alpha' x_1'(a) = 0$, $\beta x_2(b) + \beta' x_2'(b) = 0$, respectivamente, la solución única del problema inho-*

homogéneo viene dada por

$$x(t) = \int_a^b G(t, s) f(s) ds, \quad G(t, s) = \begin{cases} \frac{x_1(s)x_2(t)}{p(a)|W|(x_1, x_2)(a)} & a \leq s \leq t \\ \frac{x_1(t)x_2(s)}{p(a)|W|(x_1, x_2)(a)} & t \leq s \leq b \end{cases}. \quad (6.6)$$

El denominador $p(a)|W|(x_1, x_2)(a)$ podría sustituirse por $p(t)|W|(x_1, x_2)(t)$, ya que esta expresión es constante en el intervalo $[a, b]$,

$$(p|W|(x_1, x_2))' = (p(x_1x_2' - x_1'x_2))' = (px_2')'x_1 - (px_1')'x_2 = g(x_1x_2 - x_1'x_2) = 0.$$

A la función $G(t, s)$ se la denomina **función de Green** del problema. Como vemos, permite reducir el problema a una integral del término inhomogéneo, con lo cual el problema se puede considerar resuelto.

Una interpretación de la función de Green es que es la respuesta del problema al impulso $f(t) = \delta(t - t_0)$,

$$x_I(t) = \int_a^b G(t, s)\delta(s - t_0) ds = G(t, t_0).$$

Por tanto, interpretamos la solución integral del problema como superposición infinita de la respuesta a impulsos puntuales en cada valor de t .

Ejemplo 6.4.1 Resolver el problema $x'' = f(t)$ con condiciones de contorno $x(0) = 0 = x(1)$. Aplicarlo al caso $f(t) = 1$.

La ecuación homogénea $x'' = 0$ tiene solución general $x(t) = k_1t + k_2$, pero, al imponer las condiciones de contorno,

$$0 = x(0) = k_2, \quad 0 = x(1) = k_1 + k_2 \Rightarrow k_1 = 0 = k_2,$$

obtenemos sólo la solución trivial $x(t) = 0$. Por tanto, estamos en las condiciones de aplicabilidad del teorema.

Una solución no trivial del problema $x_1'' = 0$, $x_1(0) = 0$ es $x_1(t) = t$. Y una solución no trivial del problema $x_2'' = 0$, $x_2(1) = 0$ es $x_2(t) = t - 1$. Su wronskiano es

$$|W|(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} t & t-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Y como $p(t) = 1$, la función de Green es

$$G(t, s) = \begin{cases} s(t-1) & 0 \leq s \leq t \\ t(s-1) & t \leq s \leq 1 \end{cases},$$

y la solución del problema es

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s)f(s) ds = \int_0^t s(t-1)f(s) ds + \int_t^1 t(s-1)f(s) ds.$$

En el caso $f(t) = 1$,

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t s(t-1) ds + \int_t^1 t(s-1) ds = (t-1) \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^t + t \left[\frac{s^2}{2} - s \right]_t^1 \\ &= (t-1) \frac{t^2}{2} + t \left(t - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{t^2 - t}{2}. \end{aligned}$$

Obviamente, para un ejemplo tan simple no era preciso recurrir a la función de Green, ya que la solución general de $x'' = 1$ es trivialmente

$$x(t) = \frac{t^2}{2} + k_1 t + k_2,$$

y al imponer las condiciones de contorno,

$$0 = x(0) = k_2, \quad 0 = x(1) = \frac{1}{2} + k_1 + k_2 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{2}, \quad k_2 = 0,$$

obtenemos directamente la solución del problema.

Este resultado es fácil de aplicar al problema de Sturm-Liouville inhomogéneo, sin más que tomar $g = \lambda r - q$:

Teorema 6.4.3 *Sea $(p(t)x')' - q(t)x + \lambda r(t)x = f(t)$, $\alpha x(a) + \alpha' x'(a) = 0$, $\beta x(b) + \beta' x'(b) = 0$. Este problema tiene solución única si y sólo si λ no es autovalor del problema homogéneo asociado, dada por*

$$x(t) = \int_a^b G_\lambda(t, s) ds,$$

donde G_λ se construye de acuerdo con el teorema anterior. Si λ es autovalor del problema, puede no haber solución o haber infinitas.

Ejemplo 6.4.2 *Resolver el problema $x'' + \lambda x = f(t)$ con condiciones de contorno $x(0) = 0 = x(1)$. Aplicarlo al caso $f(t) = 1$ para $\lambda = \pi^2/4$ y para $\lambda = \pi^2$.*

Sabemos que los autovalores del problema homogéneo son $\lambda_n = (n\pi)^2$, $n = 1, 2, \dots$ con autofunciones $x_n(t) = \sin n\pi t$. Para estos valores no podremos calcular solución única del problema. Para el resto, sí:

- $0 < \lambda = k^2 \neq (n\pi)^2$: Conocemos la solución general de la ecuación homogénea $x'' + \lambda x = 0$,

$$x(t) = k_1 \sin kt + k_2 \cos kt,$$

y buscamos soluciones $x_1(t)$, $x_2(t)$ que satisfagan una de las condiciones de contorno cada una,

$$0 = x_1(0) \Rightarrow k_2 = 0, \quad 0 = x_2(1) = k_1 \sin k + k_2 \cos k,$$

que pueden ser, por ejemplo,

$$x_1(t) = \sin kt, \quad x_2(t) = \cos k \sin kt - \sin k \cos kt = \sin k(t-1),$$

con wronskiano,

$$|W|(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} \sin kt & \sin k(t-1) \\ k \cos kt & k \cos k(t-1) \end{vmatrix} = k \sin k,$$

con lo cual la función de Green es

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{\sin ks \sin k(t-1)}{k \sin k} & 0 \leq s \leq t \\ \frac{\sin kt \sin k(s-1)}{k \sin k} & t \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

Obsérvese que, tal como indica el teorema, el caso $k = n\pi$ no está contemplado, ya que se anula el denominador y la función de Green no está definida.

- $\lambda = 0$: La función de Green ya fue calculada en el ejemplo 6.4.1.
- $0 > \lambda = -k^2$: Conocemos la solución general de la ecuación homogénea $x'' + \lambda x = 0$,

$$x(t) = k_1 \sinh kt + k_2 \cosh kt,$$

y buscamos soluciones $x_1(t)$, $x_2(t)$ que satisfagan una de las condiciones de contorno cada una,

$$0 = x_1(0) \Rightarrow k_2 = 0, \quad 0 = x_2(1) = k_1 \sinh k + k_2 \cosh k,$$

que pueden ser, por ejemplo,

$$x_1(t) = \sinh kt, \quad x_2(t) = \cosh k \sinh kt - \sinh k \cosh kt = \sinh k(t-1),$$

con wronskiano,

$$|W|(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} \sinh kt & \sinh k(t-1) \\ k \cosh kt & k \cosh k(t-1) \end{vmatrix} = k \sinh k,$$

con lo cual la función de Green es

$$G_\lambda(t, s) = \begin{cases} \frac{\sinh ks \sinh k(t-1)}{k \sinh k} & 0 \leq s \leq t \\ \frac{\sinh kt \sinh k(s-1)}{k \sinh k} & t \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

Aplicamos el resultado al caso $f(t) = 1$, $\lambda = \pi^2/4$,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2 \sin \pi(t-1)/2}{\pi} \int_0^t \sin \pi s/2 ds + \frac{2 \sin \pi t/2}{\pi} \int_t^1 \sin \pi(s-1)/2 ds \\ &= \frac{4 \sin \pi(t-1)/2}{\pi^2} (1 - \cos \pi t/2) + \frac{4 \sin \pi t/2}{\pi^2} (\cos \pi(t-1)/2 - 1) \\ &= \frac{4 \cos \pi t/2}{\pi^2} (\cos \pi t/2 - 1) + \frac{4 \sin \pi t/2}{\pi^2} (\sin \pi t/2 - 1) \\ &= \frac{4}{\pi^2} \left(1 - \sin \frac{\pi t}{2} - \cos \frac{\pi t}{2} \right), \end{aligned}$$

que, por su sencillez, podríamos haber obtenido directamente, sabiendo que $x_p(t) = 4/\pi^2$ es una solución particular de la ecuación inhomogénea.

En cambio, el resultado no se puede aplicar al caso $\lambda = \pi^2$, ya que este es un autovalor, λ_1 . Como

$$\int_0^1 x_1(t)f(t) dt = \int_0^1 \sin \pi t dt = - \left[\frac{\cos \pi t}{\pi} \right]_0^1 = \frac{2}{\pi},$$

no es distinto de cero, sabemos que el problema no tiene solución. Lo comprobamos explícitamente. La solución general de la ecuación inhomogénea es

$$x(t) = k_1 \sin \pi t + k_2 \cos \pi t + \frac{1}{\pi^2},$$

pero las condiciones de contorno,

$$0 = x(0) = k_2 + \frac{1}{\pi^2}, \quad 0 = x(1) = -k_2 + \frac{1}{\pi^2},$$

conducen a un sistema sin solución.

Para concluir, tenemos pendiente el tema de las condiciones de contorno lineales, pero inhomogéneas, es decir, de la forma

$$\alpha x(a) + \alpha' x'(a) = A(t), \quad \beta x(b) + \beta' x'(b) = B(t). \quad (6.7)$$

Estas condiciones se pueden reducir a homogéneas sin más que encontrar, lo cual no siempre es sencillo, una función $y(t)$ que las verifique. El cambio de variable $x = y + z$ conduce a un problema inhomogéneo para $z(t)$ con la misma ecuación con una nueva función $\tilde{f}(t) = f(t) - (p(t)y')' - g(t)y$, pero con condiciones de contorno homogéneas.

Por tanto, la teoría desarrollada para condiciones homogéneas es válida también para condiciones inhomogéneas.

Ejemplo 6.4.3 Resolver el problema $x'' + \lambda x = f(t)$ con condiciones de contorno $x(0) = 0$, $x(1) = 1$. Aplicarlo al caso $f(t) = 0$.

Buscamos una función $y(t)$ sencilla que verifique las condiciones de contorno, como por ejemplo, $y(t) = t$. Hacemos el cambio $x = z + t$, con lo cual el problema se transforma en uno de condiciones homogéneas,

$$z'' + \lambda z = f(t) - \lambda t = \tilde{f}(t), \quad z(0) = 0 = z(1),$$

problema que ya hemos estudiado anteriormente.

Como los autovalores del problema homogéneo son $\lambda_n = (n\pi)^2$, el problema tiene solución única si y sólo si $\lambda \neq \lambda_n$ y conocemos la función de Green. Por tanto,

$$x(t) = t + z(s) = t + \int_0^1 G_\lambda(t, s)(f(s) - \lambda s) ds.$$

En lugar de calcular la solución del problema usando la función de Green, como la ecuación es sencilla, obtendremos el resultado directamente:

- $0 < \lambda = k^2 \neq (n\pi)^2$: Conocemos la solución general de la ecuación $x'' + \lambda x = 0$,

$$x(t) = k_1 \sin kt + k_2 \cos kt,$$

e imponemos las condiciones de contorno,

$$0 = x(0) \Rightarrow k_2 = 0, \quad 1 = x(1) = k_1 \sin k,$$

para obtener la solución,

$$x(t) = \frac{\sin kt}{\sin k}.$$

- $\lambda = 0$: La solución general de la ecuación es $x(t) = k_1 t + k_2$. Al imponer las condiciones de contorno,

$$0 = x(0) \Rightarrow k_2 = 0, \quad 1 = x(1) = k_1,$$

obtenemos la solución,

$$x(t) = t.$$

- $0 > \lambda = -k^2$: Conocemos la solución general de la ecuación $x'' + \lambda x = 0$,

$$x(t) = k_1 \sinh kt + k_2 \cosh kt,$$

y buscamos la solución que satisfaga las condiciones de contorno,

$$0 = x(0) \Rightarrow k_2 = 0, \quad 1 = x(1) = k_1 \sinh k,$$

$$x(t) = \frac{\sinh kt}{\sinh k}.$$

Como vemos, la función de Green tiene la ventaja de reducir el problema de contorno al cálculo de una integral, lo cual no quita que en los casos concretos sea más cómodo abordar el problema por otros métodos.

6.5. Series de Fourier

Estamos acostumbrados a descomponer funciones analíticas como suma de una serie de monomios, que forman los llamados desarrollos o series de Taylor en torno a un valor t_0 ,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t - t_0)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!},$$

donde los coeficientes de la serie se obtienen por derivación de la función.

En esta sección vamos a ver como descomponer funciones como suma de series de funciones distintas en principio de los polinomios. En particular será especialmente interesante el caso de las series de senos y las series de cosenos para funciones periódicas de frecuencia angular $\omega = 2\pi/T$ o periodo T ,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\omega t, \quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t,$$

para las cuales los coeficientes no se obtendrán por derivación sino por integración, como veremos, bajo condiciones muy generales.

Podemos ver estos ejemplos como descomposiciones de una señal periódica $f(t)$ en suma de series de ondas sinusoidales de frecuencia ω y sus múltiplos enteros, $2\omega, 3\omega, \dots$

Como hemos visto, estas familias de funciones aparecen de manera natural en los problemas regulares de Sturm-Liouville.

Consideremos un problema de Sturm-Liouville homogéneo,

$$(p(t)x')' - q(t)x + \lambda r(t)x = 0, \quad \alpha x(a) + \alpha' x'(a) = 0 = \beta x(b) + \beta' x'(b),$$

con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ y autofunciones asociadas x_1, \dots, x_n, \dots , que sabemos que son ortogonales entre sí.

Podemos normalizarlas para que sean unitarias, usando el producto escalar,

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b r(t)f(t)g(t) dt, \quad \|f\|^2 = \int_a^b r(t)f(t)^2 dt, \quad (6.8)$$

de modo que el conjunto de autofunciones u_1, \dots, u_n, \dots es ortonormal,

$$u_n := \frac{x_n}{\|x_n\|}, \quad \langle u_n, u_m \rangle = \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}. \quad (6.9)$$

Bajo ciertas condiciones de regularidad, cualquier función f puede expresarse como una serie de dichas autofunciones,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n u_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n(t), \quad f_n = \frac{F_n}{\|x_n\|}. \quad (6.10)$$

No sólo eso, sino que la serie es integrable término a término, con lo cual,

$$\langle u_n, f \rangle = \int_a^b r(t)u_n(t)f(t) dt = \sum_{m=1}^{\infty} F_m \int_a^b r(t)u_n(t)u_m(t) dt = F_n,$$

$$\langle x_n, f \rangle = \|x_n\| \langle u_n, f \rangle = \|x_n\| F_n = \|x_n\|^2 f_n,$$

es decir, cada coeficiente F_n se obtiene por proyección ortogonal sobre la autofunción u_n , como corresponde a las bases ortonormales, y leemos los coeficientes de la serie de Fourier,

$$f_n = \frac{\langle x_n, f \rangle}{\|x_n\|^2} = \frac{1}{\|x_n\|^2} \int_a^b r(t)x_n(t)f(t) dt. \quad (6.11)$$

Se pueden dar resultados más generales que permiten dar sentido a estas series, pero el siguiente bastará para nuestros propósitos.

Para ello, recordemos que una función es **continua a trozos** en $[a, b]$ si es continua en todos los puntos del intervalo, salvo en un conjunto finito de puntos, t_1, \dots, t_p , en los que existen los límites laterales

$$f(t_i-) := \lim_{t \rightarrow t_i^-} f(t), \quad f(t_i+) := \lim_{t \rightarrow t_i^+} f(t). \quad (6.12)$$

Obviamente, la función puede ser discontinua en los puntos t_1, \dots, t_k , pero presenta saltos finitos en ellos.

Por ejemplo, la función de Heaviside es continua a trozos, ya que es continua salvo en $t = 0$ y $f(0-) = 0$, $f(0+) = 1$.

Del mismo modo, diremos que una función es **de clase C^1 a trozos** en $[a, b]$ si f , f' son continuas a trozos en dicho intervalo. Es decir, si f es de clase C^1 en $[a, b]$ salvo en un conjunto finito de puntos, t_1, \dots, t_p , en los que existen los límites laterales $f(t_i-)$, $f(t_i+)$, $f'(t_i-)$, $f'(t_i+)$.

Por ejemplo, la función de Heaviside es de clase C^1 a trozos, ya que es de clase C^1 salvo en $t = 0$ y $f'(0-) = 0 = f'(0+)$.

Teorema 6.5.1 *Si f es una función de clase C^1 a trozos en el intervalo $[a, b]$, la serie de Fourier $\sum f_n x_n(t)$ converge al valor $f(t)$ en los puntos de (a, b) en los que f es continua y a $(f(t-) + f(t+))/2$ en los puntos en los que f es discontinua. Además, los coeficientes de la serie verifican la identidad de la energía,*

$$\int_a^b r(t)|f(t)|^2 dt = \sum_n |F_n|^2 = \sum_n |f_n|^2 \|x_n\|^2. \quad (6.13)$$

Omitimos deliberadamente el índice inicial n en el que comienza la suma, dado que en unos casos los autovalores comienzan en λ_0 y en otros, en λ_1 , como hemos visto.

Por tanto, realmente $f(t) = \sum f_n x_n(t)$, excepto en un conjunto finito de puntos. Obsérvese que el teorema no indica qué sucede en los extremos a, b . El comportamiento en dichos puntos dependerá del tipo de problema.

La identidad de la energía, también llamada identidad de Parseval, simplemente expresa que la energía (integral del cuadrado de la función) se puede descomponer en suma de los cuadrados de los coeficientes de las autofunciones.

El caso más importante de series de Fourier, el que dio origen a este tipo de desarrollos, son las series trigonométricas de Fourier.

Consideremos las autofunciones que corresponden al problema

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0 = x(L), \quad (6.14)$$

cuyos autovalores son $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, $n = 1, 2, \dots$, con autofunciones asociadas

$$x_n(t) = \sin \frac{n\pi}{L} t, \quad (6.15)$$

cuya norma es

$$\begin{aligned} \|x_n\|^2 &= \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi}{L} t dt = \frac{1}{2} \int_0^L \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{L} t\right) dt \\ &= \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4n\pi} \sin \frac{2n\pi}{L} t \right]_0^L = \frac{L}{2}, \end{aligned}$$

con lo cual, las autofunciones normalizadas son

$$u_n(t) = \frac{x_n(t)}{\|x_n\|} = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} t.$$

Este problema proporciona las **series de Fourier en senos** de una función f ,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} t, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L} t dt. \quad (6.16)$$

Obviamente, en los extremos $0, L$, la serie converge al valor cero, ya que los senos se anulan.

La identidad de la energía, teniendo en cuenta los factores de normalización, se expresa en este caso como

$$\int_0^L |f(t)|^2 dt = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2.$$

Ejemplo 6.5.1 Obtener el desarrollo en serie de senos de la función $f(t) = 1$ en el intervalo $[0, \pi]$.

En este intervalo, $L = \pi$,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nt dt = -\frac{2}{n\pi} [\cos nt]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n),$$

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) \sin nt,$$

salvo en los extremos del intervalo.

Como b_n es nulo para n par y toma el valor $4/n\pi$ para n impar, podemos reescribir la serie, cambiando n por $2n - 1$, como

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)t.$$

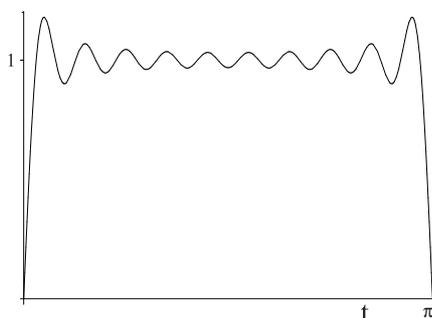


Figura 6.4: Primeros términos de la serie de Fourier en senos de $f(t) = 1$

Como la función es de clase C^1 , la serie converge al valor correcto $f(t) = 1$ en todos los puntos del intervalo $(0, L)$. En los extremos, en cambio, converge al valor cero. Esto provoca el llamado fenómeno de Gibbs en la proximidad de los extremos. Tal como vemos en la figura adjunta, la serie tiende a sobrevalorar el valor de $f(t)$ cerca de dichos puntos, antes de tender al valor cero.

La identidad de la energía proporciona una curiosa forma de sumar series,

$$\pi = \int_0^{\pi} dt = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Del mismo modo, si consideramos el problema

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x'(0) = 0 = x'(L), \quad (6.17)$$

cuyos autovalores son $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, $n = 0, 1, \dots$, con autofunciones asociadas

$$x_0(t) = 1, \quad x_n(t) = \cos \frac{n\pi}{L}t, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.18)$$

cuyos factores de normalización son, como se comprueba fácilmente,

$$\|x_0\| = \sqrt{L}, \quad \|x_n\| = \sqrt{\frac{L}{2}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

con lo cual las autofunciones normalizadas son

$$c_0(t) = \frac{1}{\sqrt{L}}, \quad c_n(t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{n\pi}{L}t, \quad n = 1, 2, \dots$$

Este problema proporciona las **series de Fourier en cosenos** de una función f ,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L}t, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L}t dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.19)$$

La identidad de la energía, teniendo en cuenta los factores de normalización, se expresa en este caso como

$$\int_0^L |f(t)|^2 dt = \frac{L}{4} |a_0|^2 + \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2.$$

A diferencia de la serie de senos, se puede demostrar que en los extremos del intervalo esta serie converge al valor correcto.

Ejemplo 6.5.2 *Obtener el desarrollo en serie de cosenos de la función $f(t) = 1$ en el intervalo $[0, \pi]$.*

Como la función constante es autofunción del problema, su serie de Fourier es ella misma, $f(t) = 1$.

Lo comprobamos explícitamente, para $n = 1, 2, \dots$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nt dt = \frac{2}{n\pi} [\sin nt]_0^{\pi} = 0, \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dt = 2.$$

La identidad de la energía se cumple trivialmente,

$$\frac{\pi}{4} |a_0|^2 + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \pi = \int_0^{\pi} dt.$$

El resultado acerca de series de Fourier de autofunciones de problemas regulares con condiciones separadas se puede extender también a problemas con condiciones periódicas. Simplemente hay que tener en cuenta que el subespacio propio asociado a cada autovalor puede no tener dimensión uno y hay que escoger una base ortonormal adecuadamente.

Consideramos el problema de condiciones periódicas

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(-L) = x(L), \quad x'(-L) = x'(L), \quad (6.20)$$

cuyos autovalores son $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, $n = 0, 1, \dots$, con autofunciones asociadas

$$x_0(t) = 1, \quad x_n(t) = \cos \frac{n\pi}{L}t, \quad \tilde{x}_n(t) = \sin \frac{n\pi}{L}t, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.21)$$

que una vez normalizadas quedan así,

$$c_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2L}}, \quad c_n(t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{n\pi}{L}t, \quad s_n(t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi}{L}t, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.22)$$

La diferencia con anteriores ejemplos es que esta vez estamos considerando un intervalo de longitud $2L$ en vez de L .

Tal como indicábamos, a todos los autovalores, salvo el cero, les corresponden dos autofunciones linealmente independientes, en lugar de una, como en el caso de los problemas de condiciones separadas. Las autofunciones han sido escogidas ortogonales, ya que el seno es una función impar y el coseno, par. Por tanto, su producto es impar y tiene integral nula en el intervalo simétrico $[-L, L]$.

Este problema proporciona las **series de Fourier en senos y cosenos** de una función f ,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L}t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L}t,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L}t \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L}t \, dt, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.23)$$

Como el intervalo $[-L, L]$ es simétrico y las funciones impares tienen integrales nulas en este tipo de intervalos, tenemos que las funciones pares sólo tienen coeficientes a_n no nulos, ya que el seno es impar. En cambio, las funciones impares sólo tienen coeficientes b_n , ya que el coseno es par.

Recordemos que una función es **par** si $f(t) = f(-t)$, es decir, si su gráfica es simétrica respecto al eje Y . Son pares la función coseno y las potencias pares.

Y una función es **impar** si $f(t) = -f(-t)$. Son impares la función seno y las potencias impares.

La identidad de la energía, teniendo en cuenta los factores de normalización, se expresa en este caso como

$$\int_{-L}^L |f(t)|^2 \, dt = \frac{L}{2} |a_0|^2 + L \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + L \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2.$$

La serie de la función f es periódica con periodo $2L$. Sabemos que la serie da el resultado correcto en los puntos de continuidad si f es de clase C^1 a trozos y que en los puntos t de discontinuidad converge al valor $(f(t-) + f(t+))/2$. Y precisamente porque la serie es periódica, podemos tratar los extremos como

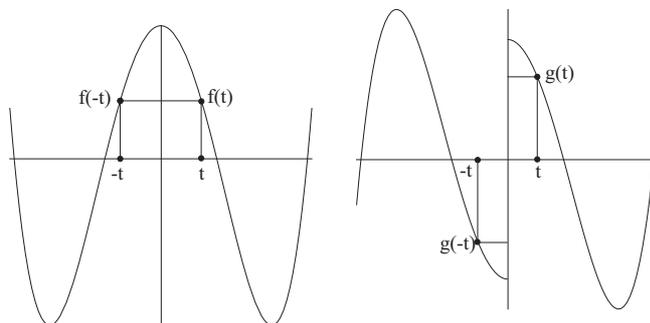


Figura 6.5: Gráficas de una función par $f(t)$ y de una función impar $g(t)$

un punto de discontinuidad de la función f extendida como función periódica. Por tanto, en los extremos $\pm L$ la serie converge al valor $(f(-L) + f(L))/2$.

Los casos de series de senos y cosenos estudiados previamente se pueden considerar casos particulares de esta serie:

Supongamos que queremos desarrollar en serie de senos y cosenos en el intervalo $[-L, L]$ una función f impar. Como hemos mencionado, por la paridad o imparidad del integrando,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} t dt = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L} t dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L} t dt,$$

con lo cual la función f en el intervalo $[0, L]$ se representa como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} t, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L} t dt,$$

en serie de senos, tal como habíamos visto. La única suposición es que hemos extendido en forma impar la función al intervalo $[-L, 0]$, pero esto siempre es factible. \square

Del mismo modo, supongamos que queremos desarrollar en serie de senos y cosenos en el intervalo $[-L, L]$ una función f par. Por la paridad o imparidad del integrando,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} t dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} t dt,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L} t dt = 0,$$

con lo cual la función f en el intervalo $[0, L]$ se representa como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} t, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} t dt,$$

y recuperamos la serie conocida de cosenos. \square

Además, como para ello hemos extendido la función f al intervalo $[-L, 0]$ suponiendo que es par, $f(-L) = f(L)$, con lo cual en el extremo $t = L$ la serie converge al valor

$$\frac{f(-L) + f(L)}{2} = f(L),$$

tal como habíamos anunciado. Y, del mismo modo, como $t = 0$ es un punto de continuidad, la serie converge en $t = 0$ al valor correcto $f(0)$. \square

Ejemplo 6.5.3 Obtener el desarrollo en serie de senos y cosenos de la función $f(t) = t$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

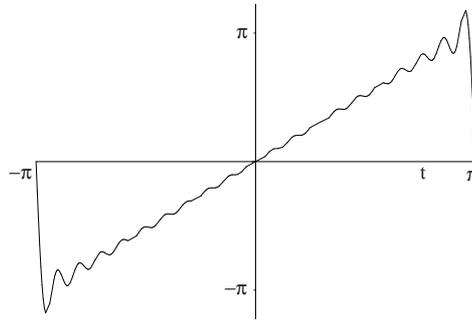


Figura 6.6: Primeros términos de la serie de Fourier en senos y cosenos de $f(t) = t$

Como la función f es impar, los coeficientes a_n de la serie serán nulos y sólo es preciso calcular los b_n ,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin nt \, dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin nt}{n^2} - \frac{t \cos nt}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n},$$

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nt,$$

salvo en los extremos, donde la serie converge al valor $(f(-\pi) + f(\pi))/2 = 0$, lo cual produce el consiguiente fenómeno de Gibbs en los extremos del intervalo.

La identidad de la energía proporciona la suma de una serie,

$$\frac{2\pi^3}{3} = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \, dt = \frac{\pi}{2} |a_0|^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

de donde despejamos el valor de la suma infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Teniendo en cuenta la relación de Euler, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, y la ortogonalidad de las funciones seno y coseno en el intervalo $[-L, L]$, las series trigonométricas de Fourier en senos y cosenos se pueden presentar de una manera

más compacta recurriendo a funciones exponenciales imaginarias. Las nuevas autofunciones son

$$z_n(t) = e^{in\pi t/L} = \cos \frac{n\pi}{L}t + i \sin \frac{n\pi}{L}t = x_n(t) + i\tilde{x}_n(t), \quad n \in \mathbb{Z},$$

combinaciones lineales de las autofunciones trigonométricas, lo que garantiza que siguen siendo autofunciones. A cada autovalor $\lambda_n = (n\pi/L)^2$ se le asocian las autofunciones z_n, z_{-n} , salvo al autovalor $\lambda_0 = 1$, al que se le asocia únicamente la autofunción $z_0(t) = 1$.

Como estamos trabajando con funciones complejas, el producto escalar deber ser hermítico,

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L \overline{f(t)}g(t) dt.$$

Comprobamos que realmente las dos autofunciones escogidas entre las asociadas a $\lambda_n, n \neq 0$, son ortogonales,

$$\begin{aligned} \langle z_{-n}, z_n \rangle &= \int_{-L}^L \overline{e^{-in\pi t/L}} e^{in\pi t/L} dt = \int_{-L}^L e^{2in\pi t/L} dt = \left[\frac{L}{2in\pi} e^{2in\pi t/L} \right]_{-L}^L \\ &= \frac{L}{n\pi} \sin 2n\pi = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Y el factor de normalización es

$$\|z_n\|^2 = \langle z_n, z_n \rangle = \int_{-L}^L \overline{e^{in\pi t/L}} e^{in\pi t/L} dt = \int_{-L}^L dt = 2L,$$

con lo cual las autofunciones normalizadas son

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{in\pi t/L}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Así definimos las **series de Fourier en exponenciales imaginarias** de una función f ,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\pi t/L}, \quad f_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-in\pi t/L} dt, \quad (6.24)$$

como se comprueba fácilmente. Las propiedades de esta serie son las mismas que las de las series en senos y cosenos, pues lo único que hemos hecho es reagrupar los términos.

La identidad de la energía, teniendo en cuenta los factores de normalización, se expresa en este caso como

$$\int_{-L}^L |f(t)|^2 dt = 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2.$$

La ventaja de que las funciones sean todas del mismo tipo se ve compensada, no obstante, por el hecho de tener que recurrir a funciones complejas.

Ejemplo 6.5.4 *Obtener el desarrollo en serie de exponenciales imaginarias de la función $f(t) = e^{it/2}$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.*

La función f no es autofunción, ya que estas son $1, e^{\pm it}, \dots$. Así que tenemos que calcular los coeficientes de la serie,

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it/2} e^{-int} dt \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(1/2-n)t}}{i(1/2-n)} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(1/2-n)\pi} - e^{-i(1/2-n)\pi}}{i(1/2-n)} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^n}{1/2-n}, \quad e^{it/2} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1/2-n} e^{int}, \end{aligned}$$

salvo en los extremos, donde la serie converge al valor $(f(-\pi) + f(\pi))/2 = 0$, lo cual produce el consiguiente fenómeno de Gibbs en los extremos del intervalo.

En esta sección hemos abordado exclusivamente la series de Fourier asociadas a problemas de contorno basados en la ecuación armónica $x'' + \lambda x = 0$, pero, evidentemente, se pueden obtener series asociadas a otros problemas de Sturm-Liouville, sólo que serán más complicadas. Por ejemplo, en problemas con simetría cilíndrica, la separación de variables conduce a series de funciones de Bessel.

6.6. Relación entre serie y transformada de Fourier

Con estas expresiones observamos que estamos descomponiendo una señal periódica $f(t)$, de periodo $T = 2L$, como suma de ondas planas de frecuencias angulares $\omega_n = n\pi/L$, todas ellas múltiplos enteros de la frecuencia *fundamental* correspondiente al periodo T , $\omega = 2\pi/T = \pi/L$, y amplitudes f_n ,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\omega t} = f_0 + f_1 e^{i\omega t} + f_1 e^{-i\omega t} + f_2 e^{i2\omega t} + f_{-2} e^{-i2\omega t} + \dots$$

Es decir, la señal se descompone en un nivel cero (constante) f_0 y una onda con la frecuencia fundamental en cada sentido y los armónicos superiores.

La relación con la transformada de Fourier es clara. La señal $f(t)$ en este otro caso,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

se descompone en *suma* de ondas planas $F(\omega) e^{i\omega t} / \sqrt{2\pi}$ de frecuencia ω y amplitud $F(\omega) / \sqrt{2\pi}$, pero la suma involucra *todas las frecuencias*, no sólo los múltiplos enteros de una frecuencia fundamental, dado que la señal no es periódica. Así que podemos interpretar la serie de Fourier como un caso particular de transformada de Fourier para señales periódicas.

Lo mismo sucede con la identidad de la energía. En el caso de la transformada de Fourier,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega,$$

la energía total de la señal se obtiene como suma de los cuadrados de las amplitudes de cada una de las ondas planas de frecuencia angular ω . Pero en el caso concreto de una señal periódica,

$$\int_{-L}^L |f(t)|^2 dt = 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2,$$

la suma se restringe a las ondas de frecuencia $n\omega$.

Finalmente, mientras que las amplitudes de las ondas planas constituyentes se obtienen en el caso de la transformada como integrales en la recta real completa,

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt,$$

en el caso de series de Fourier se obtienen como

$$f_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-in\omega t} f(t) dt,$$

por lo que la principal diferencia, aparte del factor de normalización, es que la integral se realiza en un periodo $[-L, L]$ en el caso de señales periódicas, en lugar de en toda la recta real.

Otra manera de verlo es realizar la transformada de Fourier de una señal periódica $f(t)$, cuyo desarrollo de Fourier es

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\pi t/L}.$$

Teniendo en cuenta que la transformada de una exponencial imaginaria e^{iat} es $\sqrt{2\pi}\delta(\omega - a)$, obtenemos que la transformada de la señal es

$$F(\omega) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \delta(\omega - n\pi/L).$$

Es decir, salvo el factor $\sqrt{2\pi}$, la transformada de una señal periódica es una suma de deltas de Dirac centradas en la frecuencia fundamental $\omega = n\pi/L$ y los armónicos superiores, y cuyos coeficientes coinciden con los del desarrollo de Fourier de la señal.