Capítulo 8

Ecuación del calor

Objetivos

- Resolver problemas de valores iniciales y mixtos para la ecuación del calor.
- Resolver problemas para ecuaciones diferenciales en derivadas parciales por separación de variables.

8.1. Problema de Cauchy

La ecuación de calor, también llamada ecuación de difusión,

$$u_t - \kappa u_{xx} = F(x,t),$$

describe la evolución temporal de la temperatura u de una varilla de coeficiente de conducción calorífica $\kappa > 0$, siendo x la coordenada espacial a lo largo de la varilla. Si es inhomogénea, $F(x,t) \equiv 0$, la temperatura de la varilla no está afectada por ningún agente externo.

Esta ecuación se puede generalizar a más dimensiones para describir la temperatura de una placa o de un sólido, para lo cual la derivada segunda espacial se sustituye por el correspondiente laplaciano,

$$u_t - \kappa\Delta u = F(\mathbf{x},t), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0.$$

También se conoce como ecuación de difusión, ya que modeliza la variación de la densidad $u(x,t)$ de un material que se difunde en un fluido con un coeficiente de difusión κ.

La ecuación de las características, dado que los coeficientes son $a = -\kappa$, $b = 0 = c$, se reduce a $(dt/dx)^2 = 0$, por lo cual la ecuación del calor es parabólica y las curvas características son las líneas temporales $t = \text{const}$.

El problema de valores iniciales para la ecuación del calor para una varilla infinita es, tomando como instante inicial $t = 0$,

$$u_t - \kappa u_{xx} = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \qquad u(x,0) = f(x),$$

es decir, se trata de conocer la evolución futura de la temperatura de la varilla, conocida la temperatura inicial en todos los puntos de la misma.

Obsérvese que este problema es atípico. Lo primero de todo, porque el dato inicial está dado sobre una característica, lo cual en otros casos provocaba problemas de existencia y unicidad de soluciones. De hecho, veremos que el dato inicial no basta para garantizar la unicidad de la solución del problema.

Además, no podemos imponer la derivada temporal del dato inicial, $u_t(x,0)$, ya que, por la propia ecuación del calor, conoceríamos también $u_{xx}(x,0) = f''(x)$, lo que es redundante o incompatible con conocer $f(x)$.

Una solución del problema de valores iniciales se obtiene realizando la transformada de Fourier de la ecuación en la variable espacial, suponiendo que $u(x,t)$ admite transformada $U(k,t)$, en una ecuación ordinaria sencilla de integrar,

$$U_t + \kappa k^2 U = 0 \Rightarrow U(k,t) = A(k)e^{-\kappa k^2 t},$$

cuya solución depende de una función arbitraria $A(k)$.

Observamos que la solución de la ecuación del calor se descompone en ondas planas de frecuencia k, amortiguadas con un factor exponencial decreciente en el tiempo.

Invirtiendo la transformada de Fourier,

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{-\kappa k^2 t + ikx}\, dk,$$

podemos determinar $A(k)$ a partir de los datos iniciales, $u(x,0) = f(x)$,

$$f(x) = u(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{ikx}\, dk,$$

que resulta ser la transformada de Fourier de f, que sustituida en la expresión de u, nos da la solución del problema de valores iniciales para la varilla infinita,

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)e^{-\kappa k^2 t + ik(x-y)}.$$

Completando cuadrados, es decir, haciendo el cambio de variable $z = k\sqrt{\kappa t} - i(x-y)/2\sqrt{\kappa t}$,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-z^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}\, dy,$$

teniendo en cuenta el valor de la integral gaussiana,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Por tanto, llegamos al siguiente resultado:

Teorema 8.1.1 *El problema de valores iniciales* $u_t - \kappa u_{xx} = 0$*,* $u(x,0) = f(x)$*,* $t > 0$*,* $x \in \mathbb{R}$*, tiene solución*

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}\, dy, \tag{8.1}$$

si la integral converge.

La convergencia está garantizada si f es continua a trozos y crece más despacio que una exponencial cuadrática e^{x^2} cuando x tiende a $\pm\infty$.

Esta solución del problema de valores iniciales no es en general única. Para garantizar la unicidad es preciso añadir una hipótesis adicional.

La solución anterior es única si además imponemos que sea positiva,

$$u(x,t) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

o que sea acotada, es decir, existen constantes M, a tales que

$$|u(x,t)| \leq M e^{a|x|^2},\ \forall x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 8.1.1 *Hallar la solución de la ecuación $u_t - \kappa u_{xx} = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, que verifica $u(x,0) = x$.*

El dato inicial es $f(x) = x$, por tanto, con el cambio de variable $z = (y - x)/\sqrt{4\kappa t}$,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}\, dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{4\kappa t} z + x\right) e^{-z^2}\, dz \\ &= x - \sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}} \left[e^{-z^2}\right]_{-\infty}^{\infty} = x, \end{aligned}$$

como no podía ser de otro modo, ya que $u_{xx} = 0 = u_t$ para una función tan sencilla.

8.2. Núcleo integral

Se suele denominar **núcleo integral de la ecuación del calor** al integrando de la solución del problema de Cauchy,

$$K(x,y,t) = \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}}{\sqrt{4\pi\kappa t}}, \quad u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y,t) f(y)\, dy,$$

que se puede interpretar como producto de convolución del dato inicial $f(x)$ con el núcleo integral $K(x,0,t)$.

Veamos sus propiedades:

- $K(x,y,t)$ es una función positiva de clase C^∞ (más aún, es analítica) para $x, y \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

  Esto tiene una consecuencia importante: la solución $u(x,t)$ del problema de Cauchy es de clase C^∞ para $t > 0$ con sólo que f sea integrable, aunque no sea ni siquiera continua, ya que al derivar bajo el signo de la integral la función que se deriva es $K(x,y,t)$.

  Por tanto, las discontinuidades del dato inicial se suavizan para $t > 0$, a diferencia de lo que ocurre, por ejemplo, con la ecuación de la cuerda vibrante, para la cual las discontinuidades se propagan.

- $K(x,y,t)$ es solución de la ecuación del calor para $t>0$: se comprueba fácilmente,

$$K_t(x,y,t)=\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\left(\frac{(x-y)^2}{4\kappa t^2}-\frac{1}{2t}\right),\ K_x(x,y,t)=-\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\frac{(x-y)}{2\kappa t}$$

$$K_{xx}(x,y,t)=\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\left(\frac{(x-y)^2}{4\kappa^2 t^2}-\frac{1}{2\kappa t}\right)=\frac{K_t(x,y,t)}{\kappa}.\ \square$$

- $K(x,x_0,t)$ es la solución de la ecuación del calor para un dato inicial $u(x,0)=\delta(x-x_0)$,

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x,y,t)\delta(y-x_0)\,dy=K(x,x_0,t)=\frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\kappa t}}}{\sqrt{4\pi\kappa t}}.\ \square$$

  Es decir, si tenemos en el instante inicial un punto de la varilla a una temperatura *infinita* mientras el resto de la varilla está a temperatura nula, observamos que un instante después la temperatura de la varilla sigue una distribución gaussiana de temperaturas de varianza $\sigma^2=2\kappa t$.

  Por tanto, la ecuación modeliza de forma idealizada la conducción del calor, ya que su velocidad es infinita. Toda la varilla se ve afectada por lo que sucede en el punto x_0 en cualquier instante posterior a $t=0$. Esto no ocurre con la ecuación de la cuerda vibrante, en la que la perturbación se transmitía a una velocidad finita c.

  Esto está de acuerdo con el hecho de que el dominio de dependencia para el problema de Cauchy para la ecuación del calor es toda la recta real, ya que el valor de la solución $u(x,t)$ depende de la integral del dato inicial $f(x)$ a lo largo de toda la recta.

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}K(x,y,t)\,dy=1$: con el cambio de variable $z=(y-x)/\sqrt{4\kappa t}$,

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}\,dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}\,dz=1.\ \square$$

  Concuerda con el hecho de que el dato inicial $u(x,0)=f(x)=1$ es una solución constante de la ecuación del calor, $u(x,t)=1$.

  Esto permite acotar la solución del problema de Cauchy, usando el hecho de que

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x,y,t)f(y)\,dy\le\sup_{x\in\mathbb{R}}f(x)\int_{-\infty}^{\infty}K(x,y,t)\,dy=\sup_{x\in\mathbb{R}}f(x),$$

  y de idéntica manera para el valor ínfimo,

$$\inf_{x\in\mathbb{R}}f(x)\le u(x,t)\le\sup_{x\in\mathbb{R}}f(x),\qquad\forall x\in\mathbb{R},\ t\ge 0,\tag{8.2}$$

  con lo cual $u(x,t)$ toma valores en la misma horquilla que el dato inicial.

8.3. Principio del máximo

Al igual que para la ecuación de Laplace, existe un principio del máximo para la ecuación del calor, que es útil para discutir la unicidad de las soluciones de sus problemas:

Teorema 8.3.1 ***Principio débil del máximo:*** *Sea $u(x,t)$ una función continua en el rectángulo cerrado $\bar{\Omega} = [0,L] \times [0,T]$, tal que u_t, u_{xx} son continuas en el rectángulo abierto $\Omega = (0,L) \times (0,T)$, donde satisface $u_t - \kappa u_{xx} < 0$. Entonces u alcanza su valor máximo en $t = 0$ o en $x = 0$ o en $x = L$.*

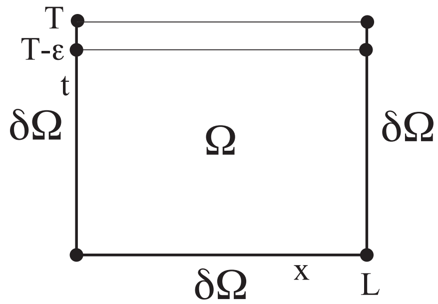

Figura 8.1: Principio del máximo para la ecuación del calor

Es decir, el máximo se alcanza bien en el dato inicial, bien en los extremos.

Denotaremos por $\delta\Omega$ los tres lados inferiores del rectángulo $\bar{\Omega}$. Es decir, el borde $\partial\Omega$ excepto el segmento $(0,L)$ de la recta $t = T$. Con esta notación, el teorema afirma

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\delta\Omega} u.$$

Como u es una función continua en un conjunto compacto, tiene un máximo. Demostramos el teorema por reducción al absurdo:

Lo demostraremos inicialmente para $\Omega_\varepsilon := [0,L] \times [0, T-\varepsilon]$, ya que en la recta $t = T$ no tenemos garantizada la diferenciabilidad.

Supongamos que u tiene un máximo local en (x_0, t_0) en Ω_ε. Por la condición de extremo local,

$$u_t(x_0,t_0) = 0 = u_x(x_0,t_0),$$

y por la condición de máximo local,

$$u_{xx}(x_0,t_0) \leq 0,$$

lo cual implica en particular

$$u_t(x_0,t_0) - \kappa u_{xx}(x_0,t_0) \geq 0,$$

lo cual entra en contradicción con la hipótesis de partida, $u_t - \kappa u_{xx} < 0$ en Ω_ε. Por tanto, dicho máximo local no puede existir.

Tampoco se puede alcanzar el valor máximo de u en el segmento $(0,L)$ de la recta $t = T - \varepsilon$. Supongamos que se alcanzara en un punto $(x_0, T-\varepsilon)$, $x_0 \in (0,L)$. Sería asimismo un máximo local de $u(x, T-\varepsilon)$ y, por tanto,

$$u_x(x_0, T-\varepsilon) = 0, \qquad u_{xx}(x_0, T-\varepsilon) \leq 0.$$

Además, fijado x_0, la función $u(x_0, t)$ debería ser creciente en un entorno del máximo, con lo cual $u_t(x_0, T - \varepsilon) \geq 0$.

Todo ello contradice de nuevo la hipótesis de partida ya que

$$u_t(x_0, T - \varepsilon) - \kappa u_{xx}(x_0, T - \varepsilon) \geq 0,$$

por lo que dicho máximo no puede existir. Así pues, la única posibilidad que queda es que el máximo se halle en $\delta\Omega_\varepsilon$.

Por tanto, hemos demostrado que

$$\max_{\bar{\Omega}_\varepsilon} u = \max_{\delta\Omega_\varepsilon} u \leq \max_{\delta\Omega} u \leq \max_{\bar{\Omega}} u, \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

puesto que $\delta\Omega_\varepsilon$ es un subconjunto de $\delta\Omega$ y, por tanto, el máximo en $\delta\Omega$ es, como poco igual al de $\delta\Omega_\varepsilon$, pero puede ser mayor, al incluir más puntos.

En el límite $\varepsilon \to 0$, por ser $u(x, t)$ una función continua,

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\delta\Omega} u \leq \max_{\bar{\Omega}} u,$$

con lo cual concluimos la igualdad $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\delta\Omega} u$. □

Obsérvese la asimetría de la ecuación del calor, para la cual el futuro $t = T$ tiene unas propiedades distintas que el pasado $t = 0$, como muestra este resultado. Ello está relacionado con el hecho de que la ecuación del calor describe fenómenos irreversibles, como la transmisión de calor o la difusión, que tienen una dirección temporal clara.

Este sencillo resultado se puede refinar aun más, con una condición menos restrictiva en la parte inhomogénea de la ecuación del calor:

Corolario 8.3.1 ***Principio fuerte del máximo:*** *Sea $u(x, t)$ una función continua en el rectángulo cerrado $\bar{\Omega} = [0, L] \times [0, T]$, tal que u_t, u_{xx} son continuas en el rectángulo abierto $\Omega = (0, L) \times (0, T)$, donde satisface $u_t - \kappa u_{xx} \leq 0$. Entonces u alcanza su valor máximo en $t = 0$ o en $x = 0$ o en $x = L$.*

Definimos $v(x, t) = u(x, t) - \varepsilon t$, siendo $\varepsilon > 0$. Como

$$v_t - \kappa v_{xx} = u_t - \kappa u_{xx} - \varepsilon < 0,$$

podemos aplicar el teorema anterior a $v(x, t)$ y concluir

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\bar{\Omega}} (v + \varepsilon t) \leq \varepsilon T + \max_{\bar{\Omega}} v = \varepsilon T + \max_{\delta\Omega} v \leq \varepsilon T + \max_{\delta\Omega} u \leq \varepsilon T + \max_{\bar{\Omega}} u,$$

y en el límite $\varepsilon \to 0$, obtenemos el resultado buscado,

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\delta\Omega} u \leq \max_{\bar{\Omega}} u. \ \square$$

Obsérvese que este resultado, al relajar la acotación de $u_t - \kappa u_{xx}$, sólo afirma que el máximo se alcanza en $\delta\Omega$, pero no excluye que se puede igualar en el interior o en $t = T$.

Si $u_t - \kappa u_{xx} = 0$, podemos aplicar el resultado anterior tanto a u, como a $-u$. Y como el máximo de $-u$ es el mínimo de u, tenemos:

Corolario 8.3.2 *Sea $u(x, t)$ una función continua en el rectángulo cerrado $\bar{\Omega} = [0, L] \times [0, T]$, tal que u_t, u_{xx} son continuas en el rectángulo abierto $\Omega = (0, L) \times (0, T)$, donde satisface $u_t - \kappa u_{xx} = 0$. Entonces u alcanza sus valores máximo y mínimo en $t = 0$ o en $x = 0$ o en $x = L$.*

Una de las consecuencias del principio del máximo es la unicidad de soluciones de los problemas mixtos:

Corolario 8.3.3 *La solución $u(x,t)$ del problema mixto $u_t - \kappa u_{xx} = F(x,t)$, $u(x,0) = f(x)$, $u(0,t) = \alpha(t)$, $u(L,t) = \beta(t)$, continua en el rectángulo cerrado $\bar{\Omega} = [0,L] \times [0,T]$, tal que u_t, u_{xx} son continuas en el rectángulo abierto $\Omega = (0,L) \times (0,T)$, es única.*

Supongamos que existen dos soluciones $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ del problema. La función $v = u_2 - u_1$ es solución del problema

$$v_t - \kappa v_{xx} = 0, \quad v(x,0) = 0, \quad v(0,t) = 0 = v(L,t), \quad x \in [0,L], \ t > 0.$$

Por el principio del máximo, v alcanza su valores máximo y mínimo en cualquier rectángulo $[0,L] \times [0,T]$ en $t = 0$ o en $x = 0$ o en $x = L$. Pero como $u(x,0)$, $u(0,t)$, $u(L,t)$ son todos nulos para $t > 0$, $x \in [0,L]$, el valor máximo y mínimo de v es cero, con lo cual $v = u_2 - u_1$ es la función nula en cualquier rectángulo $[0,L] \times [0,T]$. □

8.4. Energía de la varilla

Al igual que hicimos para la cuerda vibrante, es posible definir una *energía* para la varilla. Sólo que en este caso, al ser la ecuación del calor una ecuación disipativa, no se conserva y no tiene interpretación física clara. Definimos la energía de una varilla de longitud L y temperatura $u(x,t)$ como

$$E[u] = \frac{1}{2} \int_0^L u(x,t)^2 \, dx,$$

que es una cantidad positiva.

Calculamos su derivada temporal, suponiendo que la temperatura se rige por la ecuación del calor, $u_t - \kappa u_{xx} = 0$,

$$\frac{dE[u]}{dt} = \int_0^L u u_t \, dx = \kappa \int_0^L u u_{xx} \, dx = \frac{\kappa}{2} \left[u u_x \right]_0^L - \kappa \int_0^L u_x^2 \, dx,$$

integrando por partes la segunda integral.

Observamos que el término,

$$u(L,t) u_x(L,t) - u(0,t) u_x(0,t)$$

se anula si la temperatura o el flujo de calor es nulo en cada extremo. Por tanto, dado que el otro término es la integral de una función positiva,

$$\frac{dE[u]}{dt} \le -\kappa \int_0^L u_x(x,t)^2 \, dx \le 0,$$

la *energía* se disipa con el transcurso del tiempo.

Esto permite demostrar otros resultados de unicidad:

Teorema 8.4.1 *La solución $u(x,t)$ del problema mixto $u_t - \kappa u_{xx} = F(x,t)$, $u(x,0) = f(x)$, $u_x(0,t) = \alpha(t)$, $u_x(L,t) = \beta(t)$, continua en el rectángulo cerrado $\bar{\Omega} = [0,L] \times [0,T]$, tal que u_t, u_{xx} son también continuas en $\bar{\Omega}$, es única.*

Supongamos que existen dos soluciones $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ del problema. La función $v = u_2 - u_1$ es solución del problema

$$v_t - \kappa v_{xx} = 0, \quad v(x,0) = 0, \quad v_x(0,t) = 0 = v_x(L,t), \quad x \in [0,L],\ t > 0.$$

La *energía* de la solución v es nula en $t = 0$, ya que $v(x,0) = 0$. Como decrece con el tiempo, pero es a la vez positiva, la única opción es que la *energía* $E[v]$ sea idénticamente nula y, por tanto, $v(x,t) = 0$ en $[0,L] \times [0,T]$. $\square$

Este argumento puede emplearse también para el problema de temperatura nula en los extremos, pero la demostración basada en el principio del máximo es menos exigente, ya que no precisa la continuidad de las derivadas en el borde.

8.5. Separación de variables

Al igual que para el resto de ecuaciones lineales que hemos estudiado hasta el momento, es posible abordar los problemas mixtos de la ecuación del calor por medio de la separación de variables y obtener soluciones en forma de series.

Consideremos soluciones $u(x,t)$ de la ecuación del calor para una varilla finita, $x \in (0,L)$, $t > 0$. Intentaremos resolver la ecuación por separación de variables, buscando soluciones de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, que sustituidas en la ecuación,

$$0 = u_t - \kappa u_{xx} = X(x)T'(t) - \kappa X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\kappa T(t)} = -\lambda,$$

nos permiten separar las variables de la ecuación y reducirla a dos ecuaciones ordinarias,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad T'(t) + \lambda\kappa T(t) = 0.$$

Para poder continuar, es preciso conocer las condiciones de contorno en los extremos de la varilla, $x = 0, L$. Si están a temperatura constante o no hay flujo de calor a través de ellos (extremos aislados).

A modo de ejemplo, consideramos el problema mixto en el que los extremos de la varilla están a igual temperatura, que tomaremos como nula, y conocemos la temperatura inicial de los puntos de la varilla,

$$u(0,t) = 0 = u(L,t), \quad t > 0, \qquad u(x,0) = f(x).$$

Estas condiciones de contorno conducen a las siguientes para la ecuacion en $X(x)$,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad X(0) = 0 = X(L).$$

Ya nos hemos encontrado varias veces con este problema, que tiene por autovalores y autofunciones,

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Procedemos ahora con la otra ecuación,

$$T_n' + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \kappa T = 0 \Rightarrow T_n(t) = a_n e^{-(n\pi/L)^2\kappa t}.$$

Por tanto, a falta de la condición inicial, la solución se puede expresar en forma de serie,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n\pi/L)^2 \kappa t} \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Imponemos la condición $u(x,0) = f(x)$,

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Por tanto, si la función $f(x)$ admite desarrollo de Fourier en serie de senos,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi}{L} x, \qquad f_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx = a_n,$$

tenemos la solución del problema mixto:

Teorema 8.5.1 *El problema de la ecuación del calor $u_t - \kappa u_{xx} = 0$ para $x \in (0,L)$, $t > 0$ con condiciones mixtas $u(x,0) = f(x)$, $u(0,t) = 0 = u(L,t)$ para $x \in (0,L)$, $t > 0$, tiene solución*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{-(n\pi/L)^2 \kappa t} \sin \frac{n\pi}{L} x, \tag{8.3}$$

si la función $f(x)$ admite desarrollo de Fourier en el intervalo $(0,L)$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi}{L} x, \qquad f_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx.$$

Obsérvese que, debido a las exponenciales decrecientes, la solución tiende a cero cuando t tiende a infinito, lo cual indica que la varilla tiende a alcanzar la temperatura de sus extremos, en este caso nula, si estos se mantienen a la misma temperatura constante.

Ejemplo 8.5.1 *Hallar la temperatura de una varilla $u(x,t)$, $t > 0$, cuya distribución inicial de temperaturas es $u(x,0) = 3\sin x$, $x \in [0,\pi]$, si los extremos de la varilla están a la misma temperatura $u(0,t) = 0 = u(\pi,t)$.*

La solución del problema es

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{-n^2 \kappa t} \sin nx, \qquad 3\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin nx.$$

Como el desarrollo de Fourier es único, deducimos que $f_1 = 3$, $f_n = 0$ para $n \neq 1$. Por tanto la solución del problema es

$$u(x,t) = 3e^{-\kappa t} \sin x.$$

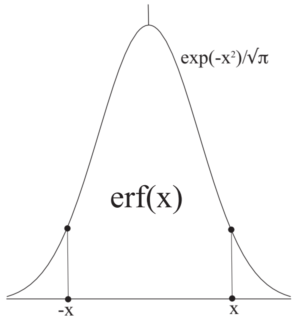

Figura 8.2: La función error es el área bajo la gráfica de la gaussiana

8.6. Función error

Dado que la función error aparece asociada a la integral definida de la exponencial gaussiana, que es esencialmente el núcleo integral de la ecuación del calor, dedicamos el final del tema a mostrar las propiedades de dicha función.

La **función error** se define como integral definida de la exponencial gaussiana,

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2}\, dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-z^2}\, dz, \tag{8.4}$$

es decir, es el área bajo la gráfica de la gaussiana comprendida entre $-x$ y x, o dos veces el área entre cero y x.

Teniendo en cuenta que la exponencial gaussiana es la distribución normal de probabilidad, la función error calcula la probabilidad de que un determinado suceso tome valor en el intervalo simétrico $[-x, x]$.

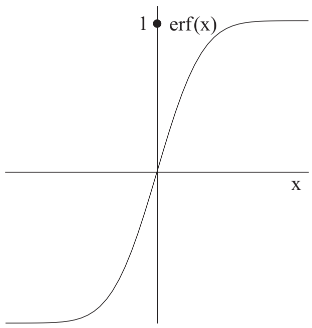

Figura 8.3: Gráfica de la función error

Algunas de sus propiedades están relacionadas con esta interpretación probabilística:

- $\operatorname{erf}(0) = 0$.
- $\lim_{x\to\infty} \operatorname{erf}(x) = 1$.

- La función error es de clase C^∞.
- La función error es impar, por las propiedades de la integral.
- $\operatorname{erf}'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$.
- $1 - \operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_x^\infty e^{-z^2}\,dz$, si $x > 0$.
- $1 + \operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-x}^\infty e^{-z^2}\,dz$, si $x > 0$.

8.7. Varilla semiinfinita

Otro problema relacionado con la ecuación del calor es el de la varilla semiinfinita, $u_t - \kappa u_{xx} = 0$, $u(x,0) = f(x)$, $t > 0$, $x > 0$, para el cual es preciso añadir una condición de contorno en el extremo $x = 0$ de la varilla. Por ejemplo, imponiendo la temperatura en este extremo, $u(0,t)$, o imponiendo el flujo de calor, $u_x(0,t)$.

Este tipo de problemas mixtos de pueden reducir al problema de la varilla infinita, siempre que la condición de contorno sea homogénea, es decir, bien $u(0,t) = 0$, bien $u_x(0,t) = 0$. Si la condición de contorno no fuera homogénea, habría que descomponer el problema en dos, como hemos hecho con anterioridad.

Nos basaremos en el hecho de que una función impar continua se anula en el origen, ya que, si $f(-x) = -f(x)$, entonces $f(0) = 0$. Por ello, si extendemos de manera impar el dato inicial a toda la varilla infinita,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} -f(-x) & x < 0 \\ f(x) & x > 0 \end{cases},$$

la solución del problema extendido, $u_t - \kappa u_{xx} = 0$, $u(x,0) = \tilde{f}(x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}\,dy,$$

cumple la condición inicial y además

$$u(0,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(y) e^{-\frac{y^2}{4\kappa t}}\,dy = 0,$$

puesto que el integrando es impar, al ser par la exponencial gaussiana e impar $\tilde{f}(x)$. Por tanto, nos sirve como solución del problema mixto con condición de contorno $u(0,t) = 0$. □

Teorema 8.7.1 *El problema mixto $u_t - \kappa u_{xx} = 0$, $u(x,0) = f(x)$, $u(0,t) = 0$, $t > 0$, $x > 0$, tiene solución*

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}\,dy, \tag{8.5}$$

si la integral converge, siendo $\tilde{f}$ la extensión impar de f.

Ejemplo 8.7.1 *Hallar la solución del problema* $u_t - \kappa u_{xx} = 0$, $u(x,0) = 1$, $u(0,t) = 0$, $t > 0$, $x > 0$.

Este problema describe una varilla semiinfinita a temperatura inicial constante a la que se le coloca en el extremo $x = 0$ un foco a temperatura nula.

Extendemos de forma impar el dato inicial,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \Rightarrow \tilde{f}(x) = \text{signo}\,(x),$$

que no es una función continua, aunque no afectará a nuestro resultado.

De acuerdo con el resultado anterior, la solución del problema es

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\int_{-\infty}^{\infty} \text{signo}\,(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}\,dy = -\frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}\,dy \\ &+ \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}\,dy = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-x/\sqrt{4\kappa t}} e^{-z^2}\,dy \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/\sqrt{4\kappa t}}^{\infty} e^{-z^2}\,dy = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\kappa t}}\right)\right) \\ &+ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\kappa t}}\right)\right) = \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\kappa t}}\right). \end{aligned}$$

con el cambio de variable $z = (y - x)/\sqrt{4\kappa t}$.

Obsérvese que $u(0,t) = \text{erf}\,(0) = 0$ para $t > 0$, a pesar de que el instante inicial la temperatura no es nula. Además, como era previsible, para grandes valores de t la temperatura tiende en todos los puntos de la varilla a $\text{erf}\,(0) = 0$, con lo cual el foco tiende a enfriar toda la varilla.

De idéntica manera se comprueba que la extensión par del dato inicial,

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(-x) & x < 0 \\ f(x) & x > 0 \end{cases},$$

proporciona una solución del problema de la varilla semiinfinita con condición de flujo nulo en el extremo en $x = 0$,

$$u_t - \kappa u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad u_x(0,t) = 0, \quad t > 0,\ x > 0,$$

ya que la derivada de una función par es una función impar.

Es fácil que ver que la solución del problema extendido, $u_t - \kappa u_{xx} = 0$, $u(x,0) = \hat{f}(x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}\,dy,$$

cumple la condición inicial y además la condición de contorno,

$$u_x(0,t) = \frac{1}{2\kappa t\sqrt{4\pi\kappa t}}\int_{-\infty}^{\infty} y\hat{f}(y) e^{-\frac{y^2}{4\kappa t}}\,dy = 0,$$

se cumple, puesto que el integrando es impar. $\square$

Teorema 8.7.2 *El problema mixto $u_t - \kappa u_{xx} = 0$, $u(x,0) = f(x)$, $u_x(0,t) = 0$, $t > 0$, $x > 0$, tiene solución*

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}\, dy, \tag{8.6}$$

si la integral converge, siendo $\hat{f}$ la extensión par de f.

Ejemplo 8.7.2 *Hallar la solución del problema $u_t - \kappa u_{xx} = 0$, $u(x,0) = 1$, $u_x(0,t) = 0$, $t > 0$, $x > 0$.*

Este problema describe una varilla semiinfinita a temperatura inicial constante a la que se aisla su extremo $x = 0$.

Extendemos de forma par el dato inicial,

$$\hat{f}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \hat{f}(x) = 1.$$

De acuerdo con el resultado anterior, la solución del problema es

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}\, dy = 1,$$

como vimos en la sección dedicada al núcleo integral.

Este resultado es coherente, ya que, si todos los puntos de la varilla están a idéntica temperatura y aislamos el extremo libre, la temperatura no debería variar.