

Capítulo 7

Ecuación de Laplace

Objetivos

- Resolver problemas de contorno para la ecuación de Laplace.
- Resolver problemas para ecuaciones diferenciales en derivadas parciales por separación de variables.

7.1. Introducción

La ecuación de Laplace y su versión inhomogénea, la ecuación de Poisson, aparecen en numerosos campos de la física, la matemática y la ingeniería modelizando fenómenos estacionarios, es decir, no dependientes del tiempo. La razón de su importancia radica en que involucra al operador laplaciano, que está presente en la mayoría de las ecuaciones de la física matemática.

Las soluciones de la ecuación de Laplace en un abierto de \mathbb{R}^n ,

$$0 = \Delta u(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n^2}, \quad (7.1)$$

se denominan normalmente **funciones armónicas**.

La ecuación de Laplace en un abierto de \mathbb{R}^2 ,

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0,$$

tiene por soluciones las funciones holomorfas o analíticas complejas, tomando $z = x + iy$: las partes real e imaginaria de una función analítica compleja $f(z) = u(z) + iv(z)$ satisfacen esta ecuación.

En general, el potencial u de cualquier campo conservativo o campo gradiente, $\mathbf{v} = \text{grad } u$, que cumpla una ley de Gauss, $\text{div } \mathbf{v} = \kappa\mu$, donde μ es la densidad de carga de las fuentes del campo y κ es un coeficiente, verifica una ecuación de Poisson,

$$\Delta u = \text{div grad } u = \text{div } \mathbf{v} = \kappa\mu.$$

Por ejemplo, para el campo electrostático en \mathbb{R}^3 $\kappa = 1/\varepsilon_0$, siendo ε_0 la constante dieléctrica del vacío y μ la densidad de carga eléctrica. Y para el campo

gravitatorio $\kappa = -4\pi G$, siendo G la constante gravitatoria y μ la densidad de masa.

Dado que se pueden obtener resultados generales para la ecuación de Laplace en cualquier dimensión, en lo sucesivo la trataremos en \mathbb{R}^n , si bien los casos que más nos van a interesar por las aplicaciones son \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .

7.2. Soluciones fundamentales

De entre las soluciones de la ecuación de Laplace, nos van a interesar sobremanera las soluciones con simetría circular en el plano y esférica en el espacio. Es decir, que dependen sólo de las de las coordenadas angulares.

Es fácil ver que la ecuación de Laplace en coordenadas polares en el plano, $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $r \in (0, \infty)$, $\phi \in (0, 2\pi)$, es

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0, \quad (7.2)$$

y que la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$, $r \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, \pi)$, $\phi \in (0, 2\pi)$, es

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0. \quad (7.3)$$

De las propiedades del laplaciano es fácil ver que en \mathbb{R}^n la parte radial de la ecuación es siempre

$$\frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

siendo r la distancia del punto considerado al origen.

Consideremos un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Obtendremos las funciones armónicas, $\psi_{\mathbf{x}_0}$, con simetría circular o esférica en torno a \mathbf{x}_0 , es decir, funciones que sólo dependen de la distancia $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \sqrt{(x_1 - (x_0)_1)^2 + \cdots + (x_n - (x_0)_n)^2}$.

De la expresión del laplaciano en coordenadas polares y esféricas, se obtiene que $\psi_{\mathbf{x}_0}$ satisface

$$0 = \Delta \psi_{\mathbf{x}_0}(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial \psi_{\mathbf{x}_0}(r)}{\partial r} \right) \Rightarrow \frac{\partial \psi_{\mathbf{x}_0}(r)}{\partial r} = \frac{k}{r^{n-1}},$$

de donde se deduce, integrando una vez más, que las funciones armónicas con simetría esférica en $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ son

$$\psi_{\mathbf{x}_0}(r) = \begin{cases} \frac{k}{2-n} r^{2-n} + \tilde{k} & n \neq 2 \\ k \ln r + \tilde{k} & n = 2 \end{cases}.$$

En lo sucesivo tomaremos la constante \tilde{k} igual a cero (por regularidad en el infinito) y $k = 1/\omega_n$, donde $\omega_2 = 2\pi$ es la longitud de la circunferencia de radio unidad en \mathbb{R}^2 , $\omega_3 = 4\pi$ es el área de la esfera de radio unidad en \mathbb{R}^3 y así sucesivamente. El motivo de esta segunda elección se verá más adelante. A la función armónica así construida la denominaremos **solución fundamental centrada en \mathbf{x}_0** . Nótese que $\psi_{\mathbf{x}_0}$ es armónica y de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}_0\})$.

Ejemplo 7.2.1 Las soluciones fundamentales son

$$\psi_{\mathbf{x}_0}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad n = 2,$$

$$\psi_{\mathbf{x}_0}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}, \quad n = 3.$$

Obsérvese que la solución fundamental en \mathbb{R}^3 es esencialmente el potencial newtoniano o coulombiano debido a una masa o carga puntual situada en $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

7.3. Identidades de Green

Antes de avanzar, necesitamos algunos corolarios del teorema de la divergencia. Recordemos las versiones de dicho teorema en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 :

Teorema 7.3.1 Teorema de Gauss: Sean V un subconjunto cerrado y compacto del espacio \mathbb{R}^3 con borde S , una superficie regular orientada por su normal exterior unitaria ν , y \mathbf{v} un campo de clase C^1 definido en un abierto que contenga a V . Entonces tenemos que

$$\Phi_{\mathbf{v}, S} := \oint_S \langle \mathbf{v}, \nu \rangle dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV, \quad (7.4)$$

donde $\Phi_{\mathbf{v}, S}$ denota el flujo del campo \mathbf{v} a través de la superficie S .

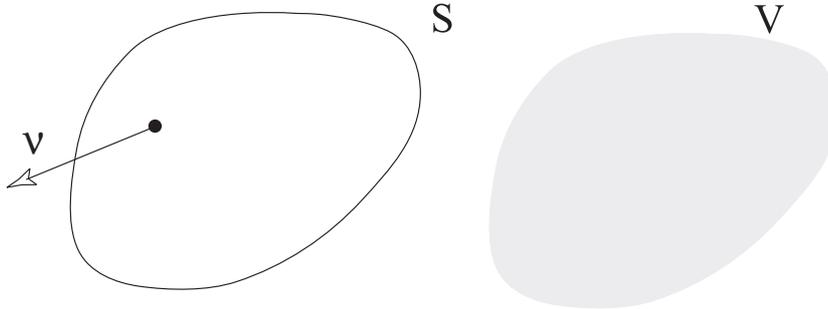


Figura 7.1: Teorema de Gauss

Es decir, el flujo de \mathbf{v} a través de una superficie cerrada S coincide con la integral de la divergencia de \mathbf{v} en el sólido encerrado por S .

Teorema 7.3.2 Teorema de Green: Sean D un subconjunto cerrado y compacto del plano \mathbb{R}^2 con borde Γ , una curva regular orientada por su normal exterior ν , y \mathbf{v} un campo de clase C^1 definido en un abierto que contenga a D . Entonces tenemos que

$$\Phi_{\mathbf{v}, \Gamma} := \oint_{\Gamma} \langle \mathbf{v}, \nu \rangle ds = \int_D \operatorname{div} \mathbf{v} dS, \quad (7.5)$$

donde $\Phi_{\mathbf{v}, \Gamma}$ denota el flujo del campo \mathbf{v} a través de la curva Γ .

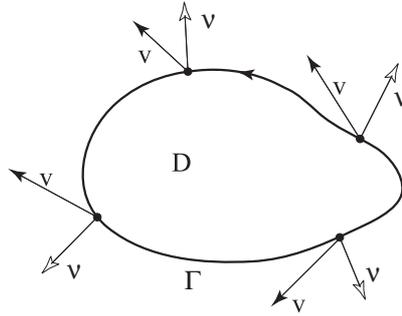


Figura 7.2: Teorema de Green

Es decir, el flujo de \mathbf{v} a través de una curva cerrada Γ coincide con la integral de la divergencia de \mathbf{v} en la superficie plana encerrada por Γ .

Corolario 7.3.1 Identidades de Green en \mathbb{R}^3 : Sea V un subconjunto cerrado y compacto del espacio \mathbb{R}^3 con borde S contenido en un abierto U . Sean u, v funciones de clase C^2 definidas en U . Se verifica,

$$\int_V v \Delta u \, dV + \int_V \langle \text{grad } u, \text{grad } v \rangle \, dV = \int_S v \frac{du}{d\nu} \, dS, \quad (7.6)$$

$$\int_V (v \Delta u - u \Delta v) \, dV = \int_S v \frac{du}{d\nu} \, dS - \int_S u \frac{dv}{d\nu} \, dS, \quad (7.7)$$

$$\int_V \Delta u \, dV = \int_S \frac{du}{d\nu} \, dS, \quad (7.8)$$

identificando la derivada normal de u a lo largo de la normal unitaria ν a S como $D_\nu u := du/d\nu = \langle \text{grad } u, \nu \rangle$.

La segunda identidad se deduce de la primera intercambiando los papeles de u y v y restando de la primera. La tercera se obtiene de las anteriores tomando $v \equiv 1$.

El laplaciano de u se reduce a $\Delta u = \text{div grad } u$, con lo cual, por el teorema de Gauss,

$$\begin{aligned} \int_S v \frac{du}{d\nu} \, dS &= \int_S v \langle \text{grad } u, \nu \rangle \, dS = \int_V \text{div}(v \text{grad } u) \, dV \\ &= \int_V v \Delta u \, dV + \int_V \langle \text{grad } u, \text{grad } v \rangle \, dV, \end{aligned}$$

por la identidad vectorial

$$\text{div}(v \text{grad } u) = v \Delta u + \langle \text{grad } u, \text{grad } v \rangle. \quad \square$$

Asimismo, se pueden demostrar identidades de Green en \mathbb{R}^2 , y en cualquier otra dimensión:

Corolario 7.3.2 Identidades de Green en \mathbb{R}^2 : Sea D una superficie de \mathbb{R}^2 con borde Γ contenida en un abierto U . Sean u, v funciones de clase C^2 definidas

en U . Se verifica,

$$\int_D v \Delta u \, dS + \int_D \langle \text{grad } u, \text{grad } v \rangle \, dS = \int_\Gamma v \frac{du}{d\nu} \, ds, \quad (7.9)$$

$$\int_D (v \Delta u - u \Delta v) \, dS = \int_\Gamma v \frac{du}{d\nu} \, ds - \int_\Gamma u \frac{dv}{d\nu} \, ds, \quad (7.10)$$

$$\int_D \Delta u \, dS = \int_\Gamma \frac{du}{d\nu} \, ds. \quad (7.11)$$

Las identidades de Green tienen consecuencias inmediatas muy importantes en la teoría de ecuaciones elípticas, ya que permiten concluir la unicidad de las soluciones de los problemas de Dirichlet y Neumann sobre un recinto V del espacio o una superficie plana D :

- El **problema de Dirichlet** consiste en hallar $u \in C^2(V)$, conocidos los valores de Δu en V y de u en S .
- El **problema de Neumann** consiste en hallar $u \in C^2(V)$, conocidos los valores de Δu en V y de $du/d\nu$ en S .

Nótese que la tercera identidad de Green impone una condición de compatibilidad entre los datos del problema de Neumann.

Corolario 7.3.3 *La solución del problema de Dirichlet es única.*

Supongamos que existen u_1, u_2 soluciones del problema de Dirichlet en V . Entonces, los valores de sus laplacianos coinciden en V y, sobre la superficie, $u_1|_S = u_2|_S$. Luego, denotando $u = u_1 - u_2$, tenemos que $\Delta u \equiv 0 \equiv u|_S$. Por tanto, la identidad de Green para $u = v$ se reduce a,

$$\int_V \langle \text{grad } u, \text{grad } u \rangle \, dV = 0,$$

y como el integrando, $\|\text{grad } u\|$, es positivo y continuo, sólo puede suceder que sea trivialmente nulo, es decir, $\text{grad } u \equiv 0$. Por tanto, u es una función constante en V y, como se anula en el borde, dicha constante es nula. Luego $u_1 = u_2$. \square

Corolario 7.3.4 *La solución del problema de Neumann es única salvo una constante.*

El razonamiento es idéntico, sólo que ahora es la derivada normal de u la que se anula sobre el borde. Igual que antes, u es constante en V , pero conocer la derivada normal de u no permite concluir su valor. Luego $u_1 = u_2 + k$. \square

Demostrar la existencia de solución de los problemas de Dirichlet y Neumann está fuera del alcance de este curso.

7.4. Representación de funciones armónicas

Las soluciones fundamentales permiten reconstruir cualquier función en un recinto a partir de su divergencia y sus valores y los de su derivada en el borde:

Proposición 7.4.1 Representación integral: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un recinto abierto acotado con borde dado por una superficie regular $\partial\Omega$. Consideremos un punto $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. Sea $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Entonces podemos escribir

$$u(\mathbf{x}_0) = \int_{\Omega} \psi_{\mathbf{x}_0} \Delta u \, dV - \int_{\partial\Omega} \left(\psi_{\mathbf{x}_0} \frac{du}{d\nu} - u \frac{d\psi_{\mathbf{x}_0}}{d\nu} \right) dS, \quad (7.12)$$

donde ν es el campo normal exterior al borde y dS es su elemento de superficie.

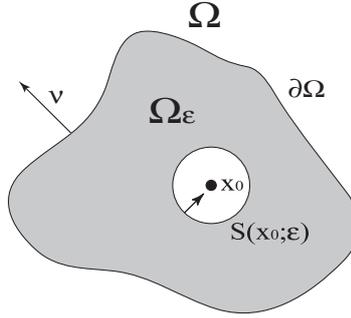


Figura 7.3: Construcción de la representación integral de u en Ω

Aplicaremos la identidad de Green (corolario 7.3.1) a $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B(\mathbf{x}_0; \varepsilon)$, es decir eliminando de Ω una bola de radio ε centrada en \mathbf{x}_0 , siendo ε suficientemente pequeño para que la bola esté incluida en Ω . Obviamente el borde de Ω_ε es $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup S(\mathbf{x}_0; \varepsilon)$, este último, la esfera de radio ε , con orientación negativa, normal interior. Tomando $\psi_{\mathbf{x}_0}$ la función armónica con simetría central en torno a \mathbf{x}_0 estudiada en el apartado anterior,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \psi_{\mathbf{x}_0} \Delta u \, dV &= \int_{\Omega_\varepsilon} u \Delta \psi_{\mathbf{x}_0} \, dV + \int_{\partial\Omega} \left(\psi_{\mathbf{x}_0} \frac{du}{d\nu} - u \frac{d\psi_{\mathbf{x}_0}}{d\nu} \right) dS \\ &+ \int_{S(\mathbf{x}_0; \varepsilon)} \left(\psi_{\mathbf{x}_0} \frac{du}{d\nu} - u \frac{d\psi_{\mathbf{x}_0}}{d\nu} \right) dS, \end{aligned}$$

siendo ν el campo unitario normal exterior a $\partial\Omega$ o interior a $S(\mathbf{x}_0; \varepsilon)$, en su caso.

El término $\Delta\psi_{\mathbf{x}_0}$ es nulo, ya que la solución fundamental es armónica fuera de \mathbf{x}_0 .

La integral sobre la esfera se puede efectuar en coordenadas esféricas, de modo que $\nu = -\mathbf{u}_r$. Como $\psi_{\mathbf{x}_0}$ es constante sobre las esferas, por el teorema de la divergencia,

$$\begin{aligned} \int_{S(\mathbf{x}_0; \varepsilon)} \psi_{\mathbf{x}_0} \frac{du}{d\nu} \, dS &= \psi_{\mathbf{x}_0}(\varepsilon) \int_{S(\mathbf{x}_0; \varepsilon)} \frac{du}{d\nu} \, dS = -\psi_{\mathbf{x}_0}(\varepsilon) \Phi_{\text{grad } u, S(\mathbf{x}_0; \varepsilon)} \\ &= -\psi_{\mathbf{x}_0}(\varepsilon) \int_{B(\mathbf{x}_0; \varepsilon)} \text{div grad } u \, dV \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{B(\mathbf{x}_0; \varepsilon)} \Delta u \, dV \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

ya que al ser u de clase C^2 , su laplaciano es continuo y a primer orden en ε ,

$$\int_{B(\mathbf{x}_0, \varepsilon)} \Delta u \, dV \simeq \Delta u(\mathbf{x}_0) \int_{B(\mathbf{x}_0, \varepsilon)} dV = \Delta u(\mathbf{x}_0) \frac{4\pi}{3} \varepsilon^3,$$

con lo cual la expresión decrece como ε^2 cuando ε tiende a cero.

Por su parte, usando la aproximación a primer orden de la integral,

$$\begin{aligned} \int_{S(\mathbf{x}_0; \varepsilon)} u \, dS &\simeq u(\mathbf{x}_0) \int_{S(\mathbf{x}_0; \varepsilon)} dS = u(\mathbf{x}_0) 4\pi \varepsilon^2, \\ \int_{S(\mathbf{x}_0; \varepsilon)} u \frac{d\psi_{\mathbf{x}_0}}{d\nu} \, dS &= -\frac{1}{4\pi \varepsilon^2} \int_{S(\mathbf{x}_0; \varepsilon)} u \, dS \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -u(\mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

Juntando todos los términos concluimos

$$u(\mathbf{x}_0) = \int_{\Omega} \psi_{\mathbf{x}_0} \Delta u \, dV - \int_{\partial\Omega} \left(\psi_{\mathbf{x}_0} \frac{du}{d\nu} - u \frac{d\psi_{\mathbf{x}_0}}{d\nu} \right) dS. \quad \square$$

Aunque hemos demostrado la proposición 7.4.1 para recintos acotados, es fácil que el resultado sigue siendo válido para recintos no acotados si exigimos además que $r u(\mathbf{x})$ y $r^2 \|\text{grad } u(\mathbf{x})\|$ estén acotados para grandes valores de r .

En particular, si lo aplicamos a todo \mathbb{R}^3 nos quedamos con

$$u(\mathbf{x}_0) = \int_{\mathbb{R}^3} \psi_{\mathbf{x}_0} \Delta u \, dV,$$

expresión que permite obtener el potencial newtoniano a partir de la densidad, usando la ecuación de Poisson $\Delta u = \kappa \mu$, siendo μ la densidad de carga o masa, en su caso.

De forma análoga se demuestra un resultado similar en el plano:

Proposición 7.4.2 Representación integral: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un recinto abierto acotado con borde dado por una curva regular Γ . Consideremos un punto $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. Sea $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Entonces podemos escribir

$$u(\mathbf{x}_0) = \int_{\Omega} \psi_{\mathbf{x}_0} \Delta u \, dS - \int_{\Gamma} \left(\psi_{\mathbf{x}_0} \frac{du}{d\nu} - u \frac{d\psi_{\mathbf{x}_0}}{d\nu} \right) ds, \quad (7.13)$$

donde ν es el campo normal exterior al borde y ds es su elemento de longitud.

En este caso no podemos extender el resultado a recintos no acotados, ya que la solución fundamental no tiende a cero en el infinito.

Nótese que el resultado no se ve alterado si sustituimos $\psi_{\mathbf{x}_0}$ por $\psi_{\mathbf{x}_0} + U$, donde $U \in C^2(\bar{\Omega})$ es una función armónica. Esta posibilidad es muy útil para obtener funciones de Green, es decir, funciones armónicas con polo en un punto \mathbf{x}_0 y que se anulen en el borde de un determinado recinto Ω . Dichas funciones permiten escribir en forma integral la solución de los problemas de contorno de las ecuaciones de Laplace y de Poisson.

Para funciones armónicas, la representación integral se reduce a

$$u(\mathbf{x}_0) = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{d\psi_{\mathbf{x}_0}}{d\nu} - \psi_{\mathbf{x}_0} \frac{du}{d\nu} \right) dS,$$

por tanto, por derivación iterada bajo el signo de integral, es obvio que u es no sólo de clase $C^2(\bar{\Omega})$ sino de clase $C^\infty(\Omega)$, ya que $\psi_{\mathbf{x}_0}$ es de clase C^∞ fuera de \mathbf{x}_0 , que no pertenece al dominio de integración. De hecho, puede demostrarse que las funciones armónicas son incluso analíticas.

7.5. Leyes de la media

Las funciones armónicas poseen unas propiedades muy importantes, relacionadas con sus valores medios y máximos:

Proposición 7.5.1 Ley de Gauss de la media: Sea $u \in C^2(\bar{\Omega})$ una función que verifica $\Delta u \geq 0$, siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Sea $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ y $B(\mathbf{x}_0; R) \subset \Omega$. Entonces,

$$u(\mathbf{x}_0) \leq \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S(\mathbf{x}_0; R)} u \, dS.$$

Para las funciones armónicas la ley de Gauss es una igualdad.

Utilizamos la proposición 7.4.1 con la función $G_{\mathbf{x}_0} = \psi_{\mathbf{x}_0} - \psi_{\mathbf{x}_0}(R)$ en vez de la $\psi_{\mathbf{x}_0}$. La diferencia entre ambas funciones es una constante, armónica por tanto, y la fórmula sigue siendo válida,

$$u(\mathbf{x}_0) = \int_{B(\mathbf{x}_0; R)} G_{\mathbf{x}_0} \Delta u \, dV - \int_{S(\mathbf{x}_0; R)} \left(G_{\mathbf{x}_0} \frac{du}{d\nu} - u \frac{dG_{\mathbf{x}_0}}{d\nu} \right) dS,$$

y como, por la simetría esférica de $\psi_{\mathbf{x}_0}$, esta función toma el valor constante $\psi_{\mathbf{x}_0}(R)$ en todos los puntos de la esfera $S(\mathbf{x}_0; R)$, resulta que $G_{\mathbf{x}_0}$ se anula sobre dicha superficie. Su derivada radial toma el valor constante $1/4\pi R^2$, luego,

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}_0) &= \int_{B(\mathbf{x}_0; R)} G_{\mathbf{x}_0} \Delta u \, dV + \int_{S(\mathbf{x}_0; R)} u \frac{dG_{\mathbf{x}_0}}{d\nu} \, dS \\ &\leq \int_{S(\mathbf{x}_0; R)} u \frac{dG_{\mathbf{x}_0}}{d\nu} \, dS = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S(\mathbf{x}_0; R)} u \, dS, \end{aligned}$$

puesto que $\Delta u \geq 0$ y $G_{\mathbf{x}_0}$ es creciente con el radio y, por tanto, negativa en el interior de la bola $B(\mathbf{x}_0; R)$. \square

Nótese que, como $4\pi R^2$ es el área de la esfera $S(\mathbf{x}_0; R)$, el segundo miembro de la desigualdad no es más que el valor medio de u en la esfera centrada en \mathbf{x}_0 .

Por tanto, la ley de la media enuncia que el valor de la función u en un punto \mathbf{x}_0 es menor o igual que el promedio de los valores que toma en cualquier esfera $S(\mathbf{x}_0; R)$ contenida en el dominio Ω . Veremos que sucede lo mismo para el promedio en volumen en $B(\mathbf{x}_0; R)$.

Corolario 7.5.1 Segunda ley de Gauss de la media: Sea $u \in C^2(\bar{\Omega})$ una función que verifica $\Delta u \geq 0$, siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Sea $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ y $B(\mathbf{x}_0; R) \subset \Omega$. Entonces,

$$u(\mathbf{x}_0) \leq \frac{3}{4\pi R^3} \int_{B(\mathbf{x}_0; R)} u \, dV. \quad (7.14)$$

Para las funciones armónicas la ley de Gauss es una igualdad.

Se obtiene integrando la expresión anterior entre $r = 0$ y $r = R$,

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}_0) \text{Vol}(B(\mathbf{x}_0; R)) &= u(\mathbf{x}_0) \int_0^R dr \, 4\pi r^2 \leq \int_0^R dr \int_{S(\mathbf{x}_0; R)} u \, dS \\ &= \int_{B(\mathbf{x}_0; R)} u \, dV, \end{aligned}$$

puesto que el elemento de volumen en esféricas está relacionada con el elemento de superficie de la esfera por $dV = drdS$. \square

Estas leyes proporcionan el resultado interesante de que el valor de una función armónica en un punto coincide con el valor medio de dicha función, tanto en área como en volumen, sobre las esferas centradas en el punto.

Se pueden demostrar igualmente leyes de la media para funciones armónicas en cualquier otra dimensión, por ejemplo en el plano:

Proposición 7.5.2 Ley de Gauss de la media: Sea $u \in C^2(\bar{\Omega})$ una función que verifica $\Delta u \geq 0$, siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sea $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ y $B(\mathbf{x}_0; R) \subset \Omega$. Entonces,

$$u(\mathbf{x}_0) \leq \frac{1}{2\pi R} \int_{S(\mathbf{x}_0; R)} u \, ds.$$

Para las funciones armónicas la ley de Gauss es una igualdad.

Corolario 7.5.2 Segunda ley de Gauss de la media: Sea $u \in C^2(\bar{\Omega})$ una función que verifica $\Delta u \geq 0$, siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sea $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ y $B(\mathbf{x}_0; R) \subset \Omega$. Entonces,

$$u(\mathbf{x}_0) \leq \frac{1}{4\pi R^2} \int_{B(\mathbf{x}_0; R)} u \, dS. \quad (7.15)$$

Para las funciones armónicas la ley de Gauss es una igualdad.

7.6. Principios del máximo

Una consecuencia de la ley de la media es el principio del máximo (y del mínimo) para las funciones armónicas, tan útil en Electrostática, que afirma que una función armónica definida en un recinto Ω alcanza su valor máximo y mínimo sobre el borde:

Proposición 7.6.1 Principio del máximo: Sea un abierto acotado y conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que $\Delta u \geq 0$ en Ω . Entonces, o bien u es constante o bien $u(\mathbf{x}) < \max_{\partial\Omega} u$, para todo $\mathbf{x} \in \Omega$.

Para comenzar, el máximo existe, ya que u es continua en $\bar{\Omega}$, cerrado y acotado, luego compacto.

Se trata de excluir la posibilidad de un máximo en el interior, para que se dé necesariamente en el borde: supongamos que existiera un máximo relativo de u en $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. Entonces habría una bola $B(\mathbf{x}_0; R) \subset \Omega$ tal que $u(\mathbf{x}) \leq u(\mathbf{x}_0)$ para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0; R)$. Promediando dicha desigualdad sobre la bola, obtenemos, por ejemplo en \mathbb{R}^3 , aunque la demostración es válida en cualquier otra dimensión,

$$\frac{3}{4\pi R^3} \int_{B(\mathbf{x}_0; R)} u \, dV - u(\mathbf{x}_0) = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{B(\mathbf{x}_0; R)} (u - u(\mathbf{x}_0)) \, dV \leq 0,$$

pero la posibilidad de desigualdad queda excluida por la ley de Gauss de la media, así que sólo puede darse la igualdad, lo cual sólo es posible, por continuidad de u , si y sólo si $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_0)$ para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0; R)$. Por tanto, o bien no existen máximos en el interior o bien u es constante. \square

Nótese que el argumento anterior excluye la posibilidad de tener máximos relativos, no sólo absolutos, en el interior de Ω .

En el caso en el que u sea armónica, podemos aplicar el principio del máximo a la función $-u$. Como $\text{máx}(-u) = -\text{mín } u$, todas las consideraciones acerca del máximo de una función armónica son válidas también para el mínimo. Combinando ambos resultados, para una función armónica $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ obtenemos que $\text{máx}_{\bar{\Omega}} |u| = \text{máx}_{\partial\Omega} |u|$, lo cual permite relajar las condiciones del problema de Dirichlet:

Corolario 7.6.1 *La solución del problema de Dirichlet: hallar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ conocidos los valores de Δu en Ω y de u en $\partial\Omega$, es única.*

Tal como vimos en el corolario 7.3.3, si existieran dos soluciones, u_1, u_2 , del problema, su diferencia $f = u_1 - u_2$ sería solución del problema de Dirichlet con datos triviales, $\Delta f \equiv 0 \equiv f|_{\partial\Omega}$. Por tanto, f es armónica y podemos aplicar el principio del máximo, luego,

$$\text{máx}_{\bar{\Omega}} |f| = \text{máx}_{\partial\Omega} |f| = 0 \Rightarrow f \equiv 0 \Rightarrow u_1 = u_2. \quad \square$$

Una consecuencia importante de este resultado es una propiedad bien conocida en electrostática. Si tenemos una función armónica en un recinto acotado, en cuya frontera la función toma un valor constante, entonces la función es constante también en el interior del recinto.

Esto se debe a que la función alcanza su máximo y su mínimo en el borde del recinto. Y si la función es constante en el borde, el máximo y el mínimo son iguales. \square

Por tanto, además, como el gradiente de la función será nulo, el campo asociado a este potencial será nulo.

Es lo que sucede en los conductores en electrostática, en los cuales la carga se distribuye por el borde del conductor, anulándose el campo eléctrico en el interior.

7.7. Funciones de Green

Recordemos la fórmula de la representación integral de funciones de la proposición 7.4.1 en un recinto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de borde $\partial\Omega$. Tal como mencionamos, el resultado no se ve alterado si sustituimos $\psi_{\mathbf{x}_0}$ por $G_{\mathbf{x}_0} = \psi_{\mathbf{x}_0} + U$, donde $U \in C^2(\bar{\Omega})$ es una función armónica.

$$u(\mathbf{x}_0) = \int_{\Omega} G_{\mathbf{x}_0} \Delta u \, dV - \int_{\partial\Omega} \left(G_{\mathbf{x}_0} \frac{du}{d\nu} - u \frac{dG_{\mathbf{x}_0}}{d\nu} \right) dS, \quad \mathbf{x}_0 \in \Omega.$$

Podemos escoger U de manera que $G_{\mathbf{x}_0}$ se anule en los puntos de $\partial\Omega$, con lo cual la expresión anterior se reduce a

$$u(\mathbf{x}_0) = \int_{\Omega} G_{\mathbf{x}_0} \Delta u \, dV + \int_{\partial\Omega} u \frac{dG_{\mathbf{x}_0}}{d\nu} dS, \quad \mathbf{x}_0 \in \Omega, \quad (7.16)$$

o si estamos en el plano, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,

$$u(\mathbf{x}_0) = \int_{\Omega} G_{\mathbf{x}_0} \Delta u \, dS + \int_{\partial\Omega} u \frac{dG_{\mathbf{x}_0}}{d\nu} ds, \quad \mathbf{x}_0 \in \Omega. \quad (7.17)$$

Por tanto, la expresión anterior nos da una expresión integral para la solución del problema de Dirichlet en el recinto Ω , conocidos Δu (ecuación de Poisson) y el valor de u en $\partial\Omega$. La dificultad estriba, obviamente, en encontrar la función armónica U que permite que $G_{\mathbf{x}_0}$ se anule en $\partial\Omega$.

Resumiendo, definimos **función de Green del recinto Ω y polo \mathbf{x}_0** para el problema de Dirichlet a una función que verifica:

1. $G_{\mathbf{x}_0} = \psi_{\mathbf{x}_0} + U$, siendo U armónica en $\bar{\Omega}$.
2. $G_{\mathbf{x}_0}$ se anula en $\partial\Omega$.

Veamos algunos ejemplos sencillos:

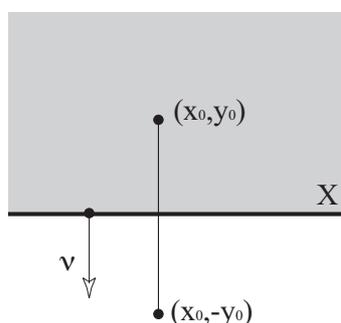


Figura 7.4: Función de Green del semiplano $y > 0$

Ejemplo 7.7.1 *Función de Green del semiplano $y > 0$.*

Sabemos que la solución fundamental en el plano es

$$\psi_{\mathbf{x}_0}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \frac{1}{4\pi} \ln ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2).$$

El borde del semiplano $y > 0$ es el eje X ($y = 0$). Sobre esta recta,

$$\psi_{\mathbf{x}_0}(x, 0) = \frac{1}{4\pi} \ln ((x - x_0)^2 + y_0^2).$$

Para que se anule $G_{\mathbf{x}_0}(x, 0)$ habrá que añadir a $\psi_{\mathbf{x}_0}$ una función armónica $U_{\mathbf{x}_0}$ cuya contribución sobre el eje X cancele la de la solución fundamental. Por tanto, es preciso que

$$U_{\mathbf{x}_0}(x, 0) = -\frac{1}{4\pi} \ln ((x - x_0)^2 + y_0^2).$$

La manera de conseguirlo es situar una *carga* negativa en el punto simétrico de \mathbf{x}_0 respecto al eje X , que es $\tilde{\mathbf{x}}_0 = (x_0, -y_0)$. Así, como los puntos del eje X son equidistantes de \mathbf{x}_0 y de $\tilde{\mathbf{x}}_0$, las contribuciones de ambos se cancelarán, al tener signo opuesto,

$$U_{\mathbf{x}_0}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_0\| = -\frac{1}{4\pi} \ln ((x - x_0)^2 + (y + y_0)^2),$$

que es una función armónica, ya que el polo $(x_0, -y_0)$ no pertenece al semiplano $y > 0$.

Por tanto, la función de Green del semiplano $y > 0$ es

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{x}_0}(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) - \frac{1}{4\pi} \ln((x - x_0)^2 + (y + y_0)^2) \\ &= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_0\|} \end{aligned}$$

La normal exterior al borde del semiplano $y > 0$ es $\nu = -\mathbf{u}_y$. Por tanto,

$$\frac{dG_{\mathbf{x}_0}(x, 0)}{d\nu} = -\frac{dG_{\mathbf{x}_0}(x, 0)}{dy} = \frac{1}{\pi} \frac{y_0}{(x - x_0)^2 + y^2},$$

y la solución del problema de Dirichlet $\Delta u = 0$, $u(x, 0) = f(x)$ será

$$u(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(x - x_0)^2 + y^2} dx.$$

Este procedimiento de obtención de funciones de Green que se anulan sobre una determinada curva o superficie colocando *cargas* negativas al otro lado del borde del recinto se denomina **método de las imágenes o de reflexión**.

Ejemplo 7.7.2 *Función de Green del círculo $r < R$.*

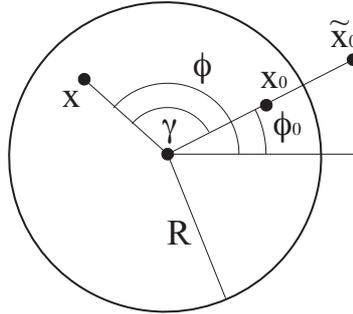


Figura 7.5: Función de Green del círculo $r < R$

Queremos sumarle a $\psi_{\mathbf{x}_0}$ una función armónica de modo que se cancele la suma sobre puntos \mathbf{x} sobre la circunferencia del borde, $\|\mathbf{x}\| = R$.

Para ello, consideramos el punto $\tilde{\mathbf{x}}_0$ que es el *inverso* de \mathbf{x}_0 respecto a la circunferencia,

$$\tilde{\mathbf{x}}_0 = \frac{R^2}{\|\mathbf{x}_0\|^2} \mathbf{x}_0, \quad \|\tilde{\mathbf{x}}_0\| = \frac{R^2}{\|\mathbf{x}_0\|},$$

alineado con el centro del círculo y con \mathbf{x}_0 , pero fuera de él.

Calculamos la distancia de $\tilde{\mathbf{x}}_0$ a un punto \mathbf{x} sobre la circunferencia de radio R . Usando el teorema del coseno, denotando $r_0 = \|\mathbf{x}_0\|$, $\tilde{r}_0 = \|\tilde{\mathbf{x}}_0\|$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_0\|^2 &= R^2 + \tilde{r}_0^2 - 2R\tilde{r}_0 \cos(\phi - \phi_0) = R^2 + \frac{R^4}{r_0^2} - 2\frac{R^3}{r_0} \cos(\phi - \phi_0) \\ &= \frac{R^2}{r_0^2} (r_0^2 + R^2 - 2Rr_0 \cos(\phi - \phi_0)) = \frac{R^2}{r_0^2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2. \end{aligned}$$

Por tanto, teniendo en cuenta que la solución fundamental en el plano es

$$\psi_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|,$$

si tomamos como función armónica dentro del círculo a

$$U_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left(\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_0\| \frac{r_0}{R} \right) = -\frac{1}{2\pi} \ln \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_0\| + \frac{\ln R - \ln r_0}{2\pi},$$

tenemos garantizado que

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) &= \psi_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) + U_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}{r_0 \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_0\|} \\ &= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\phi - \phi_0)}{R^2 + r_0^2 r^2 R^{-2} - 2rr_0 \cos(\phi - \phi_0)}, \end{aligned}$$

es la función de Green, ya que se anula sobre los puntos del borde del círculo.

En particular,

$$\left. \frac{dG_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})}{d\nu} \right|_{r=R} = \left. \frac{dG_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})}{dr} \right|_{r=R} = \frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\phi - \phi_0)},$$

y la solución del problema de Dirichlet, $\Delta u = 0$, $u(R, \phi) = f(\phi)$ será la fórmula integral de Poisson para el círculo,

$$u(r_0, \phi_0) = \frac{R^2 - r_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\phi)}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\phi - \phi_0)} d\phi.$$

Ejemplo 7.7.3 *Función de Green de la esfera $r < R$.*

Queremos sumarle a $\psi_{\mathbf{x}_0}$ una función armónica de modo que se cancele la suma sobre puntos \mathbf{x} sobre la esfera del borde, $\|\mathbf{x}\| = R$.

Podemos utilizar la construcción anterior del punto $\tilde{\mathbf{x}}_0$, *inverso* de \mathbf{x}_0 respecto a la esfera,

$$\tilde{\mathbf{x}}_0 = \frac{R^2}{\|\mathbf{x}_0\|^2} \mathbf{x}_0, \quad \|\tilde{\mathbf{x}}_0\| = \frac{R^2}{\|\mathbf{x}_0\|},$$

ya que la figura 7.5 sigue siendo válida si la vemos como sección de la esfera que contiene a los puntos \mathbf{x} , \mathbf{x}_0 , $\tilde{\mathbf{x}}_0$ y al centro de la esfera.

En particular, sigue siendo cierto que para los puntos de la esfera,

$$\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_0\| = \frac{R}{r_0} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|.$$

Por tanto, teniendo en cuenta que la solución fundamental en el espacio es

$$\psi_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|},$$

si colocamos una *carga* $-R/r_0$ en el punto $\tilde{\mathbf{x}}_0$, obtenemos como función armónica dentro de la esfera

$$U_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = \frac{R}{4\pi r_0 \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_0\|},$$

y tenemos asegurado que

$$G_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = \frac{R}{4\pi r_0 \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_0\|} - \frac{1}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|},$$

se anula sobre los puntos de la esfera exterior y, por tanto, es la función de Green.

Calculamos ahora la derivada normal exterior de la función de Green sobre la esfera de radio R . Denotando por γ el ángulo que forma \mathbf{x} con \mathbf{x}_0 ,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2}{dr} \right|_{r=R} &= \left. \frac{d(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \gamma)}{dr} \right|_{r=R} = 2(R - r_0 \cos \gamma), \\ \left. \frac{d\psi_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})}{dr} \right|_{r=R} &= \frac{1}{4\pi} \frac{R - r_0 \cos \gamma}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \gamma)^{3/2}}, \\ \left. \frac{dU_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})}{dr} \right|_{r=R} &= \frac{R}{4\pi r_0} \frac{\tilde{r}_0 \cos \gamma - R}{(R^2 + \tilde{r}_0^2 - 2R\tilde{r}_0 \cos \gamma)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi} \frac{r_0 \cos \gamma - r_0^2/R}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \gamma)^{3/2}}, \\ \left. \frac{dG_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})}{d\nu} \right|_{r=R} &= \left. \frac{dG_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})}{dr} \right|_{r=R} = \frac{1}{4\pi R} \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \gamma)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Por tanto, la solución del problema de Dirichlet, $\Delta u = 0$, $u(R, \theta, \phi) = f(\theta, \phi)$ será, usando coordenadas esféricas, la fórmula integral de Poisson para la esfera,

$$u(r_0, \theta_0, \phi_0) = \frac{(R^2 - r_0^2)R}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{f(\theta, \phi) \sin \theta}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \gamma)^{3/2}}.$$

7.8. Separación de variables

Tal como hicimos en el tema de la ecuación de la cuerda vibrante, intentaremos resolver algunos problemas de la ecuación de Laplace por medio de series haciendo uso de la separación de variables.

7.8.1. Ecuación de Laplace en un rectángulo

Consideremos funciones armónicas $u(x, y)$ en un rectángulo, $x \in (0, L)$, $y \in (0, M)$. Intentaremos resolver la ecuación de Laplace por separación de variables, buscando soluciones de la forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$, que sustituidas en la ecuación,

$$0 = u_{xx} + u_{yy} = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) \Rightarrow -\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda,$$

nos permiten separar las variables de la ecuación y reducirla a dos ecuaciones ordinarias,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad Y''(y) - \lambda Y(y) = 0.$$

A partir de este momento, todo depende de las condiciones de contorno, si son de Dirichlet (valor de u en el borde) o de Neumann (valor de la derivada normal de u en el borde) o de otro tipo.

Como ejemplo, consideramos un problema de Dirichlet simplificado, en el que sólo hay condiciones de contorno no triviales en uno de los lados del rectángulo,

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, M) = 0, \quad x \in (0, L), \quad u(0, y) = 0 = u(L, y), \quad y \in (0, M).$$

Las condiciones de contorno se traducen en condiciones de contorno para las ecuaciones ordinarias,

$$X(0) = 0 = X(L), \quad Y(M) = 0.$$

Resolvemos primero el problema para $X(x)$,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0 = X(L).$$

Este problema ya lo hemos resuelto con anterioridad y tiene por autovalores y autofunciones,

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Abordamos la otra ecuación,

$$Y_n'' - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Y = 0 \Rightarrow Y_n(y) = A_n e^{n\pi y/L} + B_n e^{-n\pi y/L}.$$

Imponemos la condición de contorno $Y_n(M) = 0$,

$$0 = Y_n(M) = A_n e^{n\pi M/L} + B_n e^{-n\pi M/L} \Rightarrow B_n = -A_n e^{2n\pi M/L},$$

$$\begin{aligned} Y_n(y) &= A_n \left(e^{n\pi y/L} - e^{-n\pi y/L} e^{2n\pi M/L} \right) \\ &= -A_n e^{n\pi M/L} \left(e^{n\pi(M-y)/L} - e^{-n\pi(M-y)/L} \right) = a_n \sinh \frac{n\pi}{L}(M-y), \end{aligned}$$

denotando $a_n = -2A_n e^{n\pi M/L}$, y, por tanto, a falta de la condición inhomogénea, la solución se puede expresar en forma de serie,

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh \frac{n\pi}{L}(M-y) \sin \frac{n\pi}{L}x.$$

Falta por imponer la condición inhomogénea $u(x, 0) = f(x)$,

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh \frac{n\pi M}{L} \sin \frac{n\pi}{L}x.$$

Por tanto, si la función $f(x)$ admite desarrollo de Fourier en base de senos,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi}{L}x, \quad f_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L}x \, dx = a_n \sinh \frac{n\pi M}{L},$$

tenemos la solución del problema de contorno:

Teorema 7.8.1 Problema de Dirichlet en el rectángulo: El problema de la ecuación de Laplace $\Delta u(x, y) = 0$ para $x \in (0, L)$, $y \in (0, M)$ con condiciones de contorno $u(x, 0) = f(x)$, $u(x, M) = 0$ para $x \in (0, L)$, $u(0, y) = 0 = u(L, y)$ para $y \in (0, M)$ tiene solución

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\sinh \frac{n\pi}{L}(M-y)}{\sinh \frac{n\pi M}{L}} \sin \frac{n\pi}{L}x, \quad (7.18)$$

si la función $f(x)$ admite desarrollo de Fourier en el intervalo $(0, L)$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi}{L}x, \quad f_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L}x dx.$$

Por supuesto, este resultado se puede extender al caso en el que la condición no trivial sea $u(0, y) = g(y)$, sin más que intercambiar L por M y x por y en el resultado anterior.

Por ello, por el principio de superposición lineal para ecuaciones lineales homogéneas, como es la ecuación de Laplace, el problema de Dirichlet más general en el rectángulo,

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad u(x, M) = f_2(x), \quad x \in (0, L),$$

$$u(0, y) = g_1(y), \quad u(L, y) = g_2(y), \quad y \in (0, M),$$

se descompone en cuatro problemas de contorno con un solo lado no trivial,

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y),$$

$$u_1(x, 0) = f_1(x), \quad u_1(x, M) = 0 = u_1(0, y) = u_1(L, y),$$

$$u_2(x, M) = f_2(x), \quad u_2(x, 0) = 0 = u_2(0, y) = u_2(L, y),$$

$$u_3(0, y) = g_1(y), \quad u_3(L, y) = 0 = u_3(x, 0) = u_3(x, M),$$

$$u_4(L, y) = g_2(y), \quad u_4(0, y) = 0 = u_4(x, 0) = u_4(x, M).$$

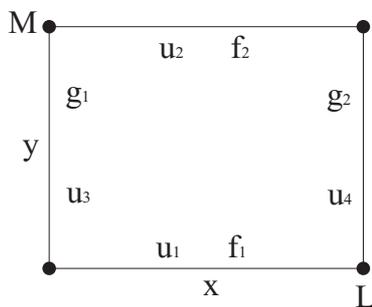


Figura 7.6: Condiciones de contorno en el rectángulo $[0, L] \times [0, M]$

Ejemplo 7.8.1 Obtener la solución de la ecuación de Laplace con condiciones de contorno $u(x, 0) = \sin 2x$, $u(x, \pi) = 0$, $u(0, y) = 0 = u(\pi, 0)$, $x, y \in (0, \pi)$.

Es un problema de Dirichlet en un cuadrado de la lado π con dato de contorno $f(x) = \sin 2x$ en el segmento $(0, \pi)$ del eje X .

La función $f(x)$ tiene desarrollo de Fourier en base de senos con todos los coeficientes nulos, salvo $f_2 = 1$. Por tanto, de acuerdo con el teorema anterior, la solución del problema es

$$u(x, y) = \frac{\sinh 2(\pi - y)}{\sinh 2\pi} \sin 2x.$$

7.8.2. Ecuación de Laplace en un círculo

Consideremos funciones armónicas $u(r, \phi)$ en un círculo centrado en el origen y de radio R . Intentaremos resolver la ecuación de Laplace en coordenadas polares, $r \in (0, R)$, $\phi \in (0, 2\pi)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0,$$

por separación de variables, buscando soluciones de la forma $u(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$, que sustituidas en la ecuación,

$$0 = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\phi\phi}}{r^2} = R''(r)\Phi(\phi) + \frac{R'(r)\Phi(\phi)}{r} + \frac{R(r)\Phi''(\phi)}{r^2},$$

$$\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = \lambda,$$

nos permiten separar las variables de la ecuación y reducirla a dos ecuaciones ordinarias,

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0, \quad \Phi''(\phi) + \lambda \Phi(\phi) = 0.$$

Independientemente del problema de contorno que tengamos que resolver, las propias coordenadas polares exigen condiciones de periodicidad,

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi), \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi),$$

lo cual conduce a un problema de contorno para Φ ya resuelto con anterioridad, que tiene por autovalores $\lambda_n = n^2$ y autofunciones $\Phi_0(\phi) = 1$, $\Phi_n(\phi) = \cos n\phi$, $\tilde{\Phi}_n(\phi) = \sin n\phi$, $n \in \mathbb{N}$.

Queda por resolver la ecuación en la coordenada radial,

$$r^2 R_n''(r) + rR_n'(r) - n^2 R_n(r) = 0,$$

que es una ecuación de Euler, que se reduce, como hemos visto, a una ecuación lineal con coeficientes constantes con el cambio de variable independiente $r = e^s \Leftrightarrow s = \ln r$,

$$\ddot{R}_n - n^2 R_n = 0 \Rightarrow R_n(s) = A_n e^{ns} + B_n e^{-ns} = A_n r^n + B_n r^{-n}, \quad n \neq 0,$$

$$\ddot{R}_0 = 0 \Rightarrow R_0(s) = A_0 + B_0 s = A_0 + B_0 \ln r,$$

denotando por un punto la derivada con respecto a s .

Llegado este punto, observamos que aparecen funciones singulares, las potencias inversas r^{-n} y $\ln r$. Imponiendo que las soluciones sean funciones acotadas y regulares en el círculo, es patente que todos los coeficientes B_n tienen que ser nulos. Por tanto, las funciones radiales son $R_n(r) = r^n$, $n = 0, 1, \dots$

Y podemos escribir la solución de la ecuación de Laplace en el círculo como

$$u(r, \phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\phi + \tilde{A}_n \sin n\phi).$$

Si la condición de contorno es de Dirichlet, $u(R, \phi) = f(\phi)$,

$$u(R, \phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (A_n \cos n\phi + \tilde{A}_n \sin n\phi) = f(\phi),$$

y si la función $f(\phi)$ admite desarrollo de Fourier en serie de senos y cosenos,

$$f(\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos n\phi d\phi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin n\phi d\phi,$$

observamos, por la unicidad del desarrollo en serie de Fourier, que $A_0 = a_0/2$, $R^n A_n = a_n$, $R^n B_n = b_n$, $n \in \mathbb{N}$ y, por tanto, podemos identificar los coeficientes de la función armónica con los coeficientes del desarrollo de Fourier:

Teorema 7.8.2 Problema de Dirichlet en el círculo: *El problema de la ecuación de Laplace $\Delta u(r, \phi) = 0$ para $r \in (0, R)$, $\phi \in (0, 2\pi)$ con condición de contorno $u(R, \phi) = f(\phi)$ tiene solución*

$$u(r, \phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi) \quad (7.19)$$

si la función $f(\phi)$ admite desarrollo de Fourier en serie de senos y cosenos,

$$f(\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos n\phi d\phi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin n\phi d\phi.$$

Se puede comprobar fácilmente que esta solución en serie de Fourier es la misma que se obtuvo haciendo uso de la función de Green del círculo,

$$\begin{aligned} u(r_0, \phi_0) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{R}\right)^n (a_n \cos n\phi_0 + b_n \sin n\phi_0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{R}\right)^n (\cos n\phi_0 \cos \phi + \sin n\phi_0 \sin \phi)\right) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{R}\right)^n \cos n(\phi - \phi_0)\right) d\phi, \end{aligned}$$

ya que las series de Fourier se pueden integrar bajo condiciones muy generales.

El integrando es una serie geométrica, como se comprueba desarrollando el coseno en exponenciales imaginarias,

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{R}\right)^n \cos n\gamma &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{R} e^{i\gamma}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{R} e^{-i\gamma}\right)^n \\ &= 1 + \frac{r_0 e^{i\gamma}}{R - r_0 e^{i\gamma}} + \frac{r_0 e^{-i\gamma}}{R - r_0 e^{-i\gamma}} \\ &= 1 + \frac{2Rr_0 \cos \gamma - 2r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \gamma} = \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \gamma}, \end{aligned}$$

con lo cual recuperamos la fórmula integral de Poisson para el círculo,

$$u(r_0, \phi_0) = \frac{R^2 - r_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\phi)}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\phi - \phi_0)} d\phi. \quad \square$$

Ejemplo 7.8.2 Hallar la función armónica en el círculo de radio a centrado en el origen de coordenadas que verifica $u(a, \phi) = \cos \phi$.

Sabemos que las funciones armónicas en el círculo de radio a se pueden expresar como

$$u(r, \phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi),$$

siendo a_n, b_n los coeficientes del desarrollo de Fourier del valor de la función en el borde,

$$u(a, \phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi) = \cos \phi,$$

que en nuestro caso no es preciso realizar, ya que es patente que todos los coeficientes b_n son nulos, lo mismo que los a_n , salvo $a_1 = 1$. Por tanto, la solución del problema es

$$u(r, \phi) = \frac{r}{a} \cos \phi.$$